BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXIII
F
35
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

# EVCLIDIS

ELEMENTORVM GEOMETRICORVM

## LIBROS TREDECIM

## ISIDORVM ET HYPSICLEM

& Recentiores de Corporibus Regularibus, &

# PROCLI

## PROPOSITIONES GEOMETRICAS

*Immiſionemque duarum rectarum linearum continuè proportionalium inter duas rectas, tàm ſecundùm Antiquos, quàm ſecundùm Recentiores Geometras, nouis vbique ferè demonſtrationibus illuſtrauit, & multis definitionibus, axiomatibus, propoſitionibus, corollariis, & animaduerſionibus, ad Geometriam rectè intelligendam neceſſariis, locupletauit*

## CLAVDIVS RICHARDVS

E Societate IESV Sacerdos, patria Ornacenſis in libero Comitatu Burgundiæ, & Regius Mathematicarum Profeſſor: dicauitque




ANTVERPIÆ,

Ex Officina HIERONYMI VERDVSSII. M. DC. XLV.

*Cum Gratiâ & Priuilegio.*

NAPOLI

# PHILIPPO
# QVARTO
## HISPANIARVM
ET
## INDIARVM
# REGI
# CATHOLICO.

ARchimedes Geloni Regi Syracuſio exiguum librum de arenæ numero dedicaturus, ab Regis ſui nomine ac tutela grandiorem eſſe voluit. Ego tantò Archimedis ingenio inferior, quantò Tu Gelone Rege ſuperior, ſub Regiæ Maieſtatis Tuæ titulo & protectione, primũ hunc & fundamentalem Tomum elucubrationum mearum Matheſeos, Tibi debitum titulis omnibus, in lucem edo: & ante Regios pedes prouolutus offero Tibi, vt deuotus ac fidelis cliens Regi ſuo; & vt Profeſſor Mathematicarum tuarum primus, quas

in Vrbe Regia Tua Matritenſi vnâ cum diſciplinarum omnium encyclopœdia fundaſti, & Societati noſtræ Tibi deuinctiſsimæ commiſiſti, Fundatori munificentiſsimo. Humile munus eſſe fateor clientis Tui Burgundi, comparatione Celſitudinis Tuæ; exiguumque donum Religioſi hominis, ſi conferatur cum Ampliſsima Maieſtate Tua Sacra; ſincerus tamen & gratus eſt offerentis animus; munuſque ac donum & animus ſuccreſcent, magnitudine, fauore, & benignitate acceptantis Sacræ Catholicæ Maieſtatis Tuæ, quàm Deus diutiſſimè in Regnorum tuorum, & Religionis Catholicæ publicum bonum, incolumen ſeruet.

AD

# AD LECTOREM.

VIGINTI ſeptem annorum decurſu, quos in prælegendis publicè Mathematicis inſumpſi; quinque in noſtra Turnonienſi Academia ab Illuſtrißimis Comitibus Turnoniis Galliæ nobilitatis clariſsimis fundata; ſeptem in Collegio noſtro Lugdunenſis vrbis Galliæ & orbis nobiliſsimo emporio; quindecim in noſtro Cæſareo ac Regio Collegio Matritano, & Aula Maximi Regis Hiſpaniarum & Indiarum Catholici celeberrima: ſex elaboraui diſciplinarum Geometricarum Tomos. Primus eſt iſte Elementorum primorum Geometricorum Euclidis, cuius propoſitiones & corollaria tanquam ab Antiquioribus recepta, iuxta Ordinem & editionem Reuerendi Patris noſtri Chriſtophori Clauij aſſumo; tùm aliorum in fronte libri præfixorum Authorum. Secundus eſt in Zenodorum de figuris iſoperimetris, In Archimedis opera, in Apollonium Pergæum, & in Serenum Antinſenſem. Tertius in Theodoſium Tripolitam, in Menelaum de triangulis ſphæricis, & in Pappi Alexandrini propoſitiones Geometricas. Quartus de ſinubus, tangentibus, ſecantibus, & analogiis earundem rectarum linearum; de triangulis rectilineis & ſphæricis. Quintus de natura Quantitatis ſecundùm ſe, & paſsionibus eius vniuerſalibus. Sextus de ſphæra Geometrica in vniuerſum, in quo fundamenta totius coſmographiæ, geographiæ, gnomonices & Aſtronomiæ iaciuntur.

In omnibus his curam ac ſtudium adhibeo, vel media noua demonſtrationum, vel apparatum ad illas, vel vtrumque proferre, nitidiuſque omnia explicare, & propoſitionibus noſtris, lemmatibuſque, & corollariis locupletare: non quod aliorum inuentiones minoris æſtimem, ſed vt animos faciam multis promouendi & illuſtrandi Geometriam; & ne ab aliis ſcripta exſcribere videar.

Abſtineo autem conſultò ab cenſoria virgula in Authores & Commentatores: nam ſi per tempus & otium licuerit, edam aliquando librum in quo primùm noſtra carpam, tùm aliorum errores humanos abſque vlla inuidia ac maleuolentia, ne in eos incurrant Tyrones, detegam

*Tempero etiam me ab Authorum commendatione , eorumq; operibus aſsignandis propriis & controuerſis ; id enim peculiari libro præſtiturus ſum.*

*Ad hæc, euito aliorum Authorum placita ſimilia circa materiam aliquam referre : nam vt colligere potes ex vniuerſali deſignatione noſtra , ſuis ea locis producam ; niſi ſint Authorum quorum fragmenta aliorum operibus ſint inſerta.*

*Hunc primum Tomum Lector euolue , perlege , & expende diligenter , ſi reliquos intelligere cupias , & aliquid ſolidi in Mathematicis adipiſci. Et ſi illum in meliorem formam redegeris, locupletaueris , & correxeris , id gratiſsimum mihi erit , qui nihil aliud quàm publicum maius bonum , maioremque Dei Optimi Maximi gloriam ſpectare debeo.*

FA-

FACVLTAS

# REVERENDI PATRIS
# PROVINCIALIS
# SOCIETATIS IESV
IN PROVINCIA
# TOLETANA.

*EGO Franciſcus Aguado Societatis IESV in Prouincia Toletana Præpoſitus Generalis, poteſtate ad id mihi facta à Reuerendo admodum Patre noſtro Mutio Vitelleſchi Præpoſito Generali, facultatem facio, vt Commentarius in* EVCLIDIS *Elementorum Geometricorum libros XIII. in* ISIDORVM, HYPSICLEM, *& recentiores de Corporibus Regularibus; & in* PROCLI *Propoſitiones Geometricas; & in immiſsionem duarum rectarum linearum continuè porportionalium inter duas rectas, tàm ſecundùm antiquos, quàm ſecundùm recentiores: Authore Patre* CLAVDIO RICHARDO *noſtræ Societatis, & eiuſdem Societatis grauium Doctorum iudicio approbatus, typis mandetur. In quorum fidem has litteras manu noſtra ſubſcriptas, & ſigillo noſtro munitas dedimus. Matriti in noſtro Collegio Imperiali, die duodecima Aprilis, Anno* 1643.

FRANCISCVS AGVADO.

AP-

## APPROBATIO.

T*Ractatus hic Geometricus* R.P. CLAVDII RICHARDI *è Societate IESV, cum nihil contineat fidei aut bonis moribus contrarium, & Geometriæ illuſtrandæ non parum deſeruiat, lucem meritò aſpiciet. Datum Antuerpiæ 27. Ianuarij M. DC. LXV.*

GVIL. BOLOGNINO S. Th. L.
Eccl. Cath. Canon. & librorum
Cenſor.

---

## SVMMA PRIVILEGII.

PHILIPPVS IV. Hiſpaniarum & Indiarum Rex Catholicus ac potentiſsimus Belgarum & Burgundionum Princeps diplomate ſanxit ne quis præter *Hieronymi Verduſſij* voluntatem Opera Mathematica *R. P. Claudij Richardi* Societatis IESV, vllo modo imprimat, aut alibi terrarum impreſſa in has inferioris Germaniæ ditiones importat vænaliave habeat. Qui ſecus faxit, confiſcatione librorum & alia graui pœna mulctabitur, vti latius patet in litteris datis Bruxellæ 24. Decemb. 1643.

Signat

STEENHVYSE.

## *Argumenta Librorum huius Tomi.*

### *Argumentum Libri I. Euclidis.*

PRIMVS hic liber continet 36 definitiones antiquas, quibus tres poſtremas addidimus. Petitiones verò quatuor antiquas, quibus duas alias adiunximus. Ad hæc 30. axiomata; verùm decem poſtrema noſtra ſunt; & ſextum, ſeptimum, nonum, ac decimumtertium locupletauimus. Denique propoſitiones 48. corollaria verò 54 inter quæ ſunt è noſtris 41.

Imprimis autem in hoc libro tractantur de lineis rectis, angulis rectilineis triangulisque rectilineis, non autem curuilineis & mixtis. Docetque modum emittendi rectam lineam ex puncto dato æqualem datæ rectæ: tum de maiore data reſecandi aliam æqualem minori datæ: tum ducendi rectam parallelam alteri datæ, ex puncto dato: tum diuidendi bifariàm, quadrifariamque, & ſic deinceps in proportione dupli, quamlibet rectam lineam finitam; & quemlibet angulum rectilineum: tum excitandi & demittendi rectam lineam alteri rectæ perpendicularem. Tradit praxes deſcribendi trianguli, & quadrati ſuper data recta linea; & ex tribus rectis, quarum duæ quælibet ſint maiores reliquâ, formare triangulum; tum æqualem angulum efficere æqualem dato. Ad hæc ſpeculatur æqualitatem angulorum ad baſim trianguli iſoſcelis, & infra eandem baſim ſi producantur latera eius æqualia; colligitque æqualitatem laterum illius ſi æquales anguli fuerint ad baſim; definitque omne triangulum æquilaterum eſſe æquiangulum; & ſi fuerit æquiangulum infert eſſe æquilaterum; negatque poſſe ad eaſdem partes duci duas rectas ad idem punctum, æquales duabus aliis ad aliud punctum ductis, eoſdemque terminos cum aliis prædictis habentes. Prætereà comparat duo triangula in ratione æqualitatis ex lateribus vel angulis; refertque angulos lateribus, & latera angulis; anguloſque externos internis & oppoſitis. Conſiderat inſuper angulos qui fiunt ab recta inſiſtente alteri rectæ, & ab duabus ſe mutuò decuſſantibus; & qui fiunt circa vnum punctum. Poſt hæc meditatur angulos qui fiunt ab recta ſecante alias rectas parallelas, & non parallelas; methodumque affert cognoſcendi rectas inuicem parallelas & non parallelas beneficio angulorum factorum ab recta illas ſecante. Determinat autem tres angulos cuiuſcumque trianguli rectilinei eſſe ſimul ſumptos æquales duobus rectis angulis rectilineis; ex quibus colligit quot angulis rectis ſint æquales omnes anguli cuiuſcumque figuræ rectilineæ interni, & externi ſi producantur eius latera verſus vnam partem. Aſſerit verò rectas

** alteri

alteri rectæ parallelas, eſſe etiam inter ſe parallelas; rectaſque reuincientes æquales & parallelas, eſſe & parallelas & æquales inuicem: ex quibus reſultat parallelogrammum, quod ideò affirmat obtinere oppoſita latera æqualia, & angulos oppoſitos æquales, bifariamque ſecari ab eius diagonali recta. Tum adſtruit æqualitatem tam triangulorum, quàm parallelogrammorum, ſi ſuper eadem baſi, vel æqualibus baſibus ſint, & inter eaſdem parallelas; omneque parallelogrammum eſſe duplum trianguli conſtituti inter eaſdem cum illo parallelas, & ſuper æquali vel æqualibus baſibus; tum etiam parallelogramma quæ ſunt complementa in parallelogrammo eſſe æqualia inter ſe; omniaque quadrata eſſe æqualia facta ſuper æqualibus rectis; & contra quadrata æqualia habere æqualia latera; denique omnis quadrati angulos diuidi in ſemirectos abſciſſis diagonalibus. Docet inſuper modum conuertendi triangulum in parallelogrammum æquale ſecundùm datam rectam lineam, angulumque datum; & applicare ad rectam datam, angulumque datum, parallelogrammum æquale alteri parallelogrammo, vel cuicumque alteri rectilineo; tum de maiore, parallelogrammum detrahere aliud minus datum, & exhibere differentiam eorum in parallelogrammo. Concludit verò in triangulis rectangulis quadratum ſuper latere obuerſo angulo eius recto factum, æquale eſſe duobus ſimul quadratis reliquorum laterum circa angulum rectum: Et ſi in triangulo quadratum vnius lateris fuerit æquale duobus ſimul quadratis reliquorum laterum, colligit hæc duo latera continere angulum rectum.

## *Argumentum libri II. Euclidis.*

Liber hic ſecundus complectitur definitiones duas, & propoſitiones 14. cum corollariis duobus. Præmiſimus duo lemmata, quorum primum ſupplet methodum conficiendi rectanguli vel parallelogrammi, ſub duabus rectis lineis datis, & angulo dato rectilineo. Alterum verò demonſtrat parallelas rectas ductas ex quibuſcumque punctis laterum rectanguli dati, vni laterum illius, vel perpendiculares ipſi lateri, efficere rectangula; & ſi ex aliis punctis alterius lateris cum quo prædictum conſtituit angulum, educantur ſimiliter parallelæ rectæ alteri lateri, vel perpendiculares ipſimet, reſultare alia rectangula, & intermedia, quæ ſi circa diametrum ſint quadrati, erunt etiam quadrata partium lateris illius oppoſitarum. hoc autem ſecundum lemma noſtrum faciliores

ciliores ac breuiores reddit conſtructiones neceſſarias ad propoſitionum huius libri demonſtrationem; idem enim ſæpius repetere cogebantur Interpretes.

Iam verò libri huius propoſitiones ab prima ad decimam incluſiuè verſantur circa comparationes rectangulorum factorum ex lineis diuerſis ſectis, inſectis, & partibus illarum. Vndecima autem diuidit rectam in duas inæquales partes, ita vt rectangulum ſub tota & minore eius parte ſit æquale quadraro maioris, quod inſeruiet in libro 6, ad ſecandam rectam lineam extrema & media ratione. Duodecima comparat quadratum lateris obuerſi angulo maiore recto in triangulo obtuſangulo, cum quadratis reliquorum duorum laterum circa obtuſum angulum ſimul ſumptis; & decima tertia refert quadratum lateris oppoſiti acuto angulo in triangulo acutangulo, cum quadratis reliquorum duorum laterum circa acutum angulum; determinatque rectangulum bis ſumptum quo illud illa excedit, vel quo hoc exceditur ab illis: ita vt iſtæ duæ propoſitiones cum quadrageſima ſeptima libri primi, ſuppeditent omnia neceſſaria ad comparationem quadratorum laterum cuiuſcumque trianguli oppoſitorum angulo recto in rectangulo triangulo, vel obtuſo in obtuſangulo, vel acuto in acutangulo, cum quadratis reliquorum duorum laterum. Denique quodcumque rectilineum conuertit in quadratum propoſitione vltima, quod docuerat in propoſ. 45. libr. 1. transformare in parallelogrammum ſub data recta, & angulo dato.

Notandum verò eſt in hoc libro iacta eſſe fundamenta diſciplinæ Algabraicæ quæ conſiderat numeros denominatos figuris Geometricis rectangulis, quadratiſve; demonſtrationes enim præcipuarum ſuarum regularum ab huius libri propoſitionibus dependent; à quibus etiam liber decimus ſtabilitatem mutuatur. Præterea certum eſt omnes huius propoſitiones primas vſque ad vndecimam excluſiuè applicari poſſe numeris, ſi lineæ rectæ loco intelligatur numerus, quod etiam monebimus in argumento libri 7.

## *Argumentum Libri III. Euclidis.*

HVius libri tertij ſunt viginti definitiones, quarum primæ decem ſunt Antiquorum, reliquæ à nobis additæ: Propoſitiones triginta ſeptem, & corollaria quadraginta, inter quæ ſunt noſtra triginta & vnum.

Hic liber iacit fundamenta prima circa proprietates circulorum, & rectarum linearum eos tangentium, vel ſecantium, vel ſubtenſa-

rum arcubus illorum : tum angulorum rectilineorum in centris ipſorum vel in ſegmentis exiſtentium, vel inſiſtentium arcubus : tum angulorum mixtilineorum ſegmentorum illorum, vel effectorum ab circumferentiis ac tangentibus rectis : tum oppoſitorum angulorum quadrilaterarum rectilinearum figurarum in ipſis circulis deſcriptarum. Tradit præterea praxes reperiendi centrum circuli; diuidendi bifariàm arcus illius ; & perficiendi circumferentiam circuli ex arcus eius dato ; ducendi rectas lineas circulum tangentes ab puncto extra circulum ipſum eiuſque peripheriam dato, vel in ipſa circumferentia ; tùm ſuper data recta deſcribendi ſegmentum circuli recipiens angulum rectilineum æqualem dato ; tùm ab dato circulo ſegmentum reſcindere capiens angulum rectilineum æqualem dato. Inſuper agit de paſsionibus nonnullis circulorum ſe mutuò ſecantium, vel ſe mutuò tangentium ſiue interiùs ſiue exteriùs. Præterea de ſegmentis ſimilibus circulorum agit. Denique comparat rectangula facta ab ſegmentis propriis chordarum ſe mutuò interſecantium in circulo ; tum rectangula facta ab ſecantibus circulum cum quadrato tangentis ipſum ab eodem puncto exteriore procedente, ex quo ſecans recta ; tùm circulorum concentricorum proprietates quaſdam innuimus circa portiones rectarum quidem ſecantium minorem vel tangentium ipſum, ſed terminatarum in circumferentia maioris ; tùm deducimus in corollariis noſtris ad propoſitiones vltimas diuerſas methodos ab traditis in primo & ſecundo libro, conuertendi rectangulum vnum in alia diuerſa ſingula rectangula, vel in quadratum ; & contra quadratum transformare in alia diuerſa ſingula rectangula. Ex quibus colligitur librum hunc eſſe primum fundamentum totius Aſtronomiæ & ſphæricæ ſcientiæ, quæ neceſſariò dependet ex proprietatibus circulorum.

## *Argumentum libri IV. Euclidis.*

AD hunc librum quartum pertinent definitiones nouem, quarum duæ poſtremæ ſunt noſtræ : Propoſitiones autem ſexdecim ; & corollaria octodecim, inter quæ ſunt quatuor ſolummodò antiquorum, reliqua verò noſtra cum tribus lemmatibus ad propoſit. 4.

Finis huius libri eſt in circulis inſcribere triangula, quadrata, pentagona, hexagona, & quintidecagona, & circa illa deſcribere circulos ; & circa circulos prædictas figuras ; quamquam hoc vltimum

mum in quibuſdam ſolùm ad praxim reducat. Propoſitione decimâ proponit nobiliſſimum problema deſcribendi iſoſceles triangulum quod habeat ſingulos ad baſim angulos duplum reliqui. Quod ſi ſolutum eſſet problema iſoſceles triangulum conſtituendi habens ſingulos ad baſim angulos in ratione data ad reliquum, Geometria non inſudaret in deſcribendo heptagono, enneagono, & reliquis huiuſmodi figuris æquilateris & æquiangulis. Porrò tria lemmata ad quartam addidimus, & corollaria deduximus octo ab dictis in quarta propoſitione; & corollaria ex 12. & 13.; ex quibus facillimè in quibuſcumque figuris æquilateris & æquiangulis circulos inſcribemus, & circa ipſas circulos. Denique noſtra duo corollaria ad prop. vltimam ſupplent modum detrahendi è circulis arcus æquales datis.

## *Argumentum Libri V. Eudoxi & Euclidis.*

CVm ex proportionibus admiranda & præclara omnia Geometriæ problemata ac Theoremata dependeant; & liber hic Eudoxi, Euclidis, earum vniuerſalia & ſolida ſedimenta iaciat; multæque deſiderentur definitiones ac diuiſiones ipſarum proportionum, & proportionalitatum, & medietatum, aliaque huiuſmodi ad eas pertinentia: è re publica Geometrica eſſe iudicauimus ea omnia in hoc libro ſupplere, & proponere, quo facilior ſit & commodior in eius penitiora adyta ingreſſus; præſertim cùm nullus ſit alius accommodatior locus illa omnia explicandi fundamenta prima propoitionum diuerſarum, quàm hic liber in quo alia fundamenta earundem iaciuntur; quique vti ad nos peruenit continet definitiones 19. axioma vnicum, propoſitiones 25. & corollaria 4. Propoſitiones verò adiectæ ſunt ab recentioribus nouem poſtremæ ad intelligentiam artificioſi & proficui Trigonometriæ tractatus, & operum Archimedis. His propoſitionibus addimus lemmata 8. & corollariis corollaria 42. & definitionibus, alias 20. in digreſsione noſtra prima ad ipſas definitiones antiquas; tùm alias 29. in digreſsione noſtra ſecunda ad definit. tùm etiam 22. propoſitiones, adſoluenda dubia quæ circa definitiones additas, & denominatores ipſarum proportionum; tùm alias definitiones quinque ad poſtremam 19. antiquorum: inter quas 24. de compoſitione rationum eſt adſcita ex libro ſexto ſequente, ſed reformata à nobis, vt ſit communis tàm rationalibus quàm Irrationalibus proportionibus. Axiomata denique vndecim proponimus ex vniuerſaliſsimis libri primi deducta.

ſta. Itaque in ſumma exhibentur 73 definitiones; Axiomata 12. propoſitiones 56; lemmata 8. & corollaria 46.

Liber hic minimè ab aliis dependet præcedentibus, niſi quædam ab vniuerſaliſsimis libri primi axiomatibus; ita vt Philoſophi ab hoc incipere poſsint, eumque intelligere; non autem Tyrones minimè aſſueti relationibus.

Animaduertendum eſt, primò huius libri principia omnia applicari poſſe etiam. quantitati diſcretæ, ſeu numeris, licet in eis magnitudines ſolummodò proponantur: nam cùm propoſitiones dependeant mediatè vel immediatè ab definitionibus ſexta & octaua antiquorum, quæ etiam numeris applicari poſſunt, quorum æquemultiplices ſumi poſſunt; manifeſtum eſt etiam, eadem principia inſeruire poſſe numeris.

Animaduertendũ eſt ſecundò, antiquos Interpretes facilitatis ergo, exempla protuliſſe ſolum in lineis, quæ etiam in ſuperficiebus, vel corporibus proferri poterant; quod nobis præbuit anſam maioris etiam facilitatis gratia proferendi exempla in numeris, & aliquando in ſolis characteribus litterarum communium; licet intelligamus etiam poſſe produci in medium in lineis, ſuperficiebus, & ſolidis comparabilibus inter ſe; à quibus omnibus abſtrahunt characteres appoſiti.

## *Argumentum libri VI. Eudoxi Euclidis.*

Liber hic ſextus ab omnibus præcedentibus dependet, & præſertim ab quinto; quia principia prima tradit circa lineas rectas proportionales, & circa planas figuras comparabiles. Ex hoc dependet Geometria practica in lineis rectis, & figuris planis, non autem ſolidis: eſtque applicatio principiorum libri quinti circa lineas rectas, angulos planos, & figuras planas multas proportionales. Tradit quidem rectas lineas diuidendi methodum in quacumque ratione data, ſed non planas figuras omnes diuidendi in ratione data.

Definitiones continet 7. vltimaque eſt addita à nobis; propoſitiones 33. corollaria 46. inter quæ ſolummodò antiquorum octo ſunt, reliqua noſtra magnam lucem afferentia toti Geometriæ; & inter alia, ſpectabilia ſunt noſtra corollaria duodecim circa tres & quatuor rectas lineas continuè proportionales, ad prop. decimam nonam.

*Argu-*

## *Argumenta Librorum huius Tomi.*

### *Argumentum libri VII. Euclidis.*

HOc libro ſeptimo & ſequentibus duobus octauo & nono agit Euclides de quantitate diſcreta, ſeu numeris, ſine cuius notitia minimè poſſunt explicari quãtitates commenſurabiles & incõmenſurabiles, Rationales & Irrationales, de quibus libro ſuo decimo tractat.

Tradit autem iſto libro definitiones viginti ſeptẽ, Petitiones duas, Axiomata duodecim: quæ omnia conducent etiam ſequentibus duobus libris octauo & nono. Definitiones in vniuerſum, ſunt vnitatis, numeri, Partis & partium in numeris: Tùm numeri paris, imparis, pariter paris, pariter imparis, impariter imparis: Præterea primi numeri, non quidem ordinalis; tùm primorum numerorum inter ſe, etiam non ordinalium: compoſiti; compoſitorum: multiplicantis alium, multiplicati ab alio, productique ab illis, quem planum nominat; productique ab tribus numeris ſe inuicem multiplicantibus, quem ſolidum vocat: Inſuper quadrati numeri, & Cubi: Ad hæc habitudinis inter numeros, numerorumque proportionalium: Tùm numerorum planorum ſimilium, & ſolidorum numerorum ſimilium: tùm perfecti numeri: numeri metientis alium numerum per alium numerum: terminorum ſiue radicum proportionis inter numeros. Denique explicat, quid ſit numerus ad numerum habens rationem duplicatam, triplicatam, & ſic deinceps; & quid ſit ratio compoſita in numeris.

Demonſtrat autem in iſto libro, propoſitionibus 41. & corollariis quinque diuerſas horum numerorum proprietates. Imprimis methodum qua cognaſcantur duo numeri inter ſe primi; & maxima quorumcunque numerorum huiuſmodi non primorum menſura. Tùm affectiones numerorum qui ſint pars vel partes aliorum numerorum. Deinde aliquas vniuerſaliores proprietates numerorũ productorum ab aliis numeris; & etiam numerorum proportionalium inſuper affectiones numerorum inter ſe primorum, tàm compoſitorum, tùm minimorum. Denique numerorum metientium alios numeros.

His propoſitionibus adiunximus corollaria noſtra quinque: tùm in digreſsione vnica præmiſsimus propoſitiones noſtras quindecim, in quibus explicamus quomodo vnitas in numeris ſit diuiſibilis, & indiuiſibilis ſub diuerſis reſpectibus: tùm multa communia magnitudinibus & numeris eſſe oſtendimus; ſocietatemque magnitudinum & numerorum commendamus, eaque vtimur ad explicanda multa in numeris, ex principiis libri quinti horum elementorum.

## *Argumentum Libri VIII. Euclidis.*

LIber hic octauus continet propoſitiones 27. & corollaria quatuor antiqua,noſtra verò ſex.

In hoc libro docetur modus reperiendi in quacumque proportione data Rationali, minimos proportionales numeros: tùm tractatur de affectionibus alijs proportionalium numerorum, quorum extremi fuerint inter ſe primi, vel quorum primus minimè ſecundum metiatur,aut extremum; tùm numerorum minimorum in aliqua proportione continuè proportionalium; tùm planorum numerorum. Præterea manifeſtat proprietates quaſdam numerorum,quãdo inter duos incidunt alij proportionales numeri continuè proportionales.Inſuper agit de numero proportionali incidente inter duos numeros ſimiles, vel quadratos; & de duobus numeris inter duos numeros cubos aut ſolidos; illoſque quadratos duplicatam habere rationem laterum, & cubos triplicatã oſtendit:tùm de numeris agit proportionalibus,multiplicatis à ſe ipſis.Adhæc confert quadratos numeros metientes alios quadratos numeros,vel non metientes,cum lateribus ſuis:ſimiliter & cubos & ſolidos. Afferit verò trium numerorum proportionalium, ſi primus fuerit quadratus,tertium eſſe quadratum: quatuor autem numerorum proportionalium, ſi primus fuerit cubus, quartum eſſe cubum.Deinde ſpeculatur affectiones numerorum rationẽ habentium, vt quadratus numerus ad quadratũ, vel vt cubus numerus ad cubum numerum:tùm numerorum inter proportionem non habentium, vt quadratus ad quadratum,vel vt cubus ad cubum: tùm numerorũ rationem obtinentium ſimilium planorum vel non ſimiliũ. Denique oſtendit nullos numeros in proportione dupla vel quintupla,proportionẽ habere inter ſe, quam quadratus numerus ad numerũ quadratũ.

## *Argumentum Libri IX. Euclidis.*

COmplectitur hic liber propoſitiones 36. corollaria quatuor;quibus adiecimus corollaria noſtra 25.

Proprietates multas explicat numerorum progenitorum ex ductu duorum numerorum,vel vnius ſeipſum multiplicantis;tùm etiã multiplicantium & multiplicatorum numerorum. Inter numeros ab vnitate continuè proportionales geometricè,manifeſtat quadratos interiectos numeros, & cubos, & quadratos cubos; deſignatque locum ſeu ordinem metientis numeri alium ex illis numerũ,& numeri per quem illum

illum metitur; quantũque diſtet numerus procreatus ex ductu ſui ipſius in ſeipſum, ab ordine ſuo. Præterea expendit affectiones numerorum minimorum proportionalium eandem cum prædictis numeris continuè proportionalibus ab vnitate incipientibus. Deinde modum tradit reperiendi duobus datis numeris tertium, & tribus quartum. Inſuper multa demonſtrat de numero pari, impari; pauca verò de pariter pari, & pariter impari; pauciora de perfecto numero. Denique methodum aſsignamus compendioſam colligendi ſummam propoſitorum omnium numerorum continuè proportionalium.

## *Argumentum Libri X. Euclidis.*

Liber decimus comprehẽdit definitiones 23. tribus ordinibus diſpoſitas; primi ordinis ſunt vndecim; ſecundi ſex, & tertij ſex: ſecundi ac tertij definitiones ſupponunt proprietates explicatas in præcedentibus huius libri propoſitionibus; quare primo loco proponi non potuerunt. Continet etiam petitionem vnicam, axiomata tria, propoſitiones 117. lemmata 25. corollaria 14. Noſtra verò lemmata ſex, & corollaria etiam noſtra 52.

Totus hic liber de proprietatibus commenſurabiliũ & incommenſurabilium, ſiue longitudine, ſiue potentia, ſiue longitudine & potentia ſimul; tum Rationalium & Irrationaliũ. Miróque artificio & ingenio ſpecies diuerſas Irrationalium diſtinguit, in Mediam, Mediũ, ex binis Nominibus, ex binis Nominibus primam, ex binis Nominibus ſecundam, Maiorem, Minorem, Rationale ac Medium potens, binã Mediam potentem, Nomen, Binomium, ex binis Nominibus primã, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, ſextam, Apotomen ſeu Reſiduum, Mediæ Apotomæ primam, Mediæ Apotomæ ſecundam, cum Rationali Medium totum efficiẽs, cum Medio Medium totum efficiens, Apotomen primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, ſextam. Docetque propoſitione 116. infinitas eſſe alias Irrationales ex Media oriundas, differentes ſpecie ab enumeratis.

Confert hic liber plurimum ad eam diſciplinam quæ vulgò Algebra nominatur, occupata in ſpeculatione numerorum denominatorum ab quantitatibus geometricis.

Præmittitur autem libris ſequentibus vndecimo, duodecimo, ac decimo tertio, ſolidorum, prẹſertim duobus vltimis in quibus comparantur corpora diuerſa ad inuicem, præſertim ratione laterũ & ſuperficierũ. Denique neceſſarius eſt, ad vnâ cum quinto, ſexto, ac tribus numerorum videlicet ſeptimo octauo & nono, ad determinationem proportionis interiectæ inter quantitates datas, an ſit Rationalis aut

Irrationalis, & cuius ſpeciei inter Irrationales: tùm ad eliciendum an propoſitæ quantitates comparabiles ſint commenſurabiles, & quomodò longitudine an potentia, & longitudine & potentia ſimul.

## *Argumentum Libri II. Euclidis.*

HIc liber primus eſt ſolidorum, in quo affert definitiones 32. quibus adiecimus quatuor, neceſſarias omnes ad ſolida intelligenda de quibus agit hoc lib. o & ſequentibus 12. ac 13. tùm etiā neceſſarias ad librū Iſidori, duoſq; Hypſiclis. Cōtinet hic liber vndecimus 40. propoſitiones, & corollaria tria; quibus corollariis addidimus noſtra 38.

Primò. agit de proprietatibus & praxibus rectarum linearum ductarum in plano vno, vel ab vno ad aliud, ſiue ſint parallela ambo, vel inclinata ad inuicem, vel ſe mutuò ſecent.

Secundò. tractat de proprietatibus planorum inuicem æquidiſtantium, & perpendicularium ſibi inuicem; & ſe mutuò interſecantium. quæ omnia præmittenda erant ad rectè intelligenda ſolida, quorum maior pars planis circumambiuntur.

Tertiò. Solidi anguli pertinentis ad corpora planis terminata, tradit conditiones neceſſarias, & affectiones eius explicat, modumque huiuſmodi angulos ſolidos planis angulis cōſtantibus efformandi exhibet.

Quartò. proprietates multas parallelepipedorum demonſtrat; & comparationes varias profert inter illa abſolutè ſumpta, tùm etiam ædificata ab rectis proportionalibus inter ſe, tribus vel quatuor: quæ omnia priſmatibus in corollariis noſtris accomodamus.

Hic liber principia prima ſeu fundamenta exhibet omnium quæ in ſphæra tractantur circa ſectiones, inclinationes, & rectitudines ad inuicem planorum circularium illius.

## *Argumentum Libri XII. Euclidis.*

IN ſecundo hoc libro ſolidorum ſunt propoſitiones 18. & corollaria 16. quibus adde noſtra corollaria 49. ſolida verò ſunt iſta, quorum affectiones demonſtrat Pyramis, Cylindrus, Conus, Priſma, Sphęra & Polyedra in Sphæra inſcripta.

Primò. comparantur polygona ſimilia in circulis inſcripta, cum quadratis à diametris ipſorum circulorum: circulique cum quadratis diametrorum ipſorum circulorum. quas comparationes libro ſexto inſerere potuiſſet. Nos verò in corollariis noſtris multa congerimus ſcitu neceſſaria, & profutura ſpeculationibus Geometricis.

Secundò conferantur pyramides & priſmata ratione diuiſionis ipſorum.

Tertiò refert pyramides eiuſdem altitudinis diuiſas eodem modo in pyramides & priſmata.

Quartò componuntur ad inuicem pyramides eiuſdem altitudinis, ratione baſium; vel æqualium baſium, ratione altitudinum.

Quintò conferuntur priſmata baſium triangularium æqualium & parallelarum cum pyramidibus triangularium etiam baſium earundem,& altitudinum earum: priſmata etiam ratione baſium & altitudinum. In noſtris verò corollariis priſmata & pyramides comparantur ad inuicem,quarumcumque baſium plurium laterum quàm quatuor.

Sextò aſſeruntur pyramides ſimiles, eſſe in triplicata ratione laterum homologorum. Quam aſſertionem applicamus quibuſcumque aliis pyramidibus ſimilibus baſes habentibus plurium laterum quàm trium; & quibuſcumque priſmatibus ſimilibus.

Septimò ait reciprocari baſes & altitudines in pyramidibus æqualibus triangulares baſes habentibus: & ſi pyramidum huiuſmodi reciprocentur baſes & altitudines, concludit æqualitatem inter illas. Hæc eadem extendimus ad quaſcumque alias pyramides, & ad priſmata, & ad parallelepipeda quæcumque.

Octauò collationes proferuntur coni recti ſeu iſoſcelis cum cylindri earundem vel æqualiũ altitudinum, & baſiũ cum conis. quas adaptamus parallelepipedis & priſmatibus inſcriptis vel circũſcriptis ipſis cylindris,baſeſq; habentibus quadrata vel triãgula circumſcripta vel inſcripta baſibus cylindrorum,altitudineſque obtinentibus æqualescum altitudinibus cylindrorum. Conferimus etiam pyramides earundem altitudinum cum conis, baſes habentium rectilineas circumſcriptas vel inſcriptas baſibus circularibus conorum ipſorum.

Nonò conferuntur diuerſi coni ſeorſim ſumpti cum baſibus propriis & altitudinibus propriis. Eadem comparatio fit inter cylindros diuerſos.

Decimò conos ſimiles probat eſſe in triplicata ratione diametrorum ſuarum quæ in baſibus. Idemque probat in cylindris ſimilibus.

Vndecimò referuntur ſegmenta cylindrica cylindri ſecti plano baſi parallelo, cum axibus illorum propriis.

Duodecimò reciprocationem baſium & altitudinum in æqualibus conis vel cylindris adſtruit, & oſtendit ex huiuſmodi reciprocatione conos vel cylindros eſſe æquales.

Decimotertiò problema proponitur inſcribendi figurã rectilineam regularẽ in circulo maiore è duobus concentricis,cuius latera non tangant nec ſecẽt circulum minorem concentricum; ad perficiẽdum aliud problema quò in maiore ſphæra è duabus concentricis polyedrum inſcri-

inſcribatur, cuius ſuperficies non tangat nec ſecet minorem ſphæram concentricam.

Decimo quartò & vltimò demonſtrat ſphæras eſſe in triplicata ratione ſuarum diametrorum: ſphæramque eſſe ad ſphæram, vt polyedrum in illa inſcriptum, ad polyedrum in hac deſcriptum, & ſimile.

## *Argumentum Libri XIII. Euclidis.*

Hic liber elementorum Geometricorum Euclidis eſt vltimus, tertiuſque & vltimus etiam ſolidorum. Porrò ſolida quæ contemplatur in hoc libro, ſunt quinque corpora regularia, Tetraedrum, Hexaedrum, Octaedrum, Dodecaedrum, & Icoſaedrum, definita libr. 11. ſuo elementorum, ſeu primo ſolidorum, celeberrima in Timæo Platonis, qui figuras ipſorum quatuor elementis, cæloque affingit; Cælo videlicet Octaedri, Igni Tetraedri, Aeri Octaedri, Aquæ Icoſaedri, Terræ Hexaedri.

Imprimis comparationem laterum planorum terminantium illa corpora inſtituit, eorumque constructionem intra eandem ſphæram; determinando an ſit commenſurabilia aut incommenſurabilia illa latera, & cuius ſpeciei ſint illæ comparationes ſub generibus Rationalis vel Irrationalis.

Ad hunc finem explicat neceſſarias proprietates potentiarum ſegmentorum rectæ lineæ media & extrema ratione diuiſæ, & ipſius rectæ comparatæ cum ſuis ſegmentis; vel aliis lateribus figurarum rectilinearum planarum, trigoni, tetragoni, pentagoni, & hexagoni, & decagoni æquilaterarum & æquiangulorum; vel etiam nonnullis aliis rectis intra citatas figuras tranſmiſsis, vel adiectis ad ipſam latera. Nullas verò alias figuras regulares rectilineas aduocat; quia ex illis, tres, videlicet triangulum, quadratum, & pentagonum, ſuprà laudata corpora regularia terminant; nam Tetraedri Octaedri & Icoſaedri, plana omnia ſunt triãgularia, Hexaedri ſiue Cubi quadrata, Dodecaedri pentagona: Reliquas autem duas hexagonum & decagonum in medium adducit ob duas rationes; quarum prima ſit, eò quòd hexagoni latus & decagoni latus in vnam rectam compoſita, exhibeant rectam lineam media & extrema ratione ſectam, cuius ſegmentum maius ſit ipſum latus hexagoni, & minor portio ſit latus decagoni: altera ratio ſit, quia pentagonũ inſcriptum circulo, poteſt & latus hexagoni & latus decagoni in eodem ipſo circulo inſcriptorum, ſicut demõſtrat propoſitionibus huius lib. 9. & 10. Cùm autẽ ad propoſitũ aſſequendum opus eſſet hæc antea probare circa hexagoni & decagoni latera, ideò præter triangulum quadratum & pentagonum, inuexit hexagonum & decagonum

gonum; non autem alias figuras rectilineas minimè ad inſtitutum ſuum facientes. Inſuper confert circulos præfatas figuras tres triangulum quadratum & pentagonum circumſcribentes, ipſorumq́ue diametros inter ſe, & cum diametro ſphæræ ipſa ſolida circumſcribentis, & cum lateribus dictarum figurarum planarum.

Nos verò in noſtris corollariis multa circa eandem materiam addimus, & alia Geometrica deducimus ex demonſtratis vſui futura in multis aliis demonſtrandis. Corollaria autem noſtra 22. vltima præter declarationem quod nulla ſint alia corpora regularia ab quinque enumeratis, componunt ratione multitudinis, angulos, plana, & latera dictorum corporum.

Hæc omnia explicantur propoſitionibus 18. & corollariis octodecim, quibus adde corollaria noſtra quinquaginta.

## *Argumentum Libri Iſidori de inclinatione duorum planorum communem rectam lineam habentium, in corporibus quinque Regularibus.*

ISidorus libro iſto ſuo docet quinque propoſitionibus modum inueniendi angulos inclinationum duorum planorum propriorum in ſingulis corporibus regularibus, communem rectam lineam habentium: & aliis quinque corollariis propriis oſtendit angulos huiuſmodi inclinationū in ſingulis dictis ſolidis eſſe æquales.

Nos verò in octo corollariis noſtris manifeſtas facimus quaſdam proprietates rectarum eductarum ab angulis trianguli æquilateri & pentagoni æquilateri, ad alios eorum angulos vel latera: tum methodum determinandi in triangulis rectilineis an angulus quilibet illorum propoſitus ſit acutus vel obtuſus, ex quadrato lateris illi angulo oppoſiti comparato cum quadratis aliorum laterum. An verò ſit rectus, agnoſcetur ex propoſitione 48. lib. 1. element. aſſumpta eadem compoſitione quadratorum prædicta.

## *Argumentum Libri I. Hypſiclis de corporibus Regularibus.*

HYpſiclis præcipuus in hoc libro ſcopus eſt comparare ſuperficies corporum regularium cum rectangulis quibuſdam ſub lateribus illorum, & ſub rectis lineis perpendicularibus deductis ex angulis planorum vel centris circulorum circumſcribentium plana illorum, ad latera eorundem; tum ſuperficies illorum, & ſoliditates. Sed ſolùm in Dodecaedro & Icoſaedro id præſtat, & ali-

quo

quo modo in Cubo. Ad hunc finem aſſequendum pontem ſibi facit ex proprietatibus nonnullis rectarum linearum ductarum in circulis plana illorum corporum circumſcribentibus, & laterum ipſorum, & rectarum linearum media & extrema ratione diuiſarum. Hæc verò abſoluit propoſitionibus decem, & corollariis quinque; quorum ſummam auximus corollariis noſtris tredecim.

Recentiores Geometræ, Campanus, Candalla, & Cardanus, aduertentes mancas comparationes illas, conati ſunt multa ſupplere propoſitionibus & corollariis propriis, quæ fortè iniuria temporum eripuit nobis ex integris & perfectis antiqui noſtri Geometræ Hypſiclis ſpeculationibus. Campanus quidem vndecim propoſitiones & corollaria ſex ſuperaddidit; Candalla ſex propoſitiones & corollaria tria; Cardanus quinque propoſitiones, & quatuor corollaria. Itaque liber hic in ſumma continet propoſitiones triginta duas, & corollaria triginta & vnum quæ omnia conſequenti ordine ab Clauij noſtri editione accepimus, præter noſtra corollaria tredecim.

## *Argumentum Libri II. Hypſiclis de Corporibus Regularibus.*

INſcriptionem aliquotum corporum regularium in aliquibus illorum tradit Hypſicles propoſitionibus ſuis quinque huius libri. Quod ſi omnium illorum in omnibus edidiſſet inſcriptiones mutuas, (quod facilè mihi perſuaſerim de tam claro Geometra) & ex puluere mathematico recentiorum non eſſent abraſæ, Campanus & Candalla in ſupplendis illis non inſudaſſent; ille quidem propoſitionibus ſeptem, hic nouem: quorum etiam corollaria circa eandem materiam recenſenda ſunt; illius quidem vnum, Candallæ verò duodecim. Quibus ſi addas noſtra etiam corollaria decem, & Hypſiclis vnum; ſumma corollariorum omnium erit viginti quatuor: Propoſitiones verò in ſumma viginti & vna.

## *Argumentum Libri Candallæ de Corporibus Regularibus.*

CAndalla hoc libro ſuo, propoſitionibuſque 31. & corollariis nouem comparat corpora quinque regularia inſcripta ſibi ipſis ad inuicem; & latera ac diametros ipſorum ſic inſcriptorum. Atque ita ſolus feliciter ſuppleuit quæ de comparatione huiuſmodi deſiderabantur. His vnicum ſolum noſtrum corollarium appoſuimus de minore ſegmento rectæ lineæ media

extrema-

extremaque ratione ſectæ, comparato cum dimidio maioris illius rectæ ſegmenti; & probamus illud ſegmentum minus, eſſe dimidio maioris prædicti maius.

Mirabitur aliquis cur ad veteres Geometras adiunxerimus recentiores Campanum, Cardanum & Candallam, & minimè inſeramus de iiſdem corporibus regularibus ſpeculationes ab Pappo Alexandrino antiquo Geometra in lucem editas; cùm omnes inchoatas ab Euclide libr. 13. ſuorum elementorum Geometricorum comparationes & meditationes illorum quinque corporum regularium, & promotas ab Iſidoro & Hypſicle, perfectiores fecerint.

Reſpondeo me non adducere in medium hoc loco ea quæ de his corporibus protulit Pappus Alexandrinus, quia eius omnes propoſitiones commentaturi ſumus in tertio tomo noſtro: adieciſſe verò particulares huius materiæ recentiorum Campani, Cardani & Candallæ, ſuperadditas conſiderationes, ad imitationem Clauij noſtri, ne aliquid ad eius perfectionem deeſſe videretur; præſertim cùm eorum opera alia vel nulla ſint, vel ſi quæ ſint, commentariis noſtris ea non ſimus illuſtraturi.

## *Argumentum libri propoſitionum Geometricarum Procli.*

LIber hic continet propoſitiones 16. Geometricas Procli, quas libro ſuo 3.& 4. commentariorum ſuorum in librum primum elementorum Geometricorum Euclidis inſeruit, ſuntque proprietates quædam angulorum, rectarumque linearum ab vno puncto extra rectam lineam dato ad illam deductarum; tum parallelarum rectarum & non parallelarum; triangulorumque; & trapeziorum; & angulorum figurarum rectilinearum planarum; denique figurarum rectilinearum ſpatium replentium circa vnum punctum.

His addidimus 13. noſtra corollaria, propoſitionem vnicam, & lemmata octo ad eundem finem.

Conſultò prætermiſimus recenſere diſcurſus huius Authoris varios de natura Mathematicarum diſciplinarum, præſertim Geometriæ; & claros Geometras, quorum mentionem facit, referre; variaſque methodos demonſtrandi nonnullas propoſitiones libri 1. Euclidis, ab illis antiquis allatas: nam Tomum integrum paratum habeo de natura Mathematices, & Authoribus & Cultoribus illius, quem Deo iuuante in publicum producemus.

Iudicauimus autem iſtas propoſitiones Procli circa elementa Geometrica Euclidiana, commentari, eaſque poſt ipſa tanquam appendices apponere.

*Argu-*

## *Argumentum Libri de immiſſione duarum rectarum linearum continuè proportionalium Geometricè, inter duas datas rectas alias lineas.*

IN hoc libro referuntur inuentiones quatuordecim, ſoluendi hoc problema vnicum quod hactenus puluerem Geometricum omnem exagitauit perturbauitque; Antiquorum quidem, Platonis, Architæ Tarentini, Menechmi, Eratoſthenis, Phylonis Bizantij, Heronis, Apollonij Pergæi, Nicomedis, Dioclis, Spori; recentiorum verò Ioannis Werneri, Ioannis Baptiſtæ Villalpandi ſeu potiùs Chriſtophori Gruenbergerij, cuius ſunt Geometrica omnia circa pondera & centrum grauitatis quæ in ſuis de Templo Salomonico commentariis congeſſit Villalpandus etiam è noſtra Societate. Inſeruimus etiam lemmata nouem ad inuentionum prædictarum demonſtrationes; è quibus deducta ſunt corollaria ſex, inter quæ duo ſunt noſtra, cum inuento poſtremo.

Notandum porrò eſt methodos iſtas omnes non eſſe ad amuſſim Geometricam, nam vel ſupponunt organa, vel attentationem, exceptâ illâ Architæ quæ ex alio capite propter impenetrabilitatem corporum ad praxim minimè reduci poteſt.

In hoc tomo elementorum primorum Geometricorum congeſſimus hoc problema, tanquam fundamentum vnicum augendi ac diminuendi corpora; ſicuti Euclides lib.6.elem. iecerat fundamentum augendi ac minuendi rectilineas figuras planas, in propoſitionibus 11.12. ac 13. ex inuentione tertiæ rectæ lineæ proportionalis, duabus datis; & mediæ inter duas; & quartæ tribus datis.

Vulgò vocari ſolet hoc problema Deliacum, vel de duplicatione Cubi: eò quòd Platonis temporibus graſſante ſæuiſsimâ lue Athenis, conſultus Apollo, reſpondiſſet ceſſaturam ſi eius ara quæ cubica erat duplicaretur; hoc refert Valerius Maximus libr. 8. rerum admirabilium. Quamquam Eratoſthenes in epiſtola ad Ptolemeum Regem, apud Eutocium in Archimedem, quendam olim tragicum Minoa induxiſſe Glauco ſepulchrum fabricantem, referentique centum pedes vndequaque patere, iniunxiſſe vt duplo maius extrueretur. Verùm Geometræ abducti ſunt, deprehendentes id fieri debere, immittendo duas rectas lineas continuè proportionales inter duas datas rectas: ſunt enim per 33.prop.lib.11.elem.ſimilia parallelepipeda, vtpotè Cubi, in triplicata ratione laterum homologorum. Conatus autem ſummorum Geometrarum circa illam immiſsionem referimus hoc libro.

COM-

# COMMENTARIVS
## IN DEFINITIONES
## LIBRI PRIMI
## ELEMENTORVM
## GEOMETRICORVM EVCLIDIS.

### I.

*Punctum eſt, cuius nulla pars eſt.*

ITA eſt illud omne in quantitate quod nullam partem habet, punctum eſt. Vnde fit vt punctum mathematicũ, ſit indiuiſibile omni modo diuiſionis, quia nullam habet partem.

### II.

*Linea verò, longitudo latitudinis expers.*

ITa vt in quantitate illud quod eſt ſolùm longitudo ſine latitudine, ſit linea. Hinc fit vt linea ſit indiuiſibilis ſecundum latitudinem quâ caret, ſed ſolùm ſecundùm longitudinem quam ſibi ex natura ſua vendicat. Alij definiunt lineam per cauſam efficientem, hac ratione, linea eſt puncti fluentis veſtigium imaginarium relictum, quæ definitio explicat aliam; Cùm enim punctum ſit expers partium, efficere nequit latitudinem, quam ipſum non habet, neque fluxus eius imaginarius: verùm quia motus & fluxus eſt ab vno ad aliud, mobile fluens hoc eſt punctum, veſtigium aliquod relinquere debet inter illos duos terminos, non latum vti diximus, ergo longum tantummodò: quare rectè definita eſt linea, longitudo latitudinis expers. Hinc fit vt ſit ſolùm diuiſibilis ſecundùm longitudinem.

### III.

*Lineæ autem termini, ſunt puncta.*

INtellige puncta duo diſtincta, quando lineæ finis diſtinctus eſt ab eius principio, vt in quacumque linea finita diuerſa ab curuis nonnullis, quæ deſinunt in eo puncto à quo ortum ſeu principium habuerunt, quarum termini ſunt quidem puncta duo in vnum coaleſcentia, & ſe mutuò penetrantia. Ex quibus intelligitur lineam abſolutè infinitam, hoc eſt nullis terminatam punctis, non pertinere ad Geometriam, cuius hæc ſunt elementa.

### IV.

*Recta linea eſt, quæ ex æquo ſua interiacet puncta.*

HOc eſt, cuius nulla pars ex intermediis & poſitis inter duo ſua extrema puncta ſubſultat vel deprimitur. Ex hac definitione intelligitur definitio alia Platonica lineæ rectæ, quæ eſt huiuſmodi, Recta linea eſt, cuius media obumbrant extrema: nam ſi omnes eius partes æqualiter ſint diſpoſitæ inter eius extrema, neceſſariò viſui vel lucido oppoſitæ, extrema ſua obumbrabunt: hinc eſt vt Architecti & Fabri viſui opponant ea quæ recta eſſe iudicare debent; ſi enim media omnia contegant extrema, obiectum viſui oppoſitum, rectum eſſe concludunt. Ex hac definitione Platonica, etiam Euclidiana declaratur: ſi enim media omnia lineæ alicuius obumbrent extrema illius, neceſſariò ex æquo iacere inter eius extrema concludendum erit. Archimedes lib. 1. de ſph. & cylindro, rectam lineam ait eſſe breuiſſimam linearum omnium eadem puncta ſeu terminos haben-

ram productæ ambæ, confluunt in partes inuicem proprias; hoc eſt vna confluit in partes productæ alterius, & altera in partes illius productæ; cuiuſmodi ſunt duæ poſtremæ AB, CB, rectæ, commune punctum B habentes; nam producta recta AB vltra B, in rectam BC confluit; & recta CB producta vltra B, in aliam BA confluit. Et non in directum iacent, quando productæ ambæ ſecundùm naturam ſuam, neutra in alterius partes confluit, ſed vel ſe mutuò ſecant, vel contingunt in aliquo indiuiſibili: quales ſunt duæ primæ AB, BC, ſuperiores.

## I X.

*Cùm autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint; rectilineus ille angulus appellatur.*

QVandoquidem Euclides non definiuit Angulum in genere, ſed ſolùm planum, videtur in hac & ſequentibus angulorum definitionibus ſemper loqui de angulo plano: quare omnia quæ dicentur in hiſce elementis de angulis, niſi addatur ſolidi anguli denominatio de quo agit in libro vndecimo, & in reliquis ſolidorum elementis cum ſuperaddito ſolidi nomine, ſemper de planis intelligemus.

Iam verò in hac definitione explicat naturam anguli plani rectilinei, dicendo illum eſſe rectilineum, ſi duæ rectæ lineæ illum conſtituentes fuerint rectæ, cuius anguli rectilinei, tres ſpecies aſſignabit in ſequentibus tribus definitionibus.

Figur. 1. Sunt & aliæ ſpecies angulorum planorum, curuilinei ſi lineæ eum efficientes fuerint curuæ: mixtilinei ſi fuerint illarum vna recta, alia curua. has non definit, quia facilè eſt eas ex iſta colligere, vel in aliis libris earum aliquas proponit, vt in libro tertio, vbi definit angulum ſegmenti, & ſemicirculum deſcribit, quem efficiunt recta ſeu chorda, & arcus circuli: Rectilinei anguli figuram habens in figura definitionis præcedentis nonæ. curuilinei in figura DEF. mixtilinei in figura GHI.

## X.

*Cum verò recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam, eos qui ſunt deinceps angulos inter ſe æquales fecerit; rectus eſt vterque æqualium angulorum: Et quæ inſiſtit recta linea, perpendicularis vocatur eius cui inſiſtit.*

DVas in hac definitione tradit Euclides definitiones, rectorum angulorum rectilineorum, & perpendicularis rectæ lineæ.

Itaque natura rectorum angulorum rectilineorum in duobus conſiſtit: primùm vt recta linea alteri rectæ inſiſtat; Alterum, vt angulos deinceps æquales interſe efficiat. Figur. 2. Exemplum habes in figura in qua recta linea EB conſiſtens ſupra aliam rectam ABC, in puncto B, efficiensque angulos qui ſunt deinceps EBA, EBC, æquales; recti erunt iſti duo anguli, vel vterlibet rectus erit.

Perpendicularis autem recta linea alteri rectæ natura in eo conſiſtit, vt angulos deinceps, hoc eſt angulos ex vtraque parte, cum ea recta cui inſiſtit, æquales inter ſe faciat. Exempli gratia in eadem figura. Recta linea EB inſiſtens ſupra rectam ABC in puncto eius B, efficiensque angulos EBA, EBC, deinceps, vel ex vtraque parte æquales inter ſe, perpendicularis vocabitur. Quod ſi aliqua recta linea alteri rectæ inſiſtens, hos angulos deinceps minimè æquales inter ſe fecerit; neuter horum angulorum rectus erit; neque recta linea inſiſtens alteri, perpendicularis erit ei rectæ cui inſiſtit: quomodo verò vocandi ſint illi anguli, explicabit in duabus ſequentibus definitionibus. Et quia recta linea cui inſiſtit alia recta angulosque deinceps cum ea æquales efficiens, conſiderari poteſt inſiſtere ipſi alteri; etiā perpendicularis ipſi inſiſtenti nuncupari poterit: relatiue enim ſunt illæ duæ rectæ, & ſingulæ perpēdiculares ſibi inuicem ex hac definitione vocitari poſſunt.

Monebimus hoc loco vnum ſemper retinendum in Geometria. Videlicet in deſignatione linearum adhiberi characteres Aphabeticos diuerſos in earum extremis; quia cùm in figurationibus multæ lineæ ducantur, ne vacillet imaginatio quænam inter illas aſſumatur, determinabitur ſi per characteres in extremis ſuis adhibitos diuerſos ab aliis in aliarum linearum extremis poſitos, nominetur; tunc enim ſeparatur ab aliis, & de illa ſola, non autem aliis lineis ſermonem eſſe concludit Auditor aut Lector. Sic etiam in deſignatione angulorum tres characteres adhibentur; duo extremi quidem, deſignantes extrema duo linearum duarum efficientium angulum, minimè communia; medius vero character indicans commune punctum ſeu extremum duarum illarum linearum, in quo conſiſtit anguli de quo eſt ſermo initium: quia etiam in figuris ſæpenumerò diuerſi inſunt anguli; quare vt ambiguitas in lectore & Auditore tollatur, de quo angulo tractetur, rectè illis tribus characteribus vtuntur Geometræ: multoque clarior & ſuccinctior, & vniuerſalior eſt huiuſmodi characterum vſus, quàm radij aut indices alterius lineas

illas & angulos exprimentis. Itaque in exemplis allatis vides rectam EB inſiſtentem alteri ABC rectæ, indicari characteribus extremis E, B; & rectam cui inſiſtit, appoſitè determinari, aliis characteribus A, B, C; punctumque commune illis, B charactere exprimi: Angulumque EBA, EBC, diſtingui ſuis propriis characteribus extremis, EA, EC, licet angulorum illorum initium B communi charactere notetur medio; quia punctum illud B commune eſt illis rectis lineis; Et licet etiam E character communis ſit, ob rectam EB communem illis duobus angulis; quia per illos tres characteres ſimul ſumptos ſinguli anguli determinantur EBA, EBC. Quod ſi vnica eſſet tantùm linea, aut multæ ſeparatæ figuras non conſtituentes, poſſent ſingulæ vnico charactere deſignari: Tum etiam ſi eſſet vnus ſolùm angulus, vel multi ſeparati nihil commune habentes inter ſe, & cum aliis, poſſent etiam ſinguli ſeorſim vno ſigno denotari & appellari. quis mos apud Geometras eſt vſitatus.

Figur. 2.

## X I.

*Obtuſus angulus eſt, qui recto maior eſt.*

Figur. 2. Exempli gratia, Angulus rectilineus DBC, recto EBC maior quia eum continet, dicetur obtuſus.

## X I I.

*Acutus verò, qui minor eſt recto.*

Figur. 2. Exempli gratia. Quilibet angulorum rectilineorum ABD, DBE, erit acutus, quia quilibet eorum eſt minor recto EBA.

Aduerte anguli plani naturam non pendere ab longitudine ſeu productione linearum cum conſtituentium, vel ab decurtatione, aut breuitate; ſed ab diuaricatione earum ab inuicē: Si enim æqualiter ab inuicem ſeparantur illæ lineæ, æquales angulos efficiēt; ſi inæqualiter inæquales: (quæ autem ſit menſura illius diuaricationis linearum angulos conſtituentium planos rectilineos, non eſt huius loci explicare; cùm enim dependeat ex arcubus circuli deſcripti puncto anguli vt centro, & natura circuli non ſit explicata; ideò negotium hoc remittimus ad explicationem propoſ. 23. in cuius fabrica circuli arcus adhibentur ad anguli rectilinei æqualis alteri angulo rectilineo conſtitutionem.)

Itaque ſufficiat Angulorum trium rectilineorum naturam, recti, obtuſi, & acuti explicaſſe.

## X I I I.

*Terminus eſt, quod alicuius extremum eſt.*

In quantitate continua, omne extremum eius, terminus eſt; & omnis eius terminus, extremum eius eſt. Ex hac definitione conſtat duo extrema puncta alicuius lineæ eſſe eius terminos: & ſuperficiei extremas lineas, eſſe eius terminos: quandoquidem definitione 4. lineæ terminos eſſe puncta dictum eſt; & definitione 6. ſuperficiei extrema, lineas eſſe pronuntiatum eſt.

## X I V.

*Figura eſt, quæ ſub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.*

De naturâ figuræ eſt, vt vndequaque comprehendatur & concludatur termino aliquo vno, vel multis. Quare duæ rectæ lineæ angulum efficientes figuram non efficient, quia diuaricatæ, ab inuicem ſemper recedunt, & ex parte oppoſita angulo quem conſtituunt non recurrunt ad ſeipſas, & nihil circumcludere ex illa parte poſſunt, vt explicabitur axiomate 14.

Geometræ ſpatij nomen ſæpè vſurpant pro figura; ita vt ſpatium & figura idem ſignificent.

Sunt multa genera figurarum; planarum quæ in plano; ſolidarum quæ præter longitudinem ac latitudinem ſibi vendicant profunditatem vel altitudinem. Planarum etiam aliæ ſunt rectilineæ quæ rectis concluduntur lineis: aliæ curuilineæ quæ curuis: aliæ mixtilineæ quæ rectis & curuis. Aliæ etiam ſunt quæ in ſuperficie curua aut aliis diuerſis ab plano deſignantur. In horum elementorum ſex primis libris ſermo ſolùm eſt de figuris planis; in vndecimo & reliquis 12. 13. 14. 15. 16. de ſolidis tractatur figuris.

Ex hac definitione conſtat omnem ſuperficiem eſſe figuram vel ſpatium, quia cùm ſuperficiei extrema ſint lineæ, & omnis ſuperficies geometrica ſit finita, ergo concluſa vndequaque terminis, ipſa erit figura ſeu ſpatium.

## X V.

*Circulus, eſt figura plana ſub vna linea comprehenſa, quæ peripheria, (hoc eſt circumferentia) appellatur; ad quàm ab vno puncto eorum quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ, inter ſe ſunt æquales.*

Ariſtoteles libr. 1. quæſtionū mechanicarum, initio deſcribit circulum per

cauſam efficientem; dicit eſſe veſtigium relictum in plano ab recta linea reuoluta circa vnum ſuum extremum immobile, quando redit extremum eius punctum ad punctum plani è quo priùs mota fuerat: neceſſe enim eſt hoc extremum lineæ pūctum veſtigio ſuo deſcribere lineam concludentem ac terminantem aream circuli internam, quæ linea concludens circumferentia circuli eſt, ad quam omnes rectæ lineæ eductæ ab illo puncto immobili prædicto æquales erunt inter ſe, nimirum ei quæ circulum effecit. Itaque ſecundùm primam definitionem vt oſtendatur figura plana eſſe circularem, oportebit probare vnicam habere lineam ipſam figuram terminantem, & omnes rectas lineas ductas ab vno puncto eorum quæ intra ipſam ſunt ad hanc lineam terminantem, eſſe æquales inter ſe. quamquam ſufficiat probare hoc poſtremum, in figuris planis. ex quo ſequitur primùm; nulli enim alteri figuræ planæ competit, vt omnes rectæ lineæ ab vno puncto interno earum ductæ ad extremum vel extrema illius, ſint æquales inter ſe. Quòd ſi ſermo ſit de figuris in vniuerſum, quia hoc poſtremum ſphæræ competit, non autem primum, primùm etiam oſtendi debetin figura vt probetur eſſe circulus. Ex definitione Ariſtotelica ſequitur circumferentiæ circuli partes, & puncta ſemper in ſua effectione, aſcendere, vel deſcendere reſpectu lineæ rectæ veſtigij concepti in plano relicti antequam moueretur ipſa, circumferentiam circuli efficiendo.

Hæc definitio poſterior rectè conuenit effectioni circuli per circinū, cuius vnum crus fixum in puncto ſeu centro immobili, extremum eius congruens huic puncto immobile etiam eſt; & aliud crus diductum & plano impoſitum terminat ſuo extremo lineam rectam concipiendam ab hoc extremo ad aliud alterius cruris immotum: Et quando reuoluitur crus remotum citra punctum extremum alterius cruris immotum, concipienda recta dicta linea reuolui circa punctum ſuum extremum vnum immobile, altero motu congruente cum extremo cruris mobilis, ac deſcribente ſuo motu circumferentiam circuli.

## X V I.

*Hoc verò punctum, centrum circuli appellatur.*

Videlicet punctum A; ex quo ductæ omnes rectæ lineæ ad circumferentiam circuli ipſius, ſunt æquales inter ſe, centrum circuli dicitur.

Verum ad demonſtrandum de puncto aliquo interno circuli concluſo intra eius arcam, quod ſit cēṭrum circuli, non oportebit probare omnes rectas lineas ductas ab eo ad circumferentiam circuli, æquales eſſe, ſed ſolùm plures quàm duas, vti propoſ. 9. lib. 3. aſſerit Author atque probat; ſolumque ſequitur ex natura circuli & centri, vt omnes rectæ lineæ ab centro circuli ductæ ad circumferentiam eius, ſint æquales inter ſe.

Aduerte ſæpenumerò vſurpari metaphoricè nomen circuli definiti pro circumferentia eius; imò Authorem ipſum ſic ſumere in tertio libro multis propoſitionibus.

Tàm circulus, quam centrum eius, ſic breuiter definiri poſſunt. Circulus eſt figura plana, cuius terminus vnicus ab vno puncto eorum quæ intra ipſā ſunt æquè diſtat rectis æqualibus lineis. Quòd ſi ſumatur circulus pro circumferentia eius, ſic definietur, eſt linea vnica plana, æquidiſtans vndequaque ab vno puncto ipſius plani. Centrum verò circuli, eſt punctum plani circuli æquidiſtans ab circumferentia ipſius circuli rectis lineis æqualibus.

## X V I I.

*Diameter autem circuli, eſt recta linea per centrum ducta, ex vtraque parte in circuli circumferentia terminata, quæ circulum biſariam ſecat [Semidiameter verò circuli erit, recta linea è centro circuli ad circumferentiam eius educta.]*

Dvo requirit recta linea quæ diameter circuli eſſe debet, primùm vt tranſeat per centrum circuli: alterum vt terminetur vtrimque in circumferentia ipſius circuli: qualis eſt linea D A B recta, incedens per A centrum circuli, & terminata vtrimque in B, & D, punctis circūferentiæ circuli. Recta verò GH, licet in G & H, terminetur vtrimque in circumferentia circuli, tamen quia non tranſit per A centrum eius, diameter dici non debet. Etiam rectæ IAK, IKB, licet tranſeant per A centrum circuli, quia verò prima non attingit circumferentiam circuli vllis ſuis extremis I, K; & ſecunda vno extremo I ſuo non attingit ipſam circumferentiam, licet alio B attingat; diametri circuli non erunt. Notandum verò rectam GH, & etiam diametrum DAB, vocati ab Geometris chordam arcuum circuli quibus ſubtenditur. *Figur. 3.*

Ex hac definitione expungerem libenter vltimam particulam additam ab Euclide, quæ circulum biſariàm ſecat, nam ſuffi it primā,

prima, & hæc minimè neceſſaria videtur, probarique poteſt ex ſequenti definitione 18. Quoad definitionem ſemidiametri, quæ à pleriſq; Geometris radius appellari ſolet, nihil eſt quod explicari debeat, cùm ſit clariſſima, cùm ſit ſemiſſis diametri, ideoque dicatur ex centro exire,& terminari propterea ex vna ſolùm parte in circumferentia ipſius circuli. niſi dicatur quod circulus bifariam ſecatur conſequenter ab diametro ſua, quæ ex etymo nominis ſui quantitates quarum eſt diameter, in duas partes æquales ſecat; vſurpant verò Geometræ nomen diametri in aliis figuris rectilineis & aliis: tunc enim maioris claritatis ergo adduntur illæ poſtremæ particulæ, quæ circulum bifariam ſecat. hanc diametri proprietam inueniſſe Thaletem teſtis eſt Plin. libr. 2. cap. 12.

## X V I I I.

*Semicirculus verò eſt figura qua continetur ſub diametro, & ſub ea linea qua de circuli circumferentia aufertur.*

VT in eadem figura ſuperiore ſemicirculus erit DCB, comprehenſus ab diametro BAD, & parte BCD circumferentiæ totius circuli. Poſita ergo iſta definitione ſemicirculi, demonſtrabo diametrum BAD circuli, bifariam diuidere totum circulum: nam per hanc definitionem ſemicirculus erit, id eſt, dimidia pars totius circuli prædicti
*Figur.* 3. erit, tam BCD, quàm BED, partes duæ circuli totius dimidiæ: ergo per diametrum BAD; in duas ſemiſſes partes diuiditur circulus DCBE. Proclus in libr. 1. horum elem. Thaletem Mileſium refert probantem diametrum circuli ipſum ſecare in duas partes æquales aſſumendo ſuperpoſitionem mentalem, & totum eſſe maius ſua parte, & quæ congruunt ea eſſe æqualia. Itaque in eadem figura ſi concipiamus animo ſemicirculum BCD, ſuperponi circulo BED, immanente diametro BAD; vel tota pars BCD circumferentiæ, congruet toti parti BED alteri eiuſdem circumferentiæ; vel aliqua eius pars non congruet cadendo ſuprà vel infrà aliam: ſi ſecundùm, poterimus ducere ab centro A immobili rectam lineam ſecantem arcus circumferentiæ non congruentes; eruntque duæ ſemidiametri eiuſdem circuli quæ ex natura circuli debent eſſe æquales; inæquales, videlicet vna pars erit alterius: vel pars æqualis erit toti quod eſt abſurdum, cõgruent igitur duæ illæ partes adæquatè totius circuli factæ ab diametro circuli, ergo erunt æquales inter ſe per axioma etiam notum. Et ſic tam plana ſemicirculorum eiuſdem circuli, quàm circumferẽtiæ totius partes BCD, BED, erunt æquales inter ſe oſtenſæ.

## X I X.

*Rectilinea figura ſunt, qua ſub rectis lineis continentur.*

CONtentæ igitur figuræ ſub curuis lineis vel curua vna linea, curuilineæ vel curuilinea vocabuntur. Et ſi quædam rectæ illas terminent & aliæ curuæ ſimul, mixtilineæ ideò dicentur illæ huiuſmodi figuræ.

## X X.

*Trilatera quidem qua ſub tribus.*

EVclides figuras planas rectilineas vt plurimum denominat ab laterum, & angulorum numero, vt hoc loco trilateram figuram, ab numero ternario laterum ſeu linearum rectarum ipſam concludentium, quam figuram trilateram poſtmodum ferè ſemper triangulum appellabit, quòd non definit. Sed poſſumus dicere Triangulum de quo agit Euclides in hiſce elementis, eſſe figuram planam rectilineam, rectilineos angulos tres tantummodò continentem.

Bilaterarum figurarum rectilinearum, & biangularum rectilinearum, nullam facit mentionem, quia impoſſibiles ſunt per axioma decimum quartum, negans duas rectas ſpatium ſeu figuram comprehendere.

Quare rectilinearum figurarum planarum prima erit, Trilatera, ſeu Triangularis.

## X X I.

*Quadrilatera quidem, qua ſub quatuor.*

## X X I I.

*Multilatera autem, qua ſub pluribus quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.*

EVclidem ſolùm agere de figuris rectilineis, etiamſi in definitione trilateræ & quadrilateræ non apponat denominationem rectilineæ, manifeſtum eſt, ex particulis, quidem, repetitis, quæ coniungunt ſequentes definitiones illas cùm præcedente definitione vniuerſali rectilinearum figurarum, quarum ſpecies ſunt trilateræ & quadrilateræ. Porrò ſpecies multilaterarum ſuprà quadrilateras, diuerſæ erunt pro numero laterum maiore quàm quatuor, quæ denominationem ſument ab numero illo laterum, vt quinquelateræ, ſexilateræ, ſeptilateræ, &c. in infinitum

tum: de quibus aget in libro quarto, vel ab numero angulorum, vt quinquangulæ, ſexangulæ, ſeptangulæ, &c.

XXIII.

*Trilaterarum autem figurarum, Æquilaterum eſt Triangulum, quod tria latera habet æqualia.*

XXIV.

*Iſoſceles autem, quòd duo tantum æqualia habet latera.*

XXV.

*Scalenum verò eſt, quod tria habet latera inæqualia.*

Figur. 4. IN hiſce tribus definitionibus explicat tres ſpecies triangulorum, ſeu figurarum trilaterarum, ratione laterum æqualium omnium, aut duorum dumtaxat, vel inæqualium trium. ABC eſt æquilaterum. DEF iſoſceles. GHI ſcalenum.

XXVI.

*Ad hæc etiam, Trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.*

XXVII.

*Obtuſangulum autem, quod obtuſum angulum habet.*

XXVIII.

*Acutangulum verò, quod tres acutos habet angulos.*

HIſce poſtremis tribus definitionibus tres alias triangulorum, vel figurarum trilaterarum profert ſpecies, ratione angulorum, recti, obtuſi, & acutorum trium. Notandum eſt rectangulum triangulum vocari
Figur. 4. orthogonium, obtuſangulum dici amblygonium, acutangulum apellari oxygonium ex vocabulis græcis. Rectangulum erit LMN ob angulum rectum M. Obtuſangulum GHI ob angulum GHI obtuſum. Acutangulum DEF ob tres angulos acutos.

XXIX.

*Quadrilaterarum autem figurarum. Quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum & rectangulum eſt.*

Figur. 5. QVæcumque figura quadrilatera rectilinea habuerit quatuor ſua latera æqualia inter ſe, & quatuor ſuos angulos rectos; illa erit quadratum, vt ABCD.

Aduerte in hac definitione & ſequenti rectanguli epithetum ſumi pro omnibus angulis figuræ rectis, non autem in definitione 26. in qua vnus ſolus rectus angulus requiritur, vt triangulum vocetur rectangulum.

XXX.

*Altera vero parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, at æquilatera non eſt.*

IN hac definitione ſupponit genus quadrilaterarum figurarum, & negatio naturæ æquilateræ ſumenda eſt hac ratione, vt quatuor omnia latera non ſint æqualia inter ſe, licet duo oppoſita ſint ac debeant eſſe æqualia. hanc figuram refert EFGH. Figur. 5.

XXXI.

*Rhombus autem, quæ æquilatera, ſed rectangula non eſt.*

IN hac & ſequenti definitione, ſupponit vt in præcedente genus quadrilaterarum figurarum. Sed in hac nomen æquilatera, ſumitur pro quatuor lateribus æqualibus. Huiuſmodi figura eſt IKLM. Figur. 5.

XXXII.

*Rhomboides verò, quæ aduerſa & latera & angulos habens inter ſe æquales, neque æquilatera eſt, neque rectangula.*

NEgat in rhomboide æqualitatem quatuor eius laterum, & rectitudinem angulorum: ſed adſtruit duos oppoſitos eius angulos eſſe æquales, & duos alios angulos oppoſitos etiam inter ſe æquales; tum quælibet eius duo latera oppoſita eſſe æqualia. Rhomboidem figuram vide NOPQ. Figur. 5.

XXXIII.

*Præter has autem, reliqua quadrilatera figura, Trapezia appellantur.*

HOc eſt quibus nulla ex illis definitionibus allatis quadrilaterarum figurarum competit. Poteſt verò hac ratione deſcribi per negationes. Quæ æquilatera non eſt, neque rectangula, neque angulos oppoſitos habet æquales, neque oppoſita latera. Eo quòd æquilatera non ſit, non poteſt quadratum neque rhomous, quæ æquilatera ſunt: Quia re- Figur. 5.

ſtangula non eſt differt ab quadrato, & altera parte longiore figura, quæ rectangula ſunt: Denique quia nulla oppoſita latera obtinet æqualia, & nullos angulos oppoſitos æquales, non poteſt dici rhomboides; quæ iſta exigit R S T V.

Itaque quadrilaterarum figurarum quinque ſunt ſpecies, intelligendo vti par eſt in genere rectilinearum, Quadratum, Altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, & Trapezium.

## X X X I V.

*Parallelæ rectæ lineæ ſunt, quæ cùm in eodem ſint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuò incident.*

PArallelarum rectarum linearum natura exigit tres conditiones. Primam vt ſint in eodem plano. Alteram, vt ex vtraque parte productæ ambæ in infinitum concipiantur. Tertiam, vt nunquam ſibi mutuò incidant. Has parallelas rectas lineas vocant alij Æquidiſtantes, vt AB, CD. Figur.6.

Hæ ſuperiores definitiones tribuuntur Euclidi. Duæ ſequentes adduntur ab Commentatoribus eius, quia figurarum huiuſmodi mentionem facit Euclides in hoc primo libro ſuo, earũque definitiones deſiderabantur.

## X X X V.

*Parallelogrammum, eſt figura quadrilatera, cuius bina oppoſita latera ſunt parallela ſeu æquidiſtantia.*

ITaque ſi de figura aliqua quadrilatera v.g. ABCD, probentur latera oppoſita duo AB, CD, eſſe parallela; tùm alia duo AD, BC eſſe inuicem parallela: ipſa erit parallelogrammum, ſiue ſit rectangula vel non rectangula. de huiuſmodi figuris agitur præcipuè in hoc primò libro, & ſecundò. Quamquam etiam multilateræ aliæ figuræ ſint parallelogrammæ in plano deſcriptæ; vnde non videtur hæc definitio vniuerſalis quæ ad ſolas quadrilateras ab Authoribus nonnullis reſtringitur. Vt igitur ſit vniuerſalis demenda eſt particula, quadrilatera. Figur. 5.

## X X X V I.

*Cùm vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus parallelæ ſecantes diametrum in vno eodemque puncto, ita vt parallelogrammum ab hiſce parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma: appellantur duo illa, per quæ diameter non tranſit, complementa; duo verò reliqua per quæ diameter incedit, circa diametrum conſiſtere dicuntur.*

EXempli gratia in parallelogrammo ABCD, diameter AC ducta ſit & duæ rectæ lineæ EFG, HGI, ſecantes in G puncto eodem diametrum AC, ita vt prima EGF ſit parallela lateribus AD, BC, oppoſitis dati parallelogrammi, & ſecunda HGI, ſit parallela aliis duobus lateribus oppoſitis AB, DC: tunc diuidetur totum datum parallelogrammum in quatuor parallelogramma, AEGH, GICF, EBIG, HGFD; duoque prima enumerata vocabuntur circa diametrum, quia diameter AC per illa tranſit; alia verò duo poſtrema per quæ non incedit diameter AC, dicentur complementa, quia cum illis primis duobus complent totum datum parallelogrammum. Ex quo intelligitur quid ſit in quantitate complementum, & complementa: Complementum enim eſt id quòd cum alio complet aliquid: & Complementa ſunt ea quæ cum alſo vel aliquibus complent aliquod totum. Figur.7.

## X X X V I I.

[ *Æquales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales vel quorum ex centru recta linea, ſeu ſemidiametri ſunt æquales.* ]

EXempli gratia circulus ABCD cuius centrum E; & circulus FGHI, cuius centrum K, erunt æquales; ſi diametros AEC, FKI habent æquales; vel ſemidiametros AE, FK, et ſi circuli illi ſint æquales, habebunt diametros æquales, vel ſemidiametros æquales: quia definitio ac definitum conuertuntur. Figur.8.

## X X X V I I I.

[ *Maiores circuli ſunt, qui habent maiores diametros, vel ſemidiametros: & minores circuli ſunt, qui habẽt minores diametros, vel ſemidiametros.* ]

VT circulus LON maiorem habens diametrum LMN, vel ſemidiametrum LM, reſpectu circuli FGI minorem habentis diametrum FKI, vel ſemidiametrum FK; maior erit quàm circulus FGI. Et contra Figur.8.
quia

quia circulus LON maior eſt circulo FGI, maiorem habebit diametrum LMN, vel ſemidiametrum L M, quàm circulus minor FGI, quia definitio ac definitũ conuertuntur.

XXXIX.

[*Inæquales circuli inæquales habent diametros vel ſemidiametros; maior maiorem; minor minorem.*

HÆc definitio clara eſt ex dictis in ſuperiore definitione. Porrò has tres poſtremas addidimus conſultò facientes ad multarum propoſitionum demonſtrationes huius primi libri: primamque ex his tribus mutuati ſumus ex libro tertio Authoris, duaſque alias ab Commentatoribus illius libri. Neque proptereà reprehenſione vlla digni ſumus, quia definitiones cùm non demonſtrentur, ſed aſſumantur naturam ſubiecti explicantes, quælibet cuiuſcumque libri vltimi aſſumi poteſt in quocumque alio antecedente modò termini ſint manifeſti.

# COMMENTARIVS
## IN PETITIONES
### SIVE POSTVLATA
## LIBRI PRIMI
## ELEMENTORVM
### GEOMETRICORVM EVCLIDIS.

I.

*Poſtuletur, vt à quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.*

II.

*Et rectam lineam terminatam, in continuum rectà producere.*

EXEMPLI gratia ſit datum punctum A, & punctum B: quis neget rectam lineam AB, nectentem illa duo puncta, duci poſſe per intellectum? cùm rectæ lineæ extrema duo ſint
Figur. 9. puncta, ex definitione 3. Similiter ex eodem puncto A ad aliud punctum C, quòd non ſit in directum puncti B, rectæ AB, aliam rectam AC duci poſſe? Præterea quis neget rectam AB terminatam, produci poſſe in continuum vltrà B, vſque ad D; & ſic deinceps in infinitum ſyncathegorematicè vltrà quoduis eius extremum.

III.

*Item quouis centro, & interuallo circulum deſcribere.*

QVis inficias ibit, ex nota circuli natura deſcripta ab Ariſtotele 1. mechanicarum quæſtionum cap. circulum deſcribi poſſe: concipi enim poteſt quæuis recta linea, hoc eſt interuallum Euclidis, circa vnum extremum immobile reuolui ſuprà planum integrè, ſic enim altero ſuo extremo circuli circumferentiam deſcribet.

Commentatores Euclidis diuerſi hoc ſequens poſtulatum ſuperaddunt. Et nos aliud quintum & ſextum conferentia ad expungen-ad Tyronum dubia multa adiungemus.

IV.

*Item, quacumque magnitudine data, ſumi poſſe aliam magnitudinem maiorem, vel minorem,* [*vel concipi; imò & æqualem.*]

QVi naturam quantitatis finitæ quæ obiectum eſt Geometriæ nouerit, hoc vl-

trà

trà poſtulatum concedet: nam continuò quælibet quantitas augeri & augeri in infinitum ſyncathegorematicè poteſt; & in infinitum minui eodem modo: ergò quælibet quantitas data, patietur aliam dari maiorem & maiorem ipſa, & minorem eiuſdem ſpeciei; linea lineam maiorem vel minorem, ſuperficies ſupperficiem, ſolidum ſolidum: neque repugnat concipi æqualem cuicumque datæ quantitati, cùm ſit affectio vti præcedentes ad quantitatem pertinentes.

V.

[ *Quantitates, & ea quæ ad quantitatem pertinent, ſuperponi poſſe inuicem per intellectum, ſi prout debent ſumantur.* ]

VT punctum puncto, lineæ lineæ, ſuperficies ſuperficiei. Nihil enim repugnat, cùm nihil de ſua naturâ deperdant in huiuſmodi ſuperpoſitione: quæ mirum in modum conducit ad cognoſcendam æqualitatem vel inæqualitatem inter quantitates comparabiles.

VI.

[ *Quantitates poſſe concipi moueri ſecundùm ſe totas, vel circa aliquid ſui immobile.* ]

VT rectam lineam moueri circa vnum ſuum immobile extremum: Vel ſuperficiem aliquam, circa vnum aliquod ſuum punctum, vel lineam immobilia. Vel denique quodlibet quantum poſſe transferri per intellectum ex vno loco in alium quòd ſine motu fieri nequit totalis mobilis quanti, ſi locus ad quem differat ab loco à quo. In hac porrò tranſpoſitione nihil deperdi de quantitate docebimus axiomate 30.

# COMMENTARIVS
## IN AXIOMATA
## ſeu Pronuntiata, ſeu Dignitates, ſeu communes animi notiones
# LIBRI PRIMI
## ELEMENTORVM
## GEOMETRICORVM EVCLIDIS.

I.

*Quæ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.*]
*Et quod vno æqualium maius eſt, aut minùs; maius quoque eſt, aut minus altero æqualium.*
*Et ſi vnum æqualium maius eſt, aut minus magnitudine quapiam; alterum quoque æqualium eadem magnitudine maius eſt aut minus.*
*Et quæ ſunt æqualibus æqualia, ſunt inter ſe æqualia.*
*Et ſi vnum eſt maius altero, & hoc alterum maius tertio, & ita deinceps; primum aſſumptum erit maius vltimo.*
*Et ſi vnum ſit minus altero, & hoc alterum minus tertio, & ita deinceps, primum aſſumptum erit minus vltimo.* ]

PRIMVM hoc axioma multas habet partes, & faciles intellectu ei qui leuiſſimè ſciat comparare quantitates: quare ne longiores ſimus exemplis abſtinemus, vt etiam in nonnullis conſequentibus.

II.

*Et ſi æqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt æqualia.*

III.

*Et ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur ſunt æqualia.*

IV.

## I V.

*Et ſi inæqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt inæqualia.*

*Et ſi inæqualibus inæqualia adiecta ſint, maiori maius, minori minus; tota ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.*

## V.

*Et ſi ab inæqualibus æqualia ablata ſint; reliqua ſunt inæqualia.*

*Et ſi ab inæqualibus æqualia ablata ſint, à maiori minus, & à minori maius; reliqua ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.*

## V I.

*Et quæ eiuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.*

*Et quod vnius æqualium duplum eſt, duplum eſt & alterius æqualium.*

*[ Et quod eiuſdem triplum vel quadruplum, & ſic deinceps multiplex eſt; triplum, vel quadruplum, & ſic deinceps multiplex eſt alterius æqualium.*

*Et quæ eiuſdem triplicia, quadruplicia, & ſic deinceps multiplicia ſint; inter ſe ſunt æqualia.*

Hæc etiam non ſolùm reſpectu eiuſdem ſed etiam æqualium vera ſunt.

## V I I.

*Et quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe ſunt æqualia.*

*[ Et contra, duo quæ æqualia ſunt reſpectu eiuſdem totius, eiuſdem ſunt dimidia.*

*Et quæ æqualium, ſunt dimidia, inter ſe ſunt æqualia.*

*Et duo quæ æqualia ſunt reſpectu multorum æqualium tanquam totorum, eorumdem ſunt dimidia.*

*Et quæ eiuſdem vel æqualium ſunt partes tertia vel quarta, vel qualibet alia, inter ſe ſunt æqualia.*

*Et tria vel quatuor & ſic deinceps plura quocumque numero, quæ æqualia ſunt reſpectu eiuſdem totius tanquam partes, vel æqualium totorum multorum; eiuſdem totius vel æqualium totorum ſunt partes tertiæ, quartæ, vel quolibet alio numero vti prius.*

*[ Et illud totum, vel tota illa, ſunt dupla, vel tripla, &c. illarum partium æqualium dictarum duarum, trium, &c. ]*

## V I I I.

*Totum ſua parte maius eſt.*

*[ Vel contentinens maius contento. ]*

## I X.

*Et quæ ſibi mutuò cõgruunt, ea inter ſe ſunt æqualia.*

*[ Et quantitates quarum extrema diuiſibilia omnia congruunt, tota congruunt, & ſunt æquales. Rectæ lineæ æquales congruunt. Anguli rectilinei æquales congruunt. Circuli æquales congruunt. Arcus circulorum æqualium æquales, congruunt. Figuræ omnes rectilineæ æquilateræ & æquiangulæ congruunt, ] & ſunt æquales.*

CONgruere quantitates eſt, mente ſuperpoſitæ extrema extremis, adæquari perfectè; quæ autem perfectè adæquantur, quis neget eſſe æquales? Ea igitur quæ congruunt, æqualia eſſe declaratum eſt. Nos verò quantitates aliquas æquales proferimus, quas congruere oſtendemus, poſtquam oſtenderimus quantitates totas congruere, ſi earum omnia extrema congruant. Cùm tota adæquatio quantitatum ſit penes extrema quæ continent figuras, certè ſi congruant extrema omnia quantitatis vnius diuiſibilia, vt ſunt lineæ, & ſuperficies, non autem puncta ſola, quæ indiuiſibilia ſunt omni modo: totæ quantitates concluſæ illis terminis diuiſibilibus congruent, ideoque per axioma Euclidis æquales erunt. Prima eſt, vt omnes rectæ lineæ *Fig.10.* æquales congruant. Sit recta linea AB, rectæ CD æqualis; & per petitionem 5. intelligatur extremum C extremo A ſuperpoſitum, & extremum D ſuperpoſitum extremo B: In hac ſuperpoſitione, vel tota linea recta CD æqualis data rectæ AB, adæquabitur; vt in prima figura; tunc verò congruent, ex allata definitione vocis congruere. Vel non adæquabitur, ita vt aliqua pars rectæ CD, nimirum CE adæquetur parti AE, rectæ AB, vt in ſecunda figura; alia verò pars EFB, rectæ CD, non adæquatur parti EB, rectæ AB, aberrando ab illa parte EB, ſurſum vel deorſum; tunc verò recta linea data CEFD & recepta ab aduerſario, deſinet eſſe recta ex hac poſitione, nam ex æquo non iacebit inter ſua puncta C & D conuenientia cum punctis A & B extremis rectæ datæ AB; quia ſubſultant alia eius puncta & partes, inter E & B, ſupra extrema C & D, vel A & B: vel ſi non ſubſultant illa puncta & partes rectæ CD, ſubſultabunt alia huiuſmodi rectæ AB inter puncta ſua extrema A & B. Hæc abſurda deducentur multò magis ab caſu tertiæ figuræ, ſi dicatur tota recta CED non congruere vel adæquari rectæ AB, extremis exceptis. Longè ergo magis abſona erit poſitio aduerſarij dicentis in prædicta ſuperpoſitione rectarum æqualium AB, CD, congruentibus earum extremis quia ſunt ex omni

Digitized by Google

omni parte indiuiſibilia, rectas lineas ſecundùm partes & puncta ſua media non congruere adæquatè: Contra dicens ergo illi poſitioni ſecunda pars huius axiomatis in lineis rectis æqualibus, vera erit ac declarata. Dicet effugiendo aduerſarius in hac ſuperpoſitione, punctum quidem C rectæ CD, congruere puncto A rectæ AB, & nihil rectarum AB, & CD, ſubſultare ſuprà aliam vel infrà; ſed punctum D rectæ CD, eſſe in directum rectæ AB, vltrà B, vt in DD, quartæ figuræ. Ex hoc effugio aduerſarius incidit in maius abſurdum; nam ex hac poſitione ſequitur rectam C DD, datam æqualem rectæ AB, eſſe inæqualem & maiorem per antecedens axioma 8. quæ ſe mutuò deſtruunt. Nullum igitur effugium, manetque firma veritas huius partis.

*Fig.* 11. Secunda eſt, vt omnes anguli rectilinei æquales, congruant. Sit angulus ABC, æqualis angulo DEF: & per petitionem 5. intelligatur punctum anguli E, puncto anguli B ſuperponi, & rectam ED ſuperponi rectæ BA, quas concipere poſſumus æquales, & tunc per primam explicatam congruent. Iam verò aut recta EF efficiens angulum DEF æqualem angulo ABC, in iſta ſuperpoſitione, non diuaricata magis, nec magis inclinata ad rectam DE, congruet cum recta BC; vel ab puncto B & E cadet ſuprà rectam BC, aut infrà illam. Si primùm, anguli illi ABC; DEF dati æquales congruent: ſi ſecundùm, angulus ABC continebit angulum DEF, ſi recta BF cadat ſuprà rectam BC; vel continebitur ab angulo DEF, ſi recta BF cadat infrâ rectam BC; ergo contra antecedens axioma totum & pars erunt æqualia: abſurdum hoc conſequens indicat falſum eſſe antecedẽs vnde deductum eſt, videlicet rectam EF cadere infrà vel ſuprà rectam BC: non recedet igitur ab recta BC; quare congruent dati anguli rectilinei æquales.

*Fig.* 12. Tertia pars eſt, vt circuli æquales congruant: Sit circulus ABC, centrum habens D, æqualis circulo EFG, centrum habenti H: & per petitionem 5. intelligatur centrum H circuli EFG, ſuperponi centro D circuli ABC: in hac ſuperpoſitione ſi circumferentia EFG non congruat circumferentiæ ABC, vel tota cadet extra illam, vel tota intra illam vt in prima figura: vel partim intra, partim extra vt in figura ſecunda: vel partim congruet, partim non congruet, vt in tertia figura. Si primùm, ex centro communi D, H, ducta recta linea ad exteriorem circumferentiam ſecabit interiorem; & nihilominus per def. 37. æquales erunt ſemidiametri DB, HE, circulorum datorum æqualium ABC; EFG, totum & pars, contra præcedens axioma. Si ſecundum & tertium ſimiliter ex centro communi D, H, transmittetur recta linea ad circumferentiæ partem exteriorem vnius circuli, ſecans interiorem, vt in ſecunda figura, recta HG vel DG, ſecans in C circumferentiam interiorem, & in tertia figura, recta DC ſecans interiorem in E, vel recta HE ſecans interiorem in C; eruntque rectæ DC, HG, vel DC, HE, rectæ æquales per cit. deſ. 37. totum & pars, contra præcedẽs axioma. Hæc abſurda manifeſtum reddunt falſitatem poſitionum aduerſarij, quæ ideo falſæ erunt. Reſtat igitur vt tota circumferentia circuli EFG, congruat perfectæ cum circumferentia circuli ABC, quod erat concludendum.

Quarta pars eſt, vt circuli eiuſdem arcus æquales; vel circulorum æqualium arcus æquales, congruant. Concipi enim poſſunt circuli æquales, quorum ſunt arcus, ſi dentur circulorum æqualium arcus æquales; qui vt in præcedenti parte ſuperpoſiti concipi poterunt, ita vt vnum extremum arcus dati cadat ſupra vnum extremum alterius arcus dati: tunc verò per partem illam tertiam tota circumferentia circuli vnius toti circumferentiæ adæquabitur ſeu congruet: quod ſi aliud extremum arcus non cadat ſupra aliud extremum alterius arcus; cadet ſupra aliud punctum circumferentiæ, & ſic arcus vnus erit minor altero, contra datum. Cùm igitur propter hoc abſurdum extrema vnius arcus cadant ſupra extrema alterius arcus, & totæ circumferentiæ oſtenſæ ſint congruere; arcus dati æquales æqualium circulorum congruent. Quod ſi dati ſint arcus æquales in eodem circulo; concipi poterit alter circulus æqualis dato, & diſcurſus factus applicatus concludet & probabit intentum.

Vltima pars, quæ eſt, vt omnes figuræ æquilateræ rectilineæ, & æquiangulæ congruant. Declaratur hac ratione. Cùm figuræ dentur æquilateræ rectilineæ, & æquiangulæ, per primam & ſecundam partem congruent, ſi ſuperponantur rectæ lineæ æquales aliis ſuis æqualibus, & anguli rectilinei æquales ſuis æqualibus: ergo ſic omnia extrema harum figurarum diuiſibilia congruent, ergo totæ, eruntque æquales, per præmiſſum noſtrum ad iſtas partes quinque.

## X.

*Duæ rectæ lineæ [ aliquid commune habentes, & non in directum iacentes ] non habent vnum & idem ſegmentum commune. [ ſed ſolùm punctum. ]*

ADdidi, aliquid commune habentes, nam ſi ſint ſeparatæ omninò, cùm nihil commune

commune habeant, multò minùs ſegmentum ſeu partem aliquam communem ſibi vendicabunt. Addidi etiam præter aliquid commune, & non in directum iacentes: nam duæ rectæ lineæ v.g. AB, BC, in directum iacentes, communem habere partem poſſunt CD. Oſtendamus autem illud commune ipſis non eſſe partem aliquam illarum, ſi non ſint in directum.

Fig. 13.

Eſto ſi fieri poſſit duæ rectæ lineæ DA B DAC, ſegmentum ſeu communem partem habeant AD. Centro A, & interuallo AD, fiat circulus DBC, ſecans rectas datas DAB, DAC, in B, C; per definitionem 17. recta BAD, & recta CAD, erunt ſingulæ diametri circuli facti, & circumferentiam eius ſecabunt in partes æquales eruntque ſemicircumferentiæ illius BCD, & CED, quæ per axioma 7. erunt æquales inter ſe; totum & pars, contra axioma 8. hoc abſurdum condemnat poſitionem aduerſarij aſſerentis duas rectas lineas aliquid commune habentes, & non in directum iacentes, habere vnum & idem ſegmentum commune, vel partem communem. Reſtat igitur vt illud commune ſit punctum; cùm in recta linea nihil ſit præter partes & puncta. Declaratum igitur eſt axioma decimum.

Fig. 14.

## X I.

*Duæ rectæ lineæ in vno puncto concurrentes, ſi producantur ambæ, neceſſariò ſe mutuò in eo [tantùm] puncto decuſſabunt.*

ALij omnes textus, habent interſecabunt, quod mutauimus in decuſſabũt: nam decuſſare eſt ita ſe mutuò duas quantitates ſecare, vt à communi illis eant procedantque in partes contrarias. Quia verò aliquis negare id poſſet, ſaltem reducendus erit ad impoſſibile vel abſurdum aliquod, in rectis lineis de quibus agit axioma præſens. Sint duæ rectæ lineæ AB, CB, concurrentes in puncto B, Dico ſi producantur ambæ, eas ſe mutuò interſecare in eo puncto B. Producatur recta AB vltra B, vſque ad D longiſſimè, per petitionẽ 1.ª & ſimiliter recta CB vltra B, hæc productio vel congruet cum recta BD; vel cadet infra BD ad eaſdem partes rectæ CB, vt BF; vel ſupra ABD, in partes contrarias DB, vt BE. Si primùm, duæ rectæ lineæ non in directum iacentes, ABD, CBD, & aliquid commune habentes, B punctum videlicet, habebunt ſegmentum commune BD, contra ſuperius axioma 10. Si ſecundum, puncto B vt centro, circuli circumferentia fiat ſecans in A, D, rectam ABD, & rectam CBF in C & F. Tunc per definitionẽ 17. illæ rectæ ABD, CBF, erunt circuli facti diametri ſingulæ, & ſemicircumferentiæ ACFD, CGF, eiuſdem circuli, quæ per axioma 7. erunt inter ſe æquales; totum & pars, contra axioma 8. Hæc abſurda notam reddunt falſitatem poſitionum duarum primarum diſtinctionis adæquatæ allatæ. Supereſt igitur vera tertia poſitio, quod ſe mutuò duæ rectæ AB, CB, decuſſent in puncto B, hoc eſt vna abeat in contrariam partem alterius, ſi ambæ producantur vltra illud punctum commune.

Fig. 15.

Quod verò ſolum in puncto illo concurſus communi decuſſent, ſic oſtenditur. Si non ita ſit, erit in parte, vel in pluribus punctis. Non in parte, nam illa eſſet communis illis, contra 10. axioma. Non in pluribus punctis, quæ vel eſſent ſibi immediata contra naturam quantitatis; vel ſeparata, qualia ſunt B, H. Iam inquiro an pars media inter illa duo puncta ſit communis ambabus rectis, vel non, ita vt aſſurgat ſupra partem BH rectæ ABD, pars BIH rectæ CBE, ratione ſuorum punctorum vt I mediorum, & partium: Non primum propter axioma citatum 10. ſed neque ſecundum, nam BIH recta linea pars rectæ CBE, non eſſet recta, per definitionem 4. quia ex æquo non iacet inter ſua puncta B, H, extrema. Cùm igitur in illa decuſſatione, rectæ lineæ non poſſint habere communem partem, neque plura puncta vno, in illo ſe tantummodo decuſſabunt. Fig. 16.

## X I I.

*Item omnes anguli recti, [rectilinei] ſunt inter ſe æquales.*

ADdidi epithetum rectilinei, angulis rectis; quia ſolùm Euclides agit in hiſce libris de huiuſmodi rectis angulis rectilineis: tum quia multi alij ſunt anguli recti de quibus Geometræ tractant, qui comparati inter ſe in vniuerſum, non ſunt omnes æquales inter ſe.

Quod verò duo anguli recti rectilinei quos efficit vna recta linea perpendicularis alteri rectæ, ſint æquales inter ſe, patet ex definitione decima. An vero omnes alij recti anguli quos conſtituunt quæcumque rectæ lineæ perpendiculares aliis rectis, ſint omnes inter ſe æquales, oſtendendum eſt, hac ratione.

Sint duo anguli rectilinei ABC, DEF, recti, facti ab diuerſis rectis lineis AB, DE, perpendicularibus aliis rectis BC, EF. Fig. 17.

Fig.17. Concipiantur æquales rectæ lineæ AB, DE, tum BC, EF, æquales per petitionem 4. & per 5. concipiatur punctum E ſuperponi puncto B: & rectam DE rectæ AB, ipſæ congruent per axioma 9. Iam verò recta EF inuariabilis & non diuaricata ab recta ED, ita vt cum illa efficit eundem angulum rectum quem prius efficiebat, vel congruet cum recta BC, ita vt angulus totus DEF congruat cum angulo ABC; vel cadet ſupra BC, vel infra BC: non ſecundum ac tertium, nam angulus DEF datus rectus, fiet ex ſecunda poſitione minor recto ABC, & ex tertia poſitione, maior recto ABC; hoc eſt acutus vel obtuſus, qui ſunt aliæ ſpecies angulorum ab recto: hæc abſurda arguunt falſitatis illas poſitiones poſtremas: relinquitur ergo prima, vt congruat angulus DEF, angulo ABC: ergo æquales erunt per 9. axioma, omnes anguli recti rectilinei, applicando aliis hanc demonſtrationẽ in exemplo horum duorum.

Notandum eſt pro conuerſa parte huius axiomatis, omnem angulum rectilineum, æqualem angulo recto, eſſe etiam rectum: ſed non omnem angulum æqualem angulo recto, eſſe rectum; Geometræ enim exhibent cum Proclo angulum vnum curuilineum æqualem angulo recto, qui non eſt rectus. Falſum etiam eſſe certum eſt omnes angulos rectilineos æquales eſſe rectos; nam acuti dantur æquales, & obtuſi æquales, qui non ſunt recti.

## XIII.

*Et ſi in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemq́; partes angulos duobus rectis minores faciat; duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ, ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores. [ Et ſi concedantur ſibi mutuò coincidere ex ea parte vbi dicta recta linea angulos internos duobus rectis æquales facit, concedendum erit ſemper coincidere ex ea parte in qua dictos angulos facit. ]*

IN duas rectas AB, CD, recta alia EF incidat eas decuſſando in G & H, faciatque angulos duos BGH, DHG, internos,
Fig.18. & ad eaſdem partes rectæ EF cadentis, minores duobus rectis: tunc duæ illæ rectæ lineæ AB, CD, in infinitum protractæ ad eas partes vbi dicti anguli ſunt duobus rectis minores, tandem ſibi mutuò incidere, & angulum efficere aſſerit hoc axioma. Demonſtratio huius rei difficillima eſt, quam tentarunt Proclus in hunc librum Authoris, & Clauius noſter ante 29. prop. libr. 1. ſed aſſumunt id quod tam obſcurum eſt & probatione indiget. Rectè Author duas rectas lineas aſſumit in quas incidat alia recta cum aliis circumſtantiis, nam Nicomedes apud Pappum duas lineas inuenit, vnam curuam, aliam rectam, quæ inclinantur ad inuicem, & ſemper productæ magis ac magis accedunt ad ſeipſas, nunquam tamen concurſuras demonſtrat.

Quoad partem à nobis additam attinet. Certum eſt ſi conceſſis ad vnam partem angulis rectis duobus internis, vel æqualibus duobus rectis, rectæ lineæ concurrant ad illam partem, aut concedantur concurrere: vel aduerſatius debet dare rationem cur non concurrant aliæ partes ipſarum rectarum poſitis etiam duobus angulis internis ad illam partem, æqualibus duobus rectis, ſi concurrant ex alia; vel admittere etiam concurſuras.

Firmitas primæ partis huius axiomatis conſiſtit in eo quòd nullus vnquam repererit duas rectas has conditiones allatas ſibi vendicantes, quæ non ſibi obuiam fiant ad partes vbi anguli illi duo interni ſunt duobus rectis minores: & quo poſito nullum vnquam abſurdum eſt inuentum. Si igitur negetur hoc axioma, quandoquidem poſſeſſionem illius habemus & illud aſſumimus, debet demonſtrari aliquis caſus in quo non verum ſit id quod aſſerit; vel aliquod abſurdum ex eo deduci: tunc enim vniuerſale non erit & falſum.

## XIV.

*Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.*

CErtum eſt quod ſi ſint parallelæ duæ rectæ lineæ, ſpatium ſeu figuram non comprehendant, concurrerent enim pro concluſione figuræ, & non concurrerent ex natura ſua, quæ duo ſe mutuo deſtruunt. Certum eſt etiam duas rectas lineas diuerſas inclinatas ad inuicem, & non parallelas, ſed nihil commune habentes, figuram nullam conſtituere & claudere; aliquid enim commune haberent ſi clauderent ſpatium, & nihil commune haberent ex ſuppoſitione, quæ duo ſe mutuo interimunt. Reſtat igitur oſten- Fig.19.
dere ex abſurdo duas rectas lineas AB, CB, angulum B conſtituentes, ſeu commune punctum habentes, figuram non conſtituere concluſam. Eſto enim concludant figuram ABCD, recurrendo rectam BC ad rectam AB in puncto D quocumque diuerſo ab B communi extremo ambarum rectarum AB, CB, datarum: tunc recta erit ex datis vel ſuppoſitione, recta BCD; Verum quia punctum D exiſtens in recta AB diuerſa ab BC,

&

& etiam in recta BCD, ſi producantur ambæ, BDA, BCD, ſe mutuò interſecabunt in puncto D, per axioma vndecimum: ſed etiam per idem axioma ſi producantur vltra B, etiam ſe mutuò in puncto B decuſſabunt; ergo iſtæ rectæ lineæ ſe mutuò interſecabunt in duobus punctis, contra axioma citatum. Hoc abſurdum conſequens indicat eſſe falſum & impoſſibile vt duæ rectæ lineæ ſpatium ſeu figuram concludant. Non igitur concludent.

## X V.

*Si æqualibus inæqualia adiiciantur; erit totorum exceſſus, adiunctorum exceſſui æqualis.*

EXempli gratia æqualibus A 4. B 4. Inæqualia C 3. D 2. adiiciantur; C ipſi A, D ipſi B: erit totorum AC 7. BD 6. exceſſus G 1. adiunctorum C 3. D 2. exceſſui H 1. æqualis.

## X V I.

*Si inæqualibus æqualia adiungantur; erit totorum exceſſus, exceſſui eorum quæ à principio erant, æqualis.*

VT inæqualibus C 3. D 2. addantur æqualia A 4. B 4; A quidem ipſi C; B verò ipſi D: erit totorum CA 7. DB 6. exceſſus G 1. æqualis exceſſui H 1. qui in primis erat datis C 3. D 2.

## X V I I.

*Si ab inæqualibus inæqualia demantur: erit reſiduorum exceſſus, exceſſui ablatorum æqualis.*

VErbi gratia, ab inæqualibus A 8. B 6. inæqualia demantur C 3. D 2; illud ab A; hoc ab B: erit reſiduorum E 5. F 4. exceſſus G 1. æqualis exceſſui H 1. ablatorum C 3. D 2.

## X V I I I.

*Si ab inæqualibus æqualia demantur: erit reſiduorum exceſſus, exceſſui totorum æqualis.*

AB inæqualibus A 8. B 6. æqualia demantur D 5. D 5. erit reſiduorum E 3. F 1. exceſſus G 2. exceſſui H 2. totorum A 8. B 6. æqualis.

## X I X.

*Omne totum eſt æquale omnibus ſuis partibus ſumptis.*

## X X.

*Si totum eſt totius duplum, & ablatum ablati; & reliquum reliqui duplum erit.*

HOc vltimum axioma vſurpatur ab Commentatoribus Euclidis pro demonſtratione propoſitionis 20. libr. 3. quòd in proportione dupli concedent omnes facilè: verùm in vniuerſum in omni proportione multiplici demonſtratur ad prop. 5. libr. 5. & in omni proportione ad prop. 19. libr. eiuſdem quinti.

Hoc axioma non referemus quia propoſitionem citatam 20. lib. 3. ſine illo demonſtrabimus, ſed quia ad citatam propoſitionem demonſtrandam vſi ſunt hactenus Euclidis Interpretes omnes, illud apponimus, ne ordo axiomatũ Euclidianorum interrumpatur. Sequentia axiomata ſuperaddimus & explicamus conducentia plurimum ad tollendos ab animis Tyronum ſcruptulos inter demonſtrandas paſſim propoſitiones.

## X X I.

*Si duarum rectarum linearum extrema congruant, vnum vni, alterum alteri; tota congruent, & æquales erunt.*

REctarum AB, CD, extrema ita congruant per ſuperpoſitionem intellectualem, ita vt extrema A, C, congruant, & extremum D extremo B. In hoc caſu ſi non *Fig. 20.*
congruant totæ datæ rectæ adæquatè; congruent inadæquatè, ita vt pars parti cõgruat, & altera pars parti minimè congruat; vel nihil earum præter extrema dicta congruet. Si primum, tunc ſegmentum ſeu partem communem obtinebunt, contra axioma 10. Si ſecundum, tunc figuram vndequaque concludent, contra 14. axioma. Hæc abſurda deducta ex duabus poſitionibus contradicentibus primæ parti huius axiomatis, indicant eas eſſe falſas, & axioma verum quod ad primam partem. Secunda vero pars manifeſta eſt ex 9. axiomate; cùm enim datæ rectæ lineæ congruere perfectæ oſtenſæ ſint, æquales erunt.

## XXII.

*Circuli deſcribenda circumferentia ex puncto dato vt centro, & interuallo dato ſemidiametri; productam hanc ſemidiametrum vltra centrum in infinitum, ſecabit in parte producta.*

Fig.21. PVnctum B datum ſit vt centrum, ex quo & interuallo BA ſemidiametri dato, deſcribenda ſit circumferentia circuli, producendo anteà rectam AB vltra B in infinitum, ita vt BC ſit productio rectæ AB datæ: Dico ipſam circuli faciendi circumferentiam ſecturam in D, rectam BC, quæ eſt pars producta rectæ AB datæ. Per definitionem 15. circuli iuxta Ariſtotelem, circumuolui debet recta BA perfectè circa ſuum extremum B immobile vnum, alio ſuo extremo A deſcribente circuli circumferentiam; in hac autem reuolutione tandem congruet recta BA, parti alicui BD æquali, de recta infinita BDC; nam de illa infinita BC, concipere poſſumus æqualem BD, ipſi AB iuxta petit. 4. commune habentes punctum B; quæque per axioma 9. & 21. congruent, puncto A incidente in punctum D: ergo punctum D diuidet rectam BC; hoc autem punctum D pertinet etiam ad circumferentiam circuli deſcripti, ergo ipſa diuidet in D rectam AB productam vltra centrum B.

## XXIII.

*Duo ſolùm puncta circumferentia circuli ſunt in directum vnius recta linea. Vel recta linea ſecans circulum ingrediendo intra eius aream, & egrediendo, ſolum in duobus punctis ſecat; in vno, ingrediendo; in altero, egrediendo.*

Fig.21. SVmpta ſint duo puncta E, F, in circumferentia circuli, dico ea ſolum duo puncta E, F, eſſe in directum vnius rectæ lineæ EF, quæ per primam petitionem transfigere illa poteſt; & nullum eſſe aliud punctum circumferentiæ eiuſdem circuli, in directum rectæ lineæ EF. Sit per impoſſibile aliud punctum G, ita vt ſit recta vna linea EFG, quæ per definitionem 4. debet ex æquo ſua interiacere puncta extrema EG. Verum ex poſitione aduerſarij ſequitur punctum F, non ex æquo iacere inter illa puncta EG; nam ex definitione Ariſtotelis, circuli effectio fit per reuolutionem BG ſemidiametri concipiendi, aſcendendo vel deſcendendo reſpectu puncti G à quo cæpit reuolutio; ergo quando punctum G motum ad punctum F, aſcendit vel deſcendit ab illo per reuolutionem, ergo non eſt in directum illius & alterius extremi E: erit ergo idem punctum F, in directum punctorum E, G, extremorum rectæ EFG aduerſarij, & non in directum illorum; ſeu quod idem eſt iacebit punctum F ex æquo inter extrema E, G, & non iacebit ex æquo. Contradicentia iſta indicant impoſſibile eſſe vt plura puncta duobus circumferentiæ circuli ſint in directum vnius rectæ lineæ: vel vt recta linea EF ſecans circulum in ingreſſu E, & egreſſu F, ſecet illum in pluribus punctis duobus E, F prædictis, verbi gratia in G egrediendo. Verum igitur eſt axioma præſens.

## XXIV.

*Ex quocumque puncto arcus circuli diuerſo ab eius extremis duobus communibus chorda eius, duci poſſunt dua recta linea ad extrema duo prædicta, triangulum rectilineum cum chorda conſtituentes.*

CVm enim per præcedens axioma punctum illud tertium G non ſit in directum chordæ EF, terminatæ in duobus punctis E, F, circumferentię circuli vel arcus eius, rectæ lineæ duæ GE, GF, diuerſæ ab illo ad illa puncta E, F, duci poterunt per 1. petit. Si enim confluerent in rectam EF, tunc G punctum eſſet in directum rectæ EF, contra citatum axioma. Tres autem lineæ rectæ diuerſæ, EF, FG, GE, conſtituunt triangulum rectilineum, iuxta definitionem vigeſimam. Probuiamus ergo intentum in hoc axiomate. Fig.21.

## XXV.

*Circuli deſcribendi circumferentia ex aliquo puncto vt centro, & extremo data recta linea, incedens per aliud eius extremum, tranſibit per extrema omnium aliarum rectarum linearum æqualium data, procedentium ab extremo dicto puncto vt centro.*

IN eadem figura, ex puncto B procedant Fig. 21. duæ rectæ lineæ æquales BD, BH, & ſic de aliis innumeris. Dico circuli circumferentiam deſcribendi ex B puncto, tranſituram per D & H, extrema dictarum linearum æqualium. Concipiatur facta circumferentia ex B centro, & interuallo datæ BD, ſi non tranſeat per H punctum aliud extremum rectæ BH, incedat ſi fieri poſſit per K, vel I, punctum illius rectæ BHI, vel BKH: tunc per definitionem 15. circuli, rectæ BD, BI vel BK erunt æquales inter ſe; data eſt autem recta BH æqualis ipſi BD; ergo per 1. axioma, rectæ

rectæ BH & BK, vel BI, erunt æquales, totum & pars, contra 8. axioma. abſurdum hoc indicat eſſe falſam poſitionem contradicentem huic axiomati, quod ideo verum erit.

## XXVI.

*Circuli deſcribendi circumferentia ex aliquo puncto dato vt centro, in latere ſeu termino alicuius figuræ, & interuallo alicuius recta ingredientis in aream illius, & non terminatæ in alio puncto extremo illius figuræ; ſecabit terminum illius figuræ, ſaltem ſemel.*

Figu.22. IN circuli circumferentia EA, vel trianguli AGF latere GA vel FA, datum ſit punctum A, & recta linea AB ingrediens intra circuli aream, vel A I ingrediens intra aream trianguli, verum neutra terminetur alio ſuo extremo in extremis datæ figuræ punctis. Dico circuli circumferentiam deſcribendam puncto illo A dato, & interuallo rectæ AB, vel AI, ſecturam ſaltem ſemel figuram datam. Producendo enim rectam datam B A vltra A centrum futurum, vel rectam IA vltra A centrum futurum, productio AC, vel IH, erit extra figuras datas, quandoquidem eſt in contrariam partem ingreſſarum rectarum AB, AI, intra figuras datas ex puncto vno A in ipſarum extremis dato: hanc verò productionem ſecabit circuli circumferentia deſcribenda; prout in axiomate 22. aſſeruimus; egreditur ergo extra aream figuræ datæ circumferentia circuli incipiens ab B, vel I, punctis intra figuram datis, vt ſecet productiones illas egredientes ab dicta area; & ſic egrediendo; earum figurarum datarum extrema ſecabit ſaltem ſemel, quod volumus, circulum quidem in E, & triangulum etiam in E, in exemplo dato.

## XXVII.

*Circuli deſcribendi circumferentia ex aliquo puncto extra figuram aliquam dato vt centro, & interuallo recta linea ingredientis figuram ipſam, ſed non terminata in aliquo eius extremo: ipſius figuræ extremum ſaltem ſemel ſecabit.*

Figu.22. SIt punctum H extra circulum ALK, vel triangulum AGF, & interuallo HI rectæ lineæ ingredientis intra figurarum datarum quamlibet, ſed non terminatæ in aliquo eius extremo; ex quo puncto H, vt centro ſit circuli circumferentia deſcribenda: dico hanc circumferentiam figuræ ipſius datæ extremam ſecturam. Quandoquidem centrum H circumferentiæ circularis deſcribendæ datur extra figuram datam, & extremum aliud interualli HI, eſt intra figuram; multo magis productio vltra H rectæ IH, erit extra figuram datam: ſed per axioma 22. circuli circumferentia deſcribendi, ſecabit productionem rectæ IH, exiſtentem extra figuram datam, ergo iuxta def. Ariſtotelicam circuli citatam in definitione 15. punctum I extremum rectæ HI, exiſtens intra aream figuræ datæ, vt attingat punctum ſectionis in productione prædicta IH, exibit extra aream figuræ, eamque ſaltem ſemel ſecabit in aliquo eius extremo, vtpote in exemplo figurarum datarum, circuli & trianguli in K. quod erat concludendum.

## XXVIII.

*Recta linea intra figuram aliquam ducta, producta vtrimque ſi opus ſit in infinitum, ſecabit extremum figuræ.*

VEluti recta linea BK, intra circulum exempli gratia ducta, ſi producatur in infinitum vltra K, ſecabit circumferentiam circuli quæ eſt eius extremum in I. Omnis enim figura cùm ex natura ſua comprehendatur ac terminetur ſuis extremis; certè ſi producatur recta terminata exiſtens intra ipſam, interminatè, hoc eſt infinitum, debet procedere & egredi extra illos terminos figuræ limitatæ ſeu terminatæ, & ſic terminum vel terminos figuræ ſecabit, prout aſſerit hoc axioma. Figu.21.

## XXIX.

*Recta linea diuidens aliquem angulum rectilineum, producta interminatè; ſecabit rectam lineam ſuppoſitam illi angulo & applicatam vtrimque ad rectas angulum diuiſum conſtituentes; non autem rectas ipſas lineas angulum illum diuiſum efficientes.*

*Et recta linea ducta ab angulo rectilineo ad aliquod punctum ex intermediis baſeos illius, diuidere illum angulum.*

*Et recta linea ducta ab vno puncto baſeos trianguli rectilinei ad angulum ipſi oppoſitum, ſecabit ipſum angulum.*

REcta linea AL diuidat angulum rectilineum GAF, & recta FG ſuppoſita angulo illi diuiſo, & applicata in F & G; ad rectas AG, AF, componentes angulum GAF diuiſum. Dico rectam AL ſecturam rectam Figu.22.

lineam FG, non autem quamlibet rectarum AG, AF. Nam per axioma 28. præcedens, ipſa recta AL debet ſecare extremum aliquod figuræ trilateræ FAG: ſed non poteſt ſecare latera AG, AF, in alio puncto ab A, per axioma vndecimum; reſtat igitur vt ſecet rectam GF, quod erat explicandum pro prima parte huius axiomatis. Ad ſecundam veniamus, ab angulo GAF ad punctum L ex intermediis baſeos GF ſuppoſitæ angulo dicto, recta linea AL ducta ſit; hæc extra triangulum eſſe non poteſt, qualis eſt ANL: nam producendo interminatè rectam AG, vltra G, ipſam ſecaret in M, & A, ſpatiumque concluderent ambæ, contra 14. axioma. dicere autem quod congruat cum rectis AG, GF, quæ angulum G efficiunt, tollit eius rectitudinem, quādoquidem angulus fit per inclinationem duarum rectarum non in directum iacentium iuxta defin. 8. Cùm ergo recta illa AL non poſſit exire extra triangulum GAF; nec congruere cum eius lateribus, tota incedet intra trianguli aream, ideoque diuidet angulum GAF: prout ſecunda pars inferebat. qua explicata, tertia fit manifeſta, ſi enim id non fieret, redirent argumenta facta in ſecunda parte.

## XXX.

*Trianguli vel figuræ cuiuſcumque rectilineæ planæ ſola mutatio ſitus, nihil immutat in lateribus eius & angulis.*

MVtatio enim ſitus cuiuſcumque figuræ, ex ſe non dicit decurtatos eſſe eius terminos lineares, & angulos eius rectilineos, aut factos maiores; ſed ſolum totam figuram mutaſſe ſitum, quem antea habebat, & occupare nouum. Alioqui tranſpoſitio intellectualis, & motus quantitatum intellectiuus, immutaret illas, vel ſecundùm ſpeciem vel ſecundùm accidens, ſine vlla reali detractione ipſarum, vel additione ad illas ſecundùm quantitatem. quod nemo hactenus ſomniauit, & multo minus aſſeruit.

COM-

# COMMENTARIVS IN LIBRI PRIMI EVCLIDIS PROPOSITIONES.

## PROPOSITIO I.

**Super data recta linea terminata, Triangulum æquilaterum conſtituere, [ vel Iſoſceles, vel Scalenum. ]**

SVPPOSITIO. Data ſit recta AB terminata, ſuper qua deſcribendum ſit triangulum æquilaterum, vel iſoſceles, vel ſcalenum.

Fig.23. Conſtructio pro triágulo æquilatero. Centro A, extremo rectæ AB datæ, & interuallo ipſius rectæ AB deſcribatur circumferentia circuli: tum centro B & interuallo BA rectæ eiuſdem, concipiatur deſcripta alterius circuli circumferentia, quæ iuxta axioma 26. ſecabit alteram iam deſcriptam, verbi gratia in C puncto: ex quo ad extrema A & B, rectæ AB datæ, tranſmiſſæ rectæ lineæ CB, CA, triangulum ACB efformabunt rectilineum, conforme definitioni 20.

Hoc verò triangulum ACB, dico eſſe æquilaterum.

Fig. 24. Conſtructio pro triangulo iſoſceli. Centro A, interuallo ABF rectæ, AB datæ maiore, concipiatur circuli circumferentia deſcripta; & centro B, interuallo eodem prædicto maiore recta data AB, deſcripta alterius circumferentia, aliam ſecabit in D, per axioma 26. Tùm rectæ lineæ DA, DB, traiiciantur, quæ cùm data AB, trilateram figuram planam, ſeu triangulum concludent ADB, quod dico eſſe Iſoſceles.

Fig. 24. Conſtructio pro triangulo Scaleno, quod Euphorbus Phrix adinuenit ac demonſtrauit teſte Diogene Laertio in vita Chaletis, quique inter antiquiores primus in Græcia referente eodem Authore Geometrizauit, ad conſtructionem ſuperiorem pro triangulo iſoſceli, addatur vt punctum aliquid E eligatur in circumferentia alterultrorum circulorum diuerſum ab ſectione communi circumferẽtiarum illorum quacũque: denique ex hoc puncto E ad puncta A & B, rectæ lineæ immittantur EA, EB: concludent tres rectæ lineæ EA, EB, AB, triangularem figuram, AEB, quam dico eſſe ſcalenam.

Demonſtratio triáguli æquilateri ACB. Circuli facti illi duo ſe mutuò ſecantes in C, ſunt æquales, quia facti eodem interuallo AB, BA, per def. 27. ſed tres rectæ lineæ AC, AB, BC, componentes triangulum ACB, ſunt horum circulorum æqualiũ ſemidiametri iuxta def. 17. ergo erunt æquales inter ſe per cit. def. 27. Triangulum ergo ACB erit per def. 23. æquilaterum. Igitur ſuper data recta linea terminata, triangulum æquilaterum extruximus, quod erat faciendum. Fig. 23.

Demonſtratio triangli iſoſcelis ADB. Circuli facti ſe mutuò ſecantes in D, ſunt æquales per def. 27. quia facti eodem interuallo rectæ ABF: ſed rectæ lineæ AD, BD, ſunt eorum ſemidiametri ex def. 17. ergo per cit. def. 27. erunt æquales inter ſe. Præterea ex definitione circuli 15. rectæ AD, ABF, ſunt æquales inter ſe; ſed ABF eſt maior quàm AB, per 8. axioma, ergo etiam recta BD æqualis oſtenſa rectæ AD, maior erit quàm AB per 1. axioma, & ambæ diuiſim ſumptæ maiores recta AB. Trianguli igitur ADB, duo latera AD, BD oſtenſa æqualia, & ſingula maiora quàm tertium latus AB, triangulum iſoſceles cum recta AB component iuxta definitionem 24. Triangulum ergo iſoſceles ADB conſtituimus ſupra rectam AB, prout erat imperatum. Fig. 24.

Demonſtratio trianguli Scaleni AEB. In demonſtratione triáguli Iſoſcelis oſtendimus rectam BD eſſe maiorem recta data AB; ſed recta BE per def. 15. eſt æqualis rectæ BD, ergo per 1. ax. recta BE maior erit recta AB data: Præterea recta AD oſtenſa eſt etiam æqualis rectæ BD, ergo per axio. 1. recta AD æqualis erit rectæ BE: ſed recta AG æqualis rectæ AD, per def. 15. minor eſt recta AGE, per 8. axioma, ergo etiam recta BE æqualis rectæ AG, per def. 37. quia ſunt ſemidiametri factorum circulorum æqualium, minor erit recta

u.26.

igu.27.

Digitized by Google

congruet, per idem axioma, quia dati ſunt æquales; punctum ergo A, puncto D congruet, & punctum C puncto F, quia ſunt extrema prædictarum linearum rectarum æqualium modo prædicto: ergo per 21. axioma, prædictæ lineæ ſeu baſes AC, DF, congruent, & erunt æquales: quod erat primo loco propoſitum. Iam verò in hac ſuperpoſitione, vel angulus A eſt maior aut minor angulo D; Et angulus C eſt maior aut minor angulo F: quodlibet ex his eſſe non poſſet, quin rectarum BA, AC, vel ED, DF; aut BC, CA, vel EF, FD, aberret vna ab alia ſupra vel infra illam, vt vnus angulus maior contineat minorem; hoc verò conſequens eſt contra conceſſa circa adæquationem illarum reſpectiuam prædictam: igitur anguli A & D, æquales erunt, & anguli C & F æquales, quod erat ſecundo loco propoſitum. Denique quia oſtendimus duo triangula data rectilinea, eſſe æquilatera & æquiangula, ipſa per idem ax. 9. erunt æqualia. Propoſita ergo omnia demonſtrauimus.

## PROPOSITIO. V.

### Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales: & productis ęqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt anguli, inter ſe æquales erunt.

HAnc iſoſcelis trianguli Proprietatem primus inueniſſe fertur Thales Mileſius, eamque poſtmodum Geminus vniuerſaliùs demonſtraſſe, ita Proclus in hunc primum librum.

Figu. 28. Suppoſitio. Datum ſit Triangulum iſoſceles ABC, cuius duo latera AB, CB, ſint æqualia: & producta infra baſim AC, videlicet BA vſque ad D, BC vſque ad E. Dico angulos BAC, BCA, ſupra baſim AC eſſe æquales inter ſe; tum angulos infra baſim AC, eſſe etiam æquales inter ſe, DAC, ECA.

Conſtructio. Producto vno latere BC exempli gratia longiſſimæ ſeu in infinitum vltra C, ſumatur per 3. prop. pars CE æqualis rectæ AD minori, & concipiatur triangulum datum ABC cum ſua conſtructione conuerſum quoad partes ſiniſtras in dextras, & latera æqualia ſuperpoſita inuicem prout opus eſt, & angulos, tamquam ſi eſſet idem numero triangulum iſoſceles reproductum à Deo in alio ſitu.

Demonſtratio. In ſuperpoſitione mentali trianguli iſoſcelis CAB, ſupra triangulum iſoſceles ABC; ita vt B puncta congruant, & latera ſuperimponantur ſibi inuicem; quia ex datis latus CB æquale eſt lateri AB; & latus AB æquale eſt lateri CB, ipſa congruent, per axioma 9. tùm etiam angulus B angulo B, cùm ſit idem; & punctum C congruet cum puncto A, & punctum A puncto C, quæ ſunt extrema laterum BA, BC, æqualium, & baſium AC, CA: ergo per axioma 21. baſes AC, CA, congruent adæquatè, & æquales erunt, quod ſecundùm iam datur eo quod ſit eadem recta AC. Iam verò ſi angulus BCA non congruat cum angulo BAC, proueniet ex diductione & ſeparatione vel laterum BA, & BC, ab baſibus AC, CA; ita vt non amplius adæquentur perfectè, vel illa latera, vel illæ baſes, contra iam conceſſa; ergo cōgruent illi duo anguli BCA, BAC, ergo erunt per 9. ax. cit. æquales illi duo anguli ſupra baſim AC.

Præterea in prædicta ſuperpoſitione cum totæ rectæ BAD, BCE ſint æquales, per 2. ax. eo quod æqualibus datis BA, BC, additæ ſint æquales factæ DA, CE, congruent inter ſe per cit. ax. 9. Quod ſi anguli infra baſim DAC, ECA, in eadem ſuperpoſitione non congruant, erit quia recta AD diuellitur ab recta CE, vel contrà; hoc verò eſt contra conceſſa, videlicet rectas totas BAD, BCE, perfectè adæquari, & partes earum AD, CE: igitur congruent illi duo anguli DAC, ECA, infra baſim AC, trianguli Iſoſcelis dati, quare æquales erunt per cit. axioma. Demonſtrauimus ergo propoſitum. Fig. 28.

## COROLLARIVM.

*Omne triangulum æquilaterum eſt æquiangulum.*

NAm in triangulo æquilatero ACB, primæ propoſitionis, eodem artificio quo demonſtrauimus in triangulo iſoſceli, oſtendentur anguli A & B ad baſim AB, æquales eſſe, quia duo latera AC, BC ſunt æqualia. Similiter quia duo latera CA, AB, ſunt æqualia, demonſtrabuntur anguli B & C æquales, ad baſim BC. Cùm igitur duo anguli A, C, trianguli æquilateri, probati ſint æquales tertio angulo B, erunt per 1. ax. tres anguli A, C, B, trianguli ACB æquales: quare triangulum æquilaterum omne, erit æquiangulum. Figu. 23.

## PROPOSITIO VI.

### Si trianguli, duo anguli æquales inter ſe fuerint; & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.

SVppoſitio. Triãguli ABC, duo anguli A, C, ſint æquales inter ſe: Dico latera BA, BC, ſubtenſa illis angulis æqualibus, habere inter ſe æqualia. Fig. 29.

Con-

Fig. 29. Conſtructio. Concipiatur idem triangulum ABC inuerti ita vt angulus A ſiniſter fiat dexter, & angulus C dexter fiat ſiniſter; & mente ſuperponi ita vt punctum C puncto A congruat, quæ ſunt initia baſium AC, CA, & recta AC, rectę CA congruat adæquatè iuxta nonum axioma.

Demonſtratio. Quandoquidem angulus C angulo A datur æqualis in prædicta ſuperpoſitione congruent per 9. ax. citatum. Iam verò latus CB, lateri AB ita congruet, vt extremum B, lateris CB, congruat cum B extremo lateris AB; vel cadat in directum AB, vltra B in D, vel citra in E. Nentrum ex his duobus poſtremis eſſe poteſt; nam ducta recta DC vel DA, aut recta EC vel EA, reſultabit triangulum EAC, vel DAC quod angulum ECA, vel DCA, æqualem angulo BCA, totum parti contra axioma 8. nam angulus ECA vel DCA, & ipſe angulus BCA datus æqualis angulo BAC, & recta linea CA angulum ACB diuidit, vel recta CB angulum ACD ſecat iuxta axioma 29. Reſtat igitur vt latus CB congruat adæquatè cum latere AB, quæ propterea per axioma 9. erunt æqualia. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM.

*Omne triangulum æquiangulum eſt æquilaterum.*

NAm in figura trianguli ACB, propoſitionis primæ, conſideremus eam eſſe
Fig. 23. triangularem æquiangulam. Quia dantur anguli A, B, æquales, erunt per iſtam 6. prop. latera AC, BC, illis ſubtenſa angulis æqualibus æqualia. Præterea quia dantur anguli A, & C, æquales, erunt per eandem iſtam propoſitionem latera AB, CB, illis ſubſtrata æqualia. Ergo cùm latera BC, AB, ſint æqualia tertio lateri AC, erunt per 1. ax. æqualia inter ſe, ergo triangulum æquiangulum æquilaterum erit per def. 23. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO VII.

Super eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non conſtituētur ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

Fig. 30. SVppoſitio. Data ſit recta linea AB, ex cuius extremis A & B, ad aliud punctum C quod non ſit in directum illius, ductæ ſint duæ rectæ lineæ AC, BC: Tum aliud punctum D eligatur diuerſum ab C, quòd etiam non ſit in directum rectæ datæ AB, ſed ſit ad eaſdem partes alterius C puncti, reſpectu rectæ AB datæ; ad quod punctum D, ex eiſdem extremis A & B, rectæ AB, ſint traductæ lineæ rectæ AD, BD: quod punctum D, vel cadet in vno laterum AC, vel BC, puta AC, vt in ſecunda figura; vel in productione ipſius lateris AC; vt in prima figura; vel extra triangulum ACB, & non in directum vllius laterum AC, BC, vt in tertia figura; vel intra triangulum ACB, vt in quarta figura; vel extra triangulum ACB, ita tamen vt vna è rectis ducendis AD vel BD, ſecet alterum latus AC vel BC, vt in quinta figura, & ſexta. Dico ambas rectas AD, BD, non eſſe æquales aliis duabus rectis lineis AC, BC, eoſdem terminos habentes A, & B: Exempli gratia rectam AD non eſſe æqualem rectæ AC, & ſimul rectam BD non eſſe æqualem rectæ BC; licet in ſexta figura poſſint eſſe rectæ AC, AD æquales, ſed numquam in hoc caſu fore alias duas æquales.

Conſtructio. Triangulum ACB conſtitutum ſupra baſim AB, concipiatur motum circa ſuam baſim AB immobilem, & applicatum infra baſim; quæ mutatio ſitus non immutat eſſentiam trianguli ACB, & ſuorum laterum, & angulorum, iuxta axioma 30. quod videre eſt in figuris propoſitis: Denique angulus C tranſpoſitus infra rectam AB datam, & D immotus ſupra rectam ipſam AB, recta linea DC connectantur, niſi ſint in directum vt in figura 7. Fig. 30.

Demonſtratio in omnibus caſibus illis prædictis. Si non ſint illæ lineæ inæquales iuxta propoſitionem, ſint ſi fieri poſſit æquales, hoc eſt AC, AD, & BC, BD: ſequitur ex hac poſitione triangulum CAD cuius baſis eſt CD, eſſe iſoſceles; tum etiam triangulum CBD, cuius baſis eſt CD; ergo per prop. 5. anguli ADC, ACD ad baſim CD erunt æquales; tùm etiam anguli duo BDC, BCD, ad baſim CD: duobus igitur primis æqualibus, ſi addantur duo poſteriores, vnus vni, alter alteri, ſicut per 2. ax. ACB, ADB æquales, (in ſeptima figura nulla huiuſmodi additione opus erit, cùm ſimpliciter ſint anguli BDC ſuperior, & inferior BCD æquales, ſed angulus ACB inferior eſt æqualis, imo idem cum angulo ACB ſuperiore reſpectu rectæ datæ AB; ergo in duobus triangulis ſuperioribus, duo anguli ſuperiores ACB, ADB æquales erunt: Cùm ergo ex poſitione aduerſarij duo triangula ſuperiora ACB, ADB, angulos in C & D æquales habeant comprehenſos ab æqualibus lateribus AC, BC, ipſis AD, BD, relatiuè, per prop. 4. erunt anguli ad baſim AB, & ſupra illam

illam, in omnibus figuris, ſeu caſibus datis, ABC, ABD, æquales; totum & pars, contra 8. axioma. hoc abſurdũ deductum ex poſitione aduerſarij contradicente huic propoſitioni, manifeſtam facit eius deceptionem & falſitatem, & huius propoſitionis veritatem, quæ ideò relinquetur demonſtrata.

## PROPOSITIO VIII.

Si duo triãgula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia; habuerint verò & baſim baſi æqualem; angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum, angulo æqualem habebunt.

Fig. 31. SVppoſitio. Duo triangula ACB, ADB, habeant latera AC, BC, AD, BD, æqualia vtrumque vtrique, hoc eſt latus AC ſit æquale lateri AD, & latus BC æquale lateri BD, habeantque baſes AB æquales: Dico ea triangula habere angulos C & D, æquales, contentos ſub dictis lateribus æqualibus.

Demonſtratio. Quandoquidem dantur latera BC, BD, æqualia, ſuperimponendo punctum D, puncto C, & latus lateri, congruent adæquatè per axioma 9. latus BC, lateri BD. Iam verò ſuperimponendo totum triangulum ADB, toti triangulo ACB, vti iam fecimus latus BD, lateri BC, verſus eandem partem A; vel angulus ADB erit adæquans vel congruens angulo ACB, vel erit eo maior, vt in figura 1. 2. 3. ita vt punctum E referens punctum A trianguli ADB, ſit extra punctum A trianguli ACB; vel erit minor, vt in figuris 4. 5. 6. ſitque etiam punctum E referens extremum A lateris AD, ſit diuerſum ab puncto A extremo lateris CA trianguli ACB. Neutra harum duarum poſtremarum poſitionum eſſe poteſt; ſequeretur enim contra præcedentem prop. 7. ſuper eadem recta linea BC vel BD, ad eaſdem partes, & ad diuerſa puncta A & E, duas rectas lineas CE, BE, æquales eſſe duabus rectis aliis lineis DA, BA, eoſdem terminos B & D, vel B & C habentes: hoc abſurdum indicat falſas eſſe illas poſitiones, relinquitur ergò prima, quæ eſt propoſitio ipſa, videlicet angulos C & D datorum triangulorum eſſe congruentes, ideoque per axioma 9. æquales. quod erat probandum.

### COROLLARIVM.

*Duo eadem data in propoſitione triangula habebunt ad baſes, angulos æquales, vtrumque vtrique; & totá ipſa triangula erunt æqualia.*

CVm enim ex datis propoſitionis huius, latera AC, BC, ſint æqualia lateribus AD, BD, vtrumque vtrique; & concluſum fuerit angulos C & D, comprehenſos ab dictis lateribus eſſe æquales: data triangula per prop. 4. habebunt angulos in A æquales, tum etiam in B æquales; totaque ipſa erunt æqualia, quod erat declarandum.

## PROPOSITIO IX.

Datum Angulum rectilineum bifariam ſecare.

SVppoſitio. Datus ſit angulus ABC diuidendus in duos æquales angulos. Propoſitum hoc duobus modis exequemur, ſeu duabus praxibus.

Conſtructio primæ praxeos. Puncto B vt centro, fiat circulus ſecans ſua circumferentia rectam BA in A, & rectam BC in C: tum per 1. propoſitionẽ ſuper ducenda recta linea AC, fiat in partes contrarias angulo B, triangulum æquilaterum vel iſoſceles ADC: Denique tranſmittatur recta linea BD ab angulo B ad angulum D. Dico rectam BD diuidere datum angulum ABC in duos angulos æquales ABD, CBD. Fig. 32.

Conſtructio ſecundæ praxeos. Puncto B, interuallo aliquo fiat circumferentia circuli ſecans rectam BA in A, & rectam BC in C: tum ſupra ducendam rectam AC lineam, fiat ad eaſdem partes anguli B, triangulum iſoſceles ABC, & aliud interuallo maiore laterum AB, CB, ſitque ADB: Inſuper ducatur recta linea DB producenda in E vſque ad baſim AB, quam ſecabit per axioma 29. tum etiam angulum ABC, alioqui recta ipſa BD producta ſecaret iterum rectam BC vel BA, in aliquo alio puncto extra B, vt perueniat ad baſim AC ſecandam, & ſic vel duæ rectæ lineæ ſegmentum habeant commune, vel ſecarent ſe in pluribus punctis vno, quod eſt contra axioma 10. & 11. Dico angulum datum ABC diuiſum eſſe ab recta BE vel DBE, in duos angulos æquales ABE, CBE.

Demonſtratio primæ praxeos. Ex natura circuli rectæ BA, BC ſunt æquales, ergo per def. 24. triangulum erit iſoſceles ABC: ſed per 5. prop. anguli eius BAC, BCA, ſũt æquales; tum etiã anguli DAC, DCA ſunt æquales in triangulo facto iſoſceli ADC, vel æquilatero: igitur per 2. axioma totus angulus BAD,

BAD, erit æqualis toti angulo BCD. Cùm ergo in triangulis BAD, BCD, ſint per conſtructionem æqualia latera vtrumque vtrique, continentia angulos prædictos æquales, erunt per 4. prop. anguli ABD, CBD æquales, tum etiam anguli ADB, BDC. Ergo diuiſimus angulum ABC, in duos angulos æquales. quod erat faciendum.

Demonſtratio ſecundæ praxeos. Quia ſunt ex natura circuli rectæ lineæ BA, BC æquales, factum erit triangulum ABC iſoſceles per def. 24. ſed & per conſtructionem eſt aliud triangulum iſoſceles ADC: ergo per prop. 5. anguli DAC, DCA æquales erunt; tum etiam anguli BAC, BCA: his minoribus ſublatis ab aliis duobus maioribus, relinquentur per 3. ax. anguli æquales DAB, DCB. Cùm ergo per conſtructionem duo latera DA, AB, ſint æqualia duobus lateribus DC, CB, vtrumque vtrique, contineátque angulos æquales oſtenſos DAB, DCB, in triangulis DAB, DCB, anguli ADB, CDB, erunt æquales per prop. 4. ergo vlterius in triangulis ADE, CDE, cùm anguli prædicti ADE, CDE, æquales contineãtur ab æqualibus lateribus AD, DE; CD, DE, relatiuè, erunt per 4. prop. cit. anguli deinceps ad E æquales, & baſes AE, CE æquales: Præterea cùm in triangulis AEB, CEB, duo latera AE, EB, ſint æqualia relatiuè duobus lateribus CE, EB, contineant per 4. prop. cit. anguli ABE, CBE, illorum æquales. Datum ergo angulum ABC bifariam diuiſimus, ſicut fuit imperatum.

COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Si ſuper eadem recta linea conſtituta ſint ad eaſdem vel diuerſas partes duo diuerſa triangula iſoſcelia: recta linea tranſmiſſa per eorum angulos recta data oppoſitos, producenda ſi opus ſit: ſingulos illos angulos bifariam diuidet.*

IN primæ praxeos demonſtratione oſtendimus rectã BD diuidere angulum ABC in duos angulos æquales ABD, CBD; tum etiam angulum ADC in duos æquales ADB, CDB; qui duo anguli diuiſi ſunt oppoſiti rectæ AC, pertinentque ad triangula iſoſcelia ABC, ADC poſita ad partes diuerſas rectæ AC, atque ita explicata eſt prima pars huius corollarij. Fig. 32.

Secunda ſic explicatur. oſtenſa ſunt triangula ADC, ABC, iſoſcelia conſtituta ad partes eaſdem ſupra rectã AC; tum rectam DB productã vltra B in E, ſecare angulos ADC, ABC, oppoſitos rectæ AC, bifariam. & quidem in demonſtratione ſecundæ praxeos.

COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Quilibet angulus rectilineus in multas partes æquales numero pari diuidi poteſt, in proportione dupli.*

SI enim quilibet poteſt per hanc propoſitionem diuidi in duas partes æquales; ſingulæ illarum iterum bifariam ſecari poterunt, vnde fient quatuor æquales, & ſic in infinitũ; quare numero pari quilibet angulus rectilineus diuidi poterit in proportione dupli.

COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Si duo triangula iſoſcelia, vel æquilatera diuerſa, ſiant ſupra eandem rectam lineam, ad eaſdem partes: recta linea coniungens angulos eorum oppoſitos data recta, ſecabit; & baſim ipſam.*

HOc explicatum eſt in conſtructione ſecundæ praxeos.

## PROPOSITIO X.

### Datam rectam lineam finitam, bifariam ſecare.

SVppoſitio. Recta linea AC, ſit ſecanda in duas partes æquales, quod exequemur duobus modis diuerſis. Fig. 32.

Conſtructio primæ praxeos. Per propoſitionem 1. ſuper data recta linea AC, fiat triangulum ABC iſoſceles, & infra ipſam aliud ADBC, ducatur que recta BD, quæ ſecabit obuiam rectam AC datam in E per 3. coroll. præcedentis propoſitionis. Dico rectam AC ſectam eſſe in E, in duas partes æquales AE, CE.

Conſtructio ſecundæ praxeos. Super recta AC fiat triangulum iſoſceles ABC, & maiore interuallo ſuper eadem AC, aliud triangulum iſoſceles ADC; rectaque DB ducenda producatur donec ſecet rectam AC in E per 3. coroll. præcedentis propoſitionis. Dico rectam AC ſectam eſſe in E, bifariam.

Demonſtratio vtriuſque praxeos. Per corollarium noſtrum 1. prop. præced. angulus ABC ſectus eſt bifariam ab recta BE. Cùm igitur duo triangula ABE, CBE, latera habeant æqualia relatiuè, AB, BE, AC, AE, anguloſque æquales ab eis contentos, per quartam propoſitionem baſes eorum AE, CE, erunt æquales. Secta igitur eſt recta AC in duas partes æquales, ſicut fuit mandatum.

COROL-

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Data quælibet recta linea finita, poteſt diuidi in multas numero pari partes æquales in proportione dupli.*

NAm per iſtam propoſitionem poteſt diuidi bifariam; & eius partes, iterum bifariam; & eius quatuor partes, iterum bifariàm, vnde exurgent numero octo; & ſic deinceps in proportione dupla numero pari, quod erat explicandum.

## PROPOSITIO XI.

### Data recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

Fig. 33. SVppoſitio, ſit data recta AC, & punctum datum in ea E ex intermediis, vel alterum extremorum ſuorum, puta A; oporteat ex puncto E, vel A, rectam lineam excitare ad angulos rectos ipſi AC datæ rectæ.

Constructio primi caſus, quando punctum E eſt ex intermediis rectæ datæ AC. centro E, interuallo EC fiat circuli circumferentia ſecans rectam AC datã in A; & ſuper AC recta fiat triangulum iſoſceles ABC, per 1. prop. Recta linea BE erit ad angulos rectos ipſi AC.

Demonſtratio. Per def. 15. rectæ AE, CE, erunt æquales, & per conſtructionem erunt rectæ BA, BC, æquales, quia latera trianguli iſoſcelis facti ABC, cuius anguli A & C, ad baſim AC, erunt æquales per 5. prop. Triangula igitur EAB, ECB, Cùm habeant duo latera relatiuè æqualia prædicta, continentia æquales angulos A, C, erunt eorum anguli ad E deinceps æquales per 4. prop. ideoq́ue recti per def. 10. Rectam ergo poſuimus EB, lineam ad angulos rectos in E puncto rectæ AC, ſupra ipſam AC.

Conſtructio Secundi caſus. In recta data AC, ex puncto aliquo puta E ex intermediis illius erigatur recta linea EB illi perpendicularis per praxim præcedentem; ſumaturq́ue ex ea per prop. 3. recta EF æqualis rectæ EA: & per eandem praxim ex puncto F erigatur altera recta EG ad angulos rectos ipſi EB; & per 9. prop. diuidatur biſariam angulus rectus AEF per rectam EG, quæ occurret in G rectæ F, per 13. ax. nam recta EF incidens in rectas GF, EG, facit internos angulos EFG, FEG, duobus rectis minores, exiſtente recto EFG, & alio FEG dimidio recti per ipſam conſtructionem: denique ducatur recta AG. Dico rectam GA vel AG eſſe ad angulos rectos in A ſupra rectam datam AC, in extremo illius A.

Demonſtratio ſecundi caſus. Duo triangula GEF, GEA, habent per conſtructionem latera relatiuè æqualia GE, EF, GE, EA, & angulos ſub ipſis æquales: ergo per prop. 4. anguli GAE, GFE, erunt æquales; ſed angulus GFE eſt rectus, ergo etiam rectus erit angulus GAE. Ereximus ergo rectam AG ad angulos rectos ipſi AC, in eius extremo A, ſicut fuit propoſitum.

Aliam praxim geometricam dabimus in prop. 31. lib. 3.

## PROPOSITIO XII.

### Super datam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam deducere.

SVppoſitio. Datum ſit punctum B extra lineam rectam datam AC interminatam, ex quo demittenda ſit recta linea ad angulos rectos ipſi rectæ AC. Fig. 32.

Conſtructio primæ praxeos. Centro B puncto dato, & interuallo ſecante rectam datam AC, fiat circuli circumferentia ſecans rectam datam in A & C: & infra rectam AC, Seu ad partes contrarias puncti B dati, fiat per 1. prop. triangulum iſoſceles ADC, ducanturq́ue rectæ BA, BC, BD, hæc BD ſecans rectã AC in E, erit ad angulos rectos ipſi AC deducta ex puncto B. quod ſic oſtenditur.

Demonſtratio huius praxeos. Per def. 15. rectæ BA, BC, ſunt æquales, ergo erit triangulum iſoſceles ABC per def. 24. & per coroll. noſtrum 1. propoſitionis 9. recta BD, diuidet angulos ſingulos ABC, ADC, bifariàm. Cùm ergo in triangulis ABE, CBE, duo latera ſint æqualia relatiuè, AB, EB, CB, EB, & angulos contineant æquales ABE, CBE, erunt per 4. eorum anguli deinceps ad E æquales: ergo per def. 10. ſinguli erunt recti, & recta linea BE demiſſa erit perpendicularis ad rectam AC, ex puncto extra eam dato quod non in directum eius.

Conſtructio ſecũdæ praxeos. Facto circulo ex B vti in prima praxi, ſecante rectam datam interminatam in punctis A & C, ductiſq́ue rectis BA, BC, efficientibus triangulum ABC iſoſceles vti in prima praxi oſtendimus; fiat maiore interuallo ſupra rectam AC, ad eaſdem partes B, aliud triangulum iſoſceles ADC per 1. prop. & recta linea DB tranſmittatur producenda vltra B donec ſecet AC rectam in E, quam ſecabit, tum etiam angulum ABC, vti conſtat ex noſtro

C coroll.

coroll. 1. & 3. prop. 9. Dico rectam BE deductam ex B puncto extra rectam interminatam eſſe perpẽdicularem ipſi in E puncto ſuo.

Demonſtratio huius ſecundæ praxeos. Recta BE per noſtrum coroll. 1. prop. 9. diuidit angulum ABC trianguli iſoſcelis ABC, in duos angulos æquales ABE, CBE; vnde reſultant duo triangula ABE, CBE, quorum anguli erunt deinceps ad E æquales, vti oſtendimus in demonſtratione primæ praxeos: ergo per def. 10. ſinguli erũt recti, & linea recta BE erit perpendicularis rectæ interminatæ datæ. Fecimus ergo imperatum.

Aduerte primas praxes propoſitionum 9. 10. & huius 12. inſeruire maximè quando tàm ſupra quàm infra rectam datam eſt ſufficiens ſpatium deſcribendi triangula æquilatera vel iſoſcelia. Praxes verò ſecũdas tunc vſui eſſe, quando in plano rectæ datæ vel anguli, non eſt commodũ ſpatium deſcribendi illa triãgula in oppoſitis partibus, ſed ſolũ in vna.

Fig. 34. En aliam praxim tertiam, quando ſpatium eſt ſupra & infra rectam datam. Conſtructio. Puncto aliquo puta A, vt centro in recta data, & interuallo vſque ad punctum datum B, fiat circuli circumferentia ſecans rectam datam; tùm alio puncto C in data recta vt centro, & interuallo vſque punctum datum B, fiat alia circuli circumferentia, ſecans aliam circumferentiam factam tam in puncto B dato, quàm in alio D, quod erit oppoſitum puncto B dato ad partes diuerſos rectæ datæ. Dico rectam lineam BD ducendam, ſecturam rectam datam in E intermediam, & eſſe perpendicularem ipſi datæ deductam ex puncto B dato extra illam. Pro demonſtratione, ex punctis B & D, ducantur rectæ lineæ AB, CB, AD, CD. & conſiderentur tres caſus diuerſi, Primus quod recta linea BD, ducta poſſit habere duo triangula BAD, BCD, iſoſcelia, propter laterum CB, CD æqualitatem ex natura circuli, tùm AB, AD, ad vtraſque partes ſuas, ut in prima figura. Secundus, quod dicta duo triangula iſoſcelia obtinere poſſit ad vnam ſui partem, vt in 2. figura. Tertius, quod vnicum ſolum exiſtere poſſit triangulum iſoſceles factum, concurrentibus duabus rectis ɔB, ɔD in directum, vnamque rectam lineam efficientibus BɔD, & concurrente cum recta BED, ita vt ſint vna eademque; vt in eadem ſecunda figura videre eſt.

Demonſtratio primi caſus eſt eadem quæ primæ praxeos ſuperioris, conſiderando BED ductam pro data, & perpendicularem probandam rectam AEC, datam, ipſi BED.

Demonſtratio ſecundi caſus, eſt eadem quæ ſecundæ praxeos, conſiderando rectam datam ACE probandam eſſe ad angulos rectos ductæ BED tanquam datæ. Sunt enim ſibi inuicem omnes rectæ lineæ perpendiculares alijs.

Demonſtratio tertij caſus facilis erit in 2. fig. Quia enim in triangulis AEB, vel AɔB; AED, vel AɔD, duo latera AE vel Aɔ; EB vel ɔB; ſunt æqualia duobus lateribus AE vel Aɔ; ED vel ɔD; vtrumque vtrique; nam ex natura circuli rectæ ɔB, ɔD, ſunt æquales; baſeſque AB, AD, ſunt æquales: erunt per 8. prop. anguli AɔB, AɔD; vel AEB, AED, æquales; qui cùm ſint deinceps ad rectam AE, erunt per def. 10. ſinguli recti, & recta linea BE perpendicularis datæ deducta ex puncto B extra eam dato.

## PROPOSITIO XIII.

### Cùm recta linea ſuper rectã conſiſtens lineam angulos facit; aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

SVppoſitio. Recta linea DB vel EB, inſiſtat ſupra rectam AC, in puncto eius B. Fig. 2. Dico ipſam rectam DB, vel EB, efficere cum recta AC, vel duos rectos angulos, vel duobus rectis æquales.

Demonſtratio quod quæcumque recta linea vt DB inſiſtens ſupra rectam AC, non efficiat niſi duos angulos ABD; vel CBD, deinceps; & ſic de alia quacumque recta inſiſtente alteri rectæ: erit huiuſmodi. Per def. 8. angulus rectilineus eſt penes duas rectas lineas AB, DB, ſe mutuò tangentes in B, & non in directum iacentes in eodem plano; inſiſtere autem rectam DB ſupra ABC, eſt non in directum iacere, ergo iſtæ duæ rectæ AB, DB vnum angulum ABD conſtituent: Præterea quia recta BC eſt in directum rectę BA, (vnica enim eſt data recta AC, ) alium angulum DBC conſtituet cum inſiſtente DB, ex definitione 8. cit. & quia non dantur plures rectæ lineæ quam duæ DB inſiſtens, ABC alteri cui inſiſtit, impoſſibile eſt, vt recta inſiſtens DB, ipſi AC in puncto eius B, plures conſtituat angulos quàm duos ABD, DBC, qui ſunt deinceps ad ipſam rectam DB, inſiſtentem.

Demonſtratio autem quod iſti duo anguli deinceps ſint vel recti, vel duobus rectis æquales, ſic erit. Aut recta inſiſtens erit perpendicularis alteri, vel non ſeu inclinata: ſi primum efficiet cum ea duos angulos deinceps rectos per def. 10. Si ſecundum qualis eſt in

exemplo

exemplo recta DB: tunc per 11.prop. excitabimus in puncto B, rectam BE perpendicularem ipſi AC; eruntque per def. 10. duo anguli deinceps ABE, CBE, recti ambo: quibus per axioma 19. erunt æquales tres anguli ABD, DBE, EBC. Iam verò vel duo anguli ABD, DBC, ſi non ſint æquales tribus ABD, DBE, EBC, angulis, ſint ſi fieri poſſit inæquales: ex his inæqualibus demendo angulum communem ABD, relinquentur anguli duo DBE, CBE inæquales angulo CBD, hoc eſt partes ſimul ſumptæ erunt inæquales toti ſuo CBD angulo, contra axioma 19. hoc abſurdum manifeſtam facit falſitatem poſitionis angulorum duorum ABD, DBC inæqualiũ tribus ABD, DBE, EBC angulis: erunt igitur æquales. Et per 1. axioma erunt etiam illi duo anguli ABD, DBC, æquales duobus rectis, ſi non fuerint recti.

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Recta linea inſiſtens alteri recta, angulos deinceps duos tantummodò efficit.*

HOc primo loco demonſtrauimus, videbaturque ab Authore indicari.

COROLLARIVM NOSTRVM

II.

*Omnes anguli poſſibiles in puncto vno vnius recta linea, verſus vnam ſuam partem; ſunt æquales duobus rectis.*

NAm per iſtam prop. inſiſtente linea vna recta ſuprà aliam, fiunt anguli duo æquales duobus rectis: omnes autem alij ab eodem puncto verſus eandem partem illorum duorum, erunt partes horum duorum: ergo cùm per axioma 19. partes omnes ſimul ſumptæ ſint æquales toti, & tota illa duo, videlicet duo anguli primi ſint æquales duobus rectis, erunt reliqui omnes etiam æquales duobus rectis per axioma 1. quod erat concludendum.

COROLLARIVM NOSTRVM

III.

*Recta lineá inſiſtens alteri rectæ, & efficiens ex vna parte vnum angulum minorem altero, iſte erit acutus, & alter obtuſus.*

NAm per coroll. 1. efficit ſolum duos angulos deinceps, qui per iſtam prop. ſunt æquales duobus rectis, ergo ſi vnus fuerit acutus hoc eſt minor recto, alter erit obtuſus hoc eſt maior recto.

COROLLARIVM NOSTRVM

IV.

*Ex vno puncto recta lineæ non poſſunt ad eaſdem partes dua aut plures recta diuerſa ad ipſam perpendiculares educi.*

SIc enim ſequeretur vnum angulum rectum eſſe maiorem aut minorem altero, contra 12. axioma.

## PROPOSITIO XIV.

Si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ lineę non ad eaſdẽ partes ductæ, eos qui ſunt deinceps angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

SVppoſitio. Ad punctum B, rectæ DB, duæ rectæ lineæ BA, BC, eductæ ſint ad partes diuerſas, efficientes cum data DB, duos angulos ABD, CBD, æquales duobus rectis. Dico duas rectas BA, BC, vnam rectam ABC conſtituere, vel eſſe indirectum, quod idem eſt. Fig. 35.

Conſtructio. Per petitionem quartam, Concipiatur angulus vnus DBA, æqualis angulo ABD prædicto, & recta linea AB producatur vſque ad C vltra B.

Demonſtratio. Recta BD inſiſtens rectæ ABC, efficiet per prop. 13. præcedentem duos angulos DBA, DBC, æquales duobus rectis: ſed ex datis duo anguli ABD, CBD, quos efficiunt duæ rectæ lineæ BA, BC, cum alia recta DB, ſunt æquales duobus rectis; & per 12. ax. omnes anguli recti ſunt æquales; ergo per 1. ax. duo anguli ABD, CBD, erunt æquales duobus angulis DBA, DBC: tàm ab illis duobus, quàm ab iſtis alijs duobus ſi ſuſtulerimus æquales angulos in conſtructione poſitos ABD, DBA, relinquentur duo an-

guli CBD, BDC æquales. Ergo ſuperpoſiti inuicem iſti duo vltimi anguli, uti oportet iuxta petitionem 5. congruent per axioma 9. tùm etiam alij duo æquales anguli ABD, DBA: rectæ ergo lineæ duæ BA,BC, ductæ ad partes diuerſas puncti B, congruent cum recta ABC, ideoque vti illa, efficient vnam lineam rectam: quæ enim congruunt ſunt eiuſdem rationis per axioma citatum 9. Si ergo ad aliquam rectam lineam atque ad eius punctum,&c. Quod erat demõſtrandum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si ab aliquo puncto ex intermedijs recta linea ad diuerſas partes educantur dua recta linea, efficientes angulos ad verticem cùm data aquales inter ſe: erunt dua illa recta linea educta, in directum, ſeu vnam efficient rectam lineam.*

Fig. 36. EX puncto E ex intermedijs rectæ AB, eductæ ſint ad partes diuerſas duæ rectæ lineæ ED,EC, efficientes cum data AB angulos ad verticem AED, CEB æquales inter ſe. Dico rectas ED,EC, efficere vnam rectam lineam CED.

Demonſtratio. Æqualibus angulis datis AED, CEB, addatur communis BED, fient duo anguli AED, DEB, æquales duobus angulis CEB, BED: Sed duo primi ſunt æquales duobus rectis per prop. 13. ergo etiam duo poſtremi CEB,BED, erunt æquales duobus rectis per 1. ax. lib. huius. Ergo per iſtam propoſitionem duæ rectæ EC,ED, efficient vnam rectam lineam CED, quia ab puncto E, rectæ BE, eductæ ſunt ad partes diuerſas, & oſtenſæ ſunt efficere angulos CEB, DEB æquales duobus rectis cum recta BE. Demonſtrauimus ergo intentum coroll. huius.

## PROPOSITIO XV.

### Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecuerint, angulos ad verticem æquales inter ſe efficient.

Fig. 36. SVppoſitio. Duæ rectæ lineæ AB,CD, ſe mutuò decuſſent in E. Dico angulos ad verticem AED, CEB eſſe inter ſe æquales; vel alios duos etiam ad verticem AEC,BED, eſſe æquales inter ſe.

Demonſtratio. Sint per impoſſibile, duo anguli ad verticem AED,CEB, inæquales, eis ſi addamus communem angulum BED, fient duo anguli AED,BED, inæquales duobus angulis CEB,BED; ſed per prop. 13. tam duo illi AED, BED, quàm duo iſti CEB, BED, ſunt æquales duobus rectis: ergo contra axioma 12. anguli æquales duobus rectis erũt inæquales angulis æqualibus duobus rectis. Abſurdum, ergo abſurda poſitio contradicens poſitioni huius propoſitionis, quæ ideo demonſtrata remanebit. Simili diſcurſu oſtendentur alij duo anguli ad verticem AEC, BED, æquales eſſe.

## COROLLARIVM I.

*Si dua recta linea ſe mutuò decuſſauerint; efficient quatuor angulos aquales quatuor rectis.*

NAm oſtẽſum fuit per prop. 13. duos angulos AED,DEB, eſſe æquales duobus rectis angulis; & oſtenſum eſt angulos alios AEC,CEB, eſſe æquales ſuis prædictis angulis ad verticem, iam oſtenſis æqualibus duobus rectis. erunt etiam iſti duo vltimi æquales duobus rectis per 1. axioma. Quatuor ergo anguli AED,DEB,BEC,CEA, erunt æquales quatuor rectis. Fig. 36.

## COROLLARIVM II.

*Omnes anguli rectilinei poſſibiles circa vnum punctum, ſunt aquales quatuor rectis.*

PEr hoc punctum poſſumus concipere vnam rectam lineam decuſſantem aliam rectam: anguli quatuor quos efficient iſtæ duæ rectæ lineæ comprehendent omnes poſſibiles angulos rectilineos circa hoc punctum; ergo per 8. axioma, omnes illi anguli poſſibiles erunt æquales iſtis quatuor angulis, qui per præcedens corollarium ſunt æquales quatuor rectis: ergo per 1. ax. omnes anguli poſſibiles rectilinei circa vnum punctum, erunt æquales quatuor rectis.

## PROPOSITIO XVI.

### Cuiuſcumque trianguli vno latere producto, externus angulus quolibet interno & oppoſito maior eſt.

SVppoſitio. Trianguli inſtar omniũ ABC, latus vnum AC productum ſit vltra C, vſque D. Dico angulum externum BCD, maiorem eſſe quolibet ex internis trianguli dati angulorum CAB,ABC, & oppoſitis.

Con-

Fig. 37. Conſtructio, producatur etiam latus BC vltra C, vſque ad E, & aliud latus AB, vtrimque vſq; ad F & H, quod ſuſtinet duos angulos internos & oppoſitos prædictos CAB, ABC.

Demonſtratio. Si angulus BCD exterior non ſit maior angulo interno & oppoſito CAB, erit vel æqualis, vel minor. Eſto æqualis, tunc addito communi angulo ACB, fient per 2. axioma duo anguli CAB, ACB, æquales duobus angulis ACB, DCB; iſti duo poſtremi ſunt per prop. 13. æquales duobus rectis, ergo duo alij CAB, ACB, erunt per 1. axioma æquales duobus rectis: Concurrent ergò duæ rectæ AB, CB, ad partes duorum angulorum æqualium duobus rectis. Sed quia anguli duo deinceps ad A ſunt per 13. prop. æquales duobus rectis, tùm etiam alij duo anguli deinceps ad C, videlicet BCA, ECA, ſunt æquales duobus rectis; duoque deinceps ad A, & duo deinceps ad C, ſunt ſimul ſumpti æquales quatuor rectis, ex quibus ſi demantur duo CAB, ABC, conceſſi æquales duobus rectis, remanebunt duo FAC, ECA, æquales duobus rectis; duæ ergo rectæ lineæ BAF, BCE, concurrent, vti ipſæ eædem AB, CB, ad partes duorum rectorum; & ſic duæ rectæ lineæ ſuperficiem ſeu figuram concludent, contra axioma 14. quod eſt abſurdum. Iam verò ſit angulus BCD, minor angulo CAB; his inæqualibus ſi addatur communis angulus, fient per axioma 4. duo anguli BCD, ACB, minores duobus angulis CAB, ACB: ſed duo deinceps ad C anguli ſunt per prop. 13. æquales duobus rectis, ergo alij duo CAB, ACB, erunt maiores duobus rectis, & nihilominus de facto concurrunt duæ rectæ lineæ AB, CB, ex ea parte. Et quia duo anguli ad A ſunt æquales duobus rectis per prop. 13. & per eandem etiam anguli BCA, ECA, ſunt æquales duobus rectis, illi quatuor anguli erunt æquales quatuor rectis; ex quibus ſi demantur duo CAB, BCA, conceſſi duobus rectis maiores, relinquentur alij duo FAC, ECA, minores duobus rectis; ergo per 13. ax. rectæ lineæ BAF, BCE, concurrent etiam ad partes angulorum FAC, ECA; & ſic duæ rectæ comprehendent ſpatium, contra axioma 14. quod eſt abſurdum. Cùm igitur ex poſitionibus anguli DCB exterioris æqualis vel minoris angulo interno & oppoſito BAC, ſequantur abſurda allata, ipſæ erunt impoſſibiles, & poſitio Authoris vera, videlicet quòd angulus exterior BCD, ſit maior interno & oppoſito BAC. Non diſſimili ratione oſtendemus angulum eumdem BCD eſſe maiorem alio interno & oppoſito angulo ABC. & ſic propoſitum demonſtratum erit.

## PROPOSITIO XVII.

### Cuiuſcumque trianguli, duo anguli omnifariàm ſumpti, ſunt duobus rectis minores.

Suppoſitio. Trianguli ABC ſumantur quilibet duo eius anguli, verbi gratia BAC, & ACB. Dico eos eſſe duobus rectis angulis minores: & ſic de omnibus aliis. Fig. 38.

Conſtructio. Producatur ad vnam partem latus AC ſuſtinens duos electos angulos trianguli, vſque ad D.

Demonſtratio. Si non ita ſit vti aſſerit hæc propoſitio, ſint vel duobus rectis æquales, vel duobus rectis maiores. Si primum, quandoquidem per prop. 13. duo anguli ad A deinceps ſunt duobus rectis æquales, & alij etiam duo ACB, ECA; erunt illi quatuor anguli, quatuor rectis æquales; ex quibus ſi tollantur duo poſiti BAC, ACB, æquales duobus rectis, relinquẽtur alij duo FAC, ECA, æquales duobus rectis: ergo per axioma 13. vti duę rectæ FAB, ECB, concurrũt ad partes duorum rectorum BAC, ACB. concurrent etiam ad partes aliorum duorum rectorũ FAC, ECA; & ſic contra axioma 14. figuram concludent, quod eſt abſurdum. Si ſecundum, ſi demantur duo anguli BAC, ACB, maiores duobus rectis, ex prædictis quatuor rectis relinquentur duo FAC, ECA, minores duobus rectis: & ſic per axioma 13. concurrent rectæ lineæ BAF, BCE, ad partes iſtas; quare concludent ſpatium, contra idem axioma 14. abſurdum hoc & ſuperius indicant poſitiones aduerſantes huic propoſitioni eſſe falſas, quare relinquitur demonſtrata propoſitio.

## COROLLARIVM I.

*In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, ſinguli reliquorum erunt acuti.*

Si enim alter illorum eſſet rectus vel obtuſus, in Triangulo anguli duo eſſent vel duo recti, vel duobus rectis maiores: recti quidẽ ſi dato vno recto, alter etiam ſit rectus: maiores verò duobus rectis, ſi dato vno obtuſo, alter etiam ſit rectus vel obtuſus. Quod eſt contra iſtam propoſitionem.

### COROLLARIVM II.

*Si recta linea cum alia recta efficiat angulos inæquales, acutum vnum, & alium obtuſum: recta linea perpendicularis deſſa ab quocumque puncto eius ſuperiore extra aliam rectam datam, ad hanc datam, cadet ad partes anguli acuti.*

Fig. 38. EXempli gratia recta BC faciat cum recta AD angulum vnum acutũ BCA, & obtuſum BCD: Dico rectam lineam BC perpendicularem ipſi AD, deductam ab puncto B rectæ BC, dato extra rectam AD, cadere ad partes anguli acuti ACB. Si enim caderet ad partes anguli BCD obtuſi, qualis eſt recta BD; cùm angulus CDB ſit rectus per def. 10. & detur angulus ACB acutus, eſſet in triangulo BCD, angulus externus ACB minor interno & oppoſito recto BCD, contra 16. prop. Vel duo anguli eius BCD, & D, obtuſus datus,& rectus, maiores duobus rectis, contra iſtam propoſ. igitur cadet recta vti dictum eſt.

### COROLLARIVM III.

*Anguli omnes trianguli æquilateri ſunt acuti: tum etiam trianguli iſoſcelis duo anguli ad baſim erunt ſinguli acuti.*

CVm enim anguli ſinguli trianguli æquilateri ſint æquales per coroll. prop. 5. & per ipſam prop. anguli ad baſim iſoſcelis ſint æquales inter ſe, ſi vnus illorum rectus vel obtuſus eſſet, alter etiam rectus & obtuſus eſſet; quandoquidem debent eſſe æquales: & ſic duo anguli in triangulo æquilatero vel iſoſcele ad baſim eius, eſſent vel æquales duobus rectis vel maiores contra iſtam propoſitionem. Igitur erunt ſinguli dictorum angulorum acuti.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Vnica ſolùm recta linea deduci poterit perpendicularis ad rectam lineam ab puncto extra illam dato, & quod non ſit in directum illius.*

Fig. 38. ESto ſi fieri poſſit ab puncto B, deductæ ſint duæ rectæ BG, BC, ad angulos rectos ſeu perpendiculares ipſi AD: tunc in triangulo GBC, erunt duo anguli BGC, BCG, recti ſinguli,& æquales ambo duobus rectis, contra præſentem propoſitionem. Quod abſurdum deduceretur ſi in figura vltima prop. 12. recta AE, non eſſet æqualis rectæ CE: ſumpta enim recta AF æquali ipſi CE minori, & ducta BF, quia in triangulis ABF, CBE, duo anguli A & C ſunt æquales per 5. prop. duoque latera vtrumque vtrique æqualia, illos angulos continentia, eſſent per 4. prop. anguli AFB, CEB, æquales, ideoque recti ambo, quandoquidem in E eſt rectus per conſtructionem illius figuræ, ideoque etiam alij deinceps ad iſtos eſſent recti & æquales per 12. ax. ideoque per def. 10. ſingulæ rectæ BE, BF, perpendiculares.

## PROPOSITIO XVIII.

### Omnis trianguli maius latus, maiorem angulum ſubtendit.

SVppoſitio. Trianguli ABC datum ſit latus BC maius lateribus reliquis AC, AB: Dico quod latus hoc maius BC, ſubtendat angulum maiorem BAC. Fig. 39.

Conſtructio. Latera reliqua BA, AC, diuidantur biſariàm per prop. 10. illud in E, hoc in D; & excitentur per prop. 11. rectæ lineæ EF, DG, ex punctis E & D, perpendiculares ſuis proprijs rectis AB, AC; denique rectæ lineæ ducantur FA, GA, ex punctis F & G, in quibus ſecant prædictæ perpendiculares productæ in infinitum, maius latus datum BC.

Demonſtratio. In triangulis GDA, GDC, duo latera GD, DA, ſunt æqualia duobus GD, DC, vtrumque vtrique, anguloſque in D continent rectos, ideoque æquales per ax. 12. ergo anguli GCD & GAD, erunt per 4. prop. æquales inter ſe: ſed angulo GAD maior eſt angulus BAC per axioma 8. ergo per 1. axioma etiam angulus BAC erit maior angulo GCD. Eodem diſcurſu, in triangulis BEF, AEF, duo latera BE, EF, ſunt æqualia vtrumque vtrique duobus AE, EF, anguloſque in E continent rectos, æquales per ax. 12. ergo per 4. prop. anguli illorum B & EAF, æquales erunt; ſed angulus BAC maior eſt angulo EAF per axioma 8. ergo per axioma 1. angulus BAC maior erit angulo ABC. quod erat concludendum.

### COROLLARIVM.

*Trianguli ſcaleni, anguli omnes ſunt inæquales.*

CVm enim latera ſint inæqualia, ſemper maius maiorem angulum ſubtendet per iſtam propoſitionem. Et ſic omnes anguli erunt inæquales.

COROL-

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si duo latera trianguli fuerint inæqualia, anguli ipſis ſubtenſi erunt inæquales.*

NAm maiori lateri ſupponetur maior angulus; & minori minor per iſtam prop. ergo erunt inæquales anguli trianguli ſuppoſiti inæqualibus lateribus.

## PROPOSITIO XIX.

### Omnis trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.

Fig. 39. SVppoſitio. Trianguli ABC, angulus BAC ſit maior quolibet angulorum reliquorum ABC, ACB: Dico latus BC eſſe maius in triangulo dato, hoc eſt maius quàm BA, vel CA, quia illi lateri BC ſupponitur angulus datus BAC maior.

Sit ſi fieri poſſit quodlibet reliquorum laterum AB, AC, lateri BC, æquale: erunt per 5. prop. anguli CAB, CBA, æquales; vel anguli BAC, BCA æquales contra data. Vel cùm ſit ex poſitione aduerſarij triangulum datum ABC æquilaterum, erit per coroll. prop. 5. æquiangulum. Contra data. igitur non poterit eſſe latus BC æquale vlli laterum reliquorum AB, AC.

Quod ſi dicatur minus quolibet illorum laterum, ita fiet conſtructio: de maiore latere BA, detrahetur per 3. prop. pars BE æqualis minori lateri BC, & ducetur recta EC. Eodem modo detrahetur de maiore CA pars CD, æqualis minori lateri CB, & ducetur recta DB.

Demonſtratio ſecundi caſus. In triangulo EBC iſoſceli erunt anguli BEC, BCE æquales per 5. prop. ſed per 16. angulus BEC maior eſt angulo BAC, ergo per 1. axioma angulus BCE erit maior angulo BAC & multò magis totus angulus BCA, maior erit angulo BAC, contra data. Præterea in triangulo etiam iſoſceli BDC, duo anguli CBD, CDB, ad baſim BD erunt æquales per 5. prop. ſed per 16. angulus CDB eſt maior angulo BAC, ergo per 1. axioma angulus CBD maior erit angulo BAC, & multò magis totus angulus CBA, maior erit angulo BAC, contra data. Hæc abſurda condemnant omnes poſitiones aduerſarij, ergo reliquæ huius propoſitionis vera erunt, videlicet maiorē angulum datum BAC, ſubtendi maiori lateri BC. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

*Rectarum omnium linearum ad rectam lineam terminatarum ab vno puncto extra eam dato quod non ſit in directum illius, breuiſſima eſt perpendicularis.*

CVm enim ſubiecta linea, & hæc perpendicularis ad illam, & quælibet alia ex ductis ab eodem puncto perpendicularis ad eandem ſubiectam efficiant triangulum, rectangulum ob angulum perpendicularis rectum iuxta def. 10. & 26. ſemper hæc perpendicularis erit minor alteri rectæ ſuppoſitæ angulo prædicto recto, per iſtam propoſitionem: & ſic de omnibus alijs. Igitur breuiſſima erit perpendicularis recta prædicta reſpectu aliarum prædictarum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Triangulum habens tres angulos inæquales, erit ſcalenum.*

NAm cùm dentur anguli inæquales vnus comparatus cum quolibet alio è tribus dati trianguli erit maior altero, ergo per hanc propoſitionem ſubtendetur maiori lateri; & ſic tria latera huius trianguli erunt inæqualia, hoc eſt triangulum erit ſcalenum.

## PROPOSITIO XX.

### Omnis trianguli duo latera quomodolibet ſumpta, reliquo ſunt maiora.

SVppoſitio. Trianguli exempli gratia ABC, duo latera AB, BC, eſſe reliquo AC latere maiora: tùm latera duo BA, AC, eſſe maiora reliquo BC: tùm latera duo AC, CB, eſſe maiora reliquo AB. Fig. 40.

Conſtructio primæ partis. Si duo latera AB, BC, non ſint maiora reliquo AC, erunt vel æqualia vel minora: tunc per prop. 3. ex maiore recta AC, quàm quodlibet laterum AB, CB, detrahenda erit pars, v. g. AD, æqualis ipſi lateri AB, & relinquetur altera pars DC, æqualis ipſi BC ſi ponantur æqualia latera duo ſimul AB, BC, æqualia lateri AC. Quod ſi ponantur minora latera AB, BC, latere AC, detracto AD æquali ipſi AB, relinquetur DC maius quàm BC. hoc poſito ſequitur.

Demonſtratio primi membri, erunt per 5.

 prop.

prop. anguli ad baſim BD iſoſcelis æquales ABD, ADB: tùm etiam anguli CBD, CDB æquales ad baſim BD alterius trianguli iſoſcelis: ergo per 2. axioma, erunt duo anguli ABD, CBD, hoc eſt totus angulus ABC, æqualis duobus angulis deinceps ad D, qui ſunt per propoſ. 13. æquales duobus rectis; ergo per 1. ax. erit in triangulo dato vnus angulus ABC, æqualis duobus rectis, contra prop. 17.

Demonſtratio ſecundi membri. erunt etiam per 5. prop. anguli duo ABC, ADB æquales inter ſe, ad baſim BD, trianguli iſoſcelis; & angulus DBC oppoſitus maiori lateri DC, erit maior angulo CDB oppoſito minori lateri CB, per prop. 18. quod ſi æqualibus angulis ABD, ADB, addantur inæquales anguli DBC, CDB, fiet duo anguli ABD, CBD, hoc eſt totus ABC maior angulis duobus deinceps ad D, per ax. 4. ſed anguli duo deinceps ad D ſunt æquales duobus rectis, ergo per 1. axioma angulus ABD, erit maior duobus rectis, contra prop. 17. Non ergo erunt duo latera AB, BC ſimul æqualia, vel minora reliquo AC, ergo maiora ſicuti propoſitum fuit.

Conſtructio ſecundæ partis. Si duo latera BA, AC ſunt æqualia vel minora reliquo latere BC, oportebit per prop. 3. detrahere rectam BE æqualem lateri BA; tunc reliqua pars EC erit æqualis alteri lateri AC, vel maior latere AC, pro diuerſa poſitione prædicta. Ducendaque erit recta AE ab angulo A facto ab duobus lateribus BA, CA, de quibus eſt ſermo.

Demonſtratio ſecundæ partis. Erunt per 5. prop. in triangulo iſoſcele ABE, anguli ad baſim AE æquales BAE, BEA: tùm ad baſim AE trianguli iſoſcelis alterius ACE, anguli æquales CAE, CEA; vel poſito altero membro angulus CAE maior erit angulo CEA per prop. 18. Ergo poſito primo membro, per 2. ax. duo anguli BAE, CAE, ſeu totus angulus BAC, erit æqualis duobus angulis deinceps ad E: & poſito ſecundo Membro, erit per 4. ax. totus angulus BAC, erit maior duobus angulis deinceps ad E: ſed iſti ad E deinceps anguli ſunt per prop. 13. duobus rectis æquales; ergo per 1. axioma totus angulus BAC, erit vel æqualis vel maior duobus rectis, contra prop. 17. non igitur erunt minora vel æqualia duo latera ſimul BA, AC, altero BC, ſed maiora ſicuti aſſertum eſt.

Conſtructio 3. partis. Si duo latera BC, CA, ſunt æqualia reliquo BA, vel minora illo; poterimus per 3. prop. reſcindere BF partem æqualem lateri BC, & reliqua pars FA, erit æqualis alteri CA lateri poſito primo caſu; & maior ſi ponatur ſecundus caſus. Denique ducatur recta FC.

Demonſtratio. In triangulo iſoſceli FBC, erunt per prop. 5. anguli BFC, BCF, ad baſim FC æquales in vtroque caſu; & in primo etiam duo anguli AFC, ACF, ad baſim FC trianguli iſoſcelis FAC, æquales erunt, & in ſecundo caſu angulus ACF, maior erit angulo AFC, per prop. 18. Iam verò per 2. axioma in primo caſu duo anguli ACF, BCF, erunt æquales duobus angulis deinceps ad F; & in ſecundo caſu erunt per 4. axioma duo anguli ACF, BCF, Hoc eſt totus angulus ACB, maior duobus angulis deinceps ad F: ſed per prop. 13. anguli duo ad F deinceps ſunt æquales duobus rectis; ergo per 1. ax. in primo caſu totus angulus ACB, erit æqualis duobus rectis; & in ſecundo caſu erit maior duobus rectis, contra prop. 17. Non igitur erunt duo latera ſimul BC, CA, æqualia, nec minora reliquo AB, ergo maiora ſicuti aſſerit propoſitio. Quæ ideo tota demonſtrata erit.

## PROPOSITIO XXI.

Si ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectę lineæ interiùs conſtitutæ fuerint: hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.

SVppoſitio. Si ſuper trianguli ABC, vno latere AC, ab extremitatibus eius A, & C, duæ rectæ lineæ AD, CD, intra triangulum ductæ fuerint: ad vnum punctū D: Dico has reliquis duobus AB, CB, trianguli dati lateribus minores quidem eſſe, ſed maiorem angulū ADC continere, quàm ſit angulus ABC contentus ab prædictis AB, CB lateribus trianguli dati ABC. *Fig. 41.*

Conſtructio. Ducatur recta BD, quæ producatur vltra D, ad E, hæc ſecabit angulum ADC, per coroll. noſtrum 1. prop. 9. tùm etiam producatur latus AD vltra D in F.

Demonſtratio ſecundæ partis Per prop. 16. angulus ADE maior eſt angulo ABD; tùm etiam angulus CDE maior eſt angulo CBD; ergo totus angulus ADC maior erit toto angulo ABC, per 1. axioma.

Demonſtratio primæ partis. Si rectæ AD, CD, ſint æquales duabus rectis AB, CB, propoſitio ſeptima ruit, quod eſt abſurdum. Si

eædem duæ rectæ ſint maiores duobus lateribus AB,CB,ſic argumentor, Eſto AD recta maior recta AB,erit per 18.angulus ABD maior angulo ADB,& per 1.ax.angulus ADE oſtenſus maior angulo ABD, maior erit angulo ADB;quare per noſtrum coroll. 3.prop. 13.angulus ADE erit obtuſus. Eodem modo ſi recta CD, ſit maior latere CB, erit per prop.18. angulus CBD maior angulo CDB; ſed angulus CDE oſtenſus eſt maior angulo CBD, ergo per 1.ax. angulus CDE multò maior erit angulo CDB; vnde per noſtrum coroll.3.prop.13.angulus CDE erit obtuſus: ideoq́ue totus angulus ADC compoſitus ex duobus obtuſis ADE, CDE,erit maior duobus rectis in triangulo ADC,contra prop.17. Igitur recta AD non erit maior nec æqualis rectæ AB; & recta CD non erit maior nec æqualis rectæ CB. Quod ſi dixerit aduerſarius rectam quidem AD eſſe maiorem latere AB, ſed rectam CD eſſe æqualem lateri CB, vel minorem illo. Contra primum effugium ſic argumentor,erunt in triangulo BCD iſoſceli ad baſim eius BD, anguli CDB, CBD æquales per 5.prop.ſed per 16.angulus CDE maior eſt angulo CBD, ergo per.1.ax.etiam maior erit angulo CDB; ideoq́ue per coroll. noſtrum 3.prop. 13.angulus CDE erit obtuſus: quare cùm ex datis aduerſarij oſtenderimus angulum ADE eſſe etiam obtuſum,totus angulus ADC in triangulo ADC, erit maior duobus rectis contra prop.17.quia componitur ex duobus obtuſis ADE, CDE oſtenſis ex poſitionibus aduerſarij:effugium ergo primum nullum erit. Contra ſecundum ſic argumentor, & vniuerſaliſſimè probatur tota prima pars, ita vt hæc ſola demonſtratio ſufficiat abſque præuio diſcurſu in hac parte prima.Duo latera DF, FC, ſunt maiora reliquo DC, per 20.prop. his inæqualibus ſi addatur commune latus DA, erunt per 4.axioma,duo latera AF, FC, maiora duobus AD, DC: ſimili modo per 20. prop. duo latera AB,BF ſunt maiora reliquo AF,his inæqualibus ſi addatur commune latus FC,erunt duo latera AB,BC maiora duobus AF, FC, per 4. axioma; ergo per 1.ax. duo latera AB, BC, multò magis erunt maiora duobus AD,DC. Quod erat oſtendendum.

## PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis lineis, quæ ſint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariã ſumptas, quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariàm ſumpta,reliquo ſunt maiora.

SVppoſitio. Datæ ſint tres lineæ rectæ A, B, C, quarum quælibet duæ ſimul ſumptæ ſint reliqua maiores: & ex his oporteat triangulum conſtituere. *Fig. 42.*

Conſtructio. Ex aliqua linea recta interminata,ab aliquo eius puncto puta E, detrahatur per prop.3.recta EF æqualis rectæ A; tùm ſumatur alia recta FG æqualis rectæ B; tùm recta GH æqualis rectæ C. Præterea centro F & interuallo FE, fiat circuli circumferentia quæ ſecabit rectam infinitam aſſumptam in puncto E, & in alio puncto I, per axioma 22: Inſuper centro G, & interuallo GH,deſcribatur alterius circuli circumferentia quæ tranſibit per H punctum, & ſecabit datam infinitam in alio puncto K verſus E, per citatum axioma 22,quodque punctum K erit vltra I, verſus E, ſed non vltra E, contineret enim recta GH ambas GF, FE, & ſic non eſſet GH minor reliquis duabus GF,FE,contra data: circumferentia autem circuli ſecundi, ſecabit circumferentiam circuli primi per axioma 26. ſitq́ue in puncto L. ex quo ad centra F & G, rectæ duæ lineæ LF, LG tranſmitti poterunt,quia non eſt in directum eorum, eo quod ſit ſupra rectam infinitam aſſumptam in qua ſunt centra prædicta. Dico triangulum FLG factum ex recta FG, & duabus LF, LG, habere tria latera æqualia tribus datis rectis lineis A,B,C.

Demonſtratio. Tota recta linea EH, per axioma 19. eſt æqualis tribus rectis EF, FG, GH, aſſumptis æqualibus datis A, B, C: Triangulum FLG, tria latera ſua habet æqualia tribus rectis EF, FG, GH; nam per def.15. recta FL, æqualis eſt rectæ FE, ideoque rectæ A, per 1. axioma,ſimili modo recta GL æqualis eſt rectæ GH, ideoque rectæ C; baſis autem FG poſita eſt æqualis rectæ B. Ergo trianguli tria latera FG, FL, GL, erunt æqualia tribus datis rectis lineis A,B,C.

44·

Digitized by Google

triãguli ſuppoſita minori angulo dato ABC.

Conſtructio ſimul & demonſtratio. Si baſis DF non ſit maior baſe AC, erit vel æqualis illi, vel minor. Si primum, quia in triangulis datis, latera dantur duo æqualia, vtrumque vtrique, & aduerſarius admittit baſes AC, EF, eſſe æquales, erunt per 8. prop. anguli ABC, DEF, æquales contra dicta; baſis ergo DF non poteſt eſſe æqualis baſi AC, ſed eſto ſecundum. Ergo de maiore baſe CA, detraham CD æqualem ipſi FD minori: tranſpoſito ergo triangulo DEF, ita vt inuertatur pars eius ſuperior infra rectam AC, & congruant extrema DF, extremis CD, hoc eſt F penetret C, & D ſit ipſum D, quandoquidem factæ ſunt æquales rectæ lineæ FD, CD, totæ congruent per axioma 9. Ducatur recta BE; & producatur recta ED, vltra D interminatè hæc ſecabit obuium latus AB in G. Imprimis quia data ſunt æqualia latera CB, CE, erit triangulum iſoſceles BCE, & per 5. prop. anguli eius CBE, CEB, erunt æquales. Præterea quia data ſunt latera ED, AB, æqualia, & lateri ED addita eſt recta DG, & de latere AB detracta eſt pars AG, erit recta EDG tota, maior recta BG: ergo cùm in triangulo GEB, latus GE ſit maius, & GB minus, illud GE maius maiorem angulum GBE reſpiciet; & iſtud minus GB, minorem angulum GEB ſubſternet, per prop. 18. his ergo inæqualibus angulis GBE maiori, GEB minori, ſi addamus æquales angulos oſtenſos CBE, CEB, fiet totus angulus GBC, vel ABC, maior angulo totali GEF vel DEF, contra data: abſurdum, ergo & poſitio aduerſarij falſa erit. Relinquitur ergo vt baſis DF ſit maior baſe AC; quandoquidem oſtendimus non poſſe eſſe æquales, nec poſſe eſſe minorẽ DF, altera AG. quod erat demonſtrandum ratiocinio allato.

## PROPOSITIO XXV.

Si duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, baſim verò baſi maiorem: Et angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum, angulo maiorẽ habebunt.

Fig. 45. SVppoſitio. Duo triãgula ABC, DEF, duo latera habeant AB, BC, DE, EF, æqualia vtrumque vtrique, hoc eſt AB ſit æquale ipſi DE, & BC ipſi EF, ſed baſis DF ſit maior baſe AC: Dico angulum DEF eſſe maiorem angulo ABC; illum contentum ſub dictis æqualibus lateribus, iſto ſub alijs dictis æqualibus lateribus.

Cõſtructio. De baſi FD maiore detrahatur recta FA æqualis minori baſi CA: & cõcipiatur tranſpoſitum triangulum ABC, ita vt baſis CA congruat rectæ AF iuxta 9. axioma, & angulus ABC, poſitus ſit infra rectam FA, vel CA, congruente puncto C ipſi F, & A ipſi A puncto rectæ FD. Ducaturque recta EB; & producatur recta BA vltra A, interminatè, quæ ſecabit in G, latus DE.

Demonſtratio. In triangulo GEB, latus GE eſt pars lateris DE æquali dato lateri AB; & recta BA cum recta AG, eſt maior recta BA, ideoque maior recta DE, & multò magis latere GE, per 1. axioma: ergo per prop. 18. angulus GEB erit maior angulo GBE: bis inæqualibus ſi addantur anguli FEB, FBE, æquales per prop. 5. eò quod latera FE, FB, data ſint æqualia: fiet per axioma 4. totus angulus GEF vel DEF, maior toto angulo ABF vel ABC. quod erat concludendũ. Quod ſi aliquando contingeret BA productam vltra A, concurrere in E, vt eſt BE recta: tunc manifeſta eſſet propoſitio; nam cùm anguli FBE, FEB ſint æquales oſtenſi, & angulus DEF ſit maior angulo FEB, erit etiam maior angulo FBC ſeu CBA.

## PROPOSITIO XXVI.

Si duo triãgula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod vni æqualium angulorum ſubtẽditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique; & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SVppoſitio. Triangula duo ABC, DEF, habeant angulos A, C, D, F, æquales, vtrumque vtrique, hoc eſt angulus A ſit æqualis angulo D, & angulus C ſit æqualis angulo F; vnumque latus habeant æquale alteri lateri, ſiue quod æqualibus dictis adiacet angulis, hoc eſt in exemplo ſint latera ACDF, æqualia; ſiue quod vni æqualium angulorum ſubtenditur, hoc eſt exempli gratia latera AB, DE ſint æqualia, ſubtenſa æqualibus angulis datis C, & F. Dico quod reliqua latera habebũt æqualia, vtrumque vtrique; hoc eſt in primo caſu Fig. 46.

Digitized by Google

mocaſu latera AB,DE,erunt ęqualia,& latera BC EF etiam æqualia; & in ſecundo caſu latera AC,DF erunt æqualia,tùm latera BC, EF: & in vtroque caſu, erunt reliqui eorum anguli B & E æquales.

Demonſtratio primi caſus. Per 9. axioma rectæ AC,DF,æquales datæ cõgruent ſuperpoſitæ;tùm angulus D,angulo A; & angulus F angulo C;quia dantur æquales.Iam verò in hac ſuperpoſitione trianguli CEF ſupra triangulum ABC,vel E extremũ lateris DE,cõgruit cum B extremo lateris AB, vel congruit cum puncto rectæ AB,infra B, vel ſupra B in directum: Non ſecundum nec tertium,ad illud enim punctum E infra vel ſupra B, conueniret extremũ E rectæ FE,quæ iam tota eſt ſupra rectam CB,ob angulos C & F æquales congruentes;& ſic duæ rectæ lineæ BC, EF ſegmentum commune obtinerent, contra 10. axioma. Ergo primum erit, & ſic etiam tota FE adæquabitur toti CB, vt recta AB toti DE; ideoque erunt æquales inter ſe,per 9.axioma;anguluſq; ideo F congruet cũ angulo B,qui ideo ęquales erunt. Quę omnia erant probãda in primo hoc caſu.

Demonſtratio ſecundi caſus erit eiuſdem ferè rationis;nam mente ſuper imponendo latus ED, lateri AB, quia ſunt æqualia data, congruent per 9. axioma; ſimiliter angulus BAC angulo EDF æquali dato: quare reliquorum laterum EF, DF, extremum commune F,vel cõgruet cum puncto C, vel non, vt in ſuperiori caſu.Non ſecũdum, ſequentur enim abſurda quæ prius;ergo primum: quare per citatum axioma nonum, latera BC, EF, erunt æqualia, & latera DF, AC; & anguli ABC,DEF,æquales quæ erant demonſtranda

## COROLLARIVM.

*Eiſdem datis, totum triangulum erit æquale toti triangulo.*

HOc enim clarum eſt per axioma 9.quandoquidem æquiangula & æquilatera illa duo triangula oſtenſa ſunt.

## PROPOSITIO XXVII.

**Si in duas rectas lineas recta incidens alternatim angulos æquales inter ſe fecerit;parallelæ erũt inter ſe illæ rectæ lineæ.**

Fig. 47. SVppoſitio. Recta linea EF, incidens in duas rectas lineas AB,CD,efficiat angulos BGH, CHG,alternos inter ſe æquales. Dico rectas AB, CD; eſſe inter ſe parallelas.

Demonſtratio. Si non ſint parallelæ rectæ lineæ AB,CD, coibunt illæ in vnũ punctum verſus BD exempli gratia, atque ita triangulum efficient baſim habens rectam GH. Iam verò quia dantur anguli BGH, CHG alterni æquales; his ſi addatur communis angulus DHG, erunt per 2. axioma, anguli BGH,DHG, æquales angulis CHG, DHG: ſed per prop. 13. iſti duo poſtremi ſunt æquales duobus rectis, ergo duo priores erũt etiam æquales duobus rectis,in triangulo prædicto, contra prop. 17. abſurdum,ergo non coibunt illæ rectæ lineæ verſus partem BD: ſed neque verſus alteram,nam ſimile ſequeretur abſurdum;ergo erunt rectæ lineæ AB, CD, parallelæ,iuxta definitionem 34.

## PROPOSITIO XXVIII.

**Si in duas rectas lineas recta incidens linea, externum angulum interno,& oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit;aut internos & ad eaſdẽ partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.**

SVppoſitio. Recta linea EF, Incidens in duas rectas AB,CD, faciat angulum EGB externum interno angulo GHD,& oppoſito, & ad eaſdẽ partes rectæ EF,æqualẽ:Dico ipſas rectas AB,CD,eſſe parallelas. Vel ſi faciat angulos æquales duos BGH, GHD,internos & ad eaſdem partes rectæ EF:dico rectas AB, CD,eſſe parallelas. Fig. 47.

Demonſtratio Secundæ partis. Si non ſint parallelæ concurrent v.g.ad partes BD,trianguluḿque efficient cuius baſis erit GH:ergo in hoc triangulo duo erunt anguli BGH,GHD, æquales duobus rectis, contra prop.17. Sed neque concurrent ex alia parte verſus A, C: nam etiam triangulum efficerent cuius baſis eſſet recta GH: Et quia per prop. 13. anguli duo AGH,BGH,ſunt duobus rectis æquales; tum etiam alij duo anguli CHG,DHG,ſunt etiã duobus rectis æquales;& illi quatuor dicti anguli ſunt æquales quatuor rectis;ex quibus ſi demamus datos alios duos BGH,GHD, æquales duobus rectis,relinquentur per 3.ax. alij duo anguli AGH,GHC,æquales duobus rectis in triangulo prædicto, contra prop.17. Hęc abſurda indicãt ex datis non poſſe ex vlla parte coincidere rectas lineas datas AB,CD, igitur per definitionem 34.erunt parallelæ.

Demon-

Demonſtratio primæ partis. Concurrant ſi fieri poſſit rectæ lineæ AB, CD, versùs partes BD. Imprimis ſi æqualibus angulis EGB, GHD, addatur communis angulus BGH, erunt duo anguli EGH, BGH, æquales duobus angulis BGH, GHD, per 1. axioma; ſed duo primi ſunt per prop. 13. æquales duobus rectis, ergo etiam duo poſtremi erunt æquales duobus rectis, in triangulo reſultante ex concurſu rectarum AB, CD, versùs BD, baſimque habente rectam GH, contra propoſ. 17. Eodem modo oſtendemus vt in prima parte reliquos duos angulos AGH, GHC, eſſe æquales duobus rectis, & ſi dicantur concurrere datas rectas AB, CD, versùs AC, triangulum effecturas cuius baſis ſit GH, habens angulos duos prædictos æquales duobus rectis contra prop. 17. Non igitur concurrent rectæ lineæ datæ AB, CD, ex datis, quare ipſæ erunt per definitionem 34. parallelæ.

## PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas lineas recta incidens linea; & alternatim angulos inter ſe æquales efficit; & externum interno & oppoſita, & ad eaſdem partes æqualem; & internos & ad eaſdem partes duobus rectis æquales facit.

Fig. 47. Sᴠppoſitio. Recta linea E F, incidens in rectas parallelas AB, CD: Dico primo efficere angulos alternos BGH, CHG æquales: Dico ſecundò efficere angulum externum EGB æqualem interno DHG & oppoſito, & ad eaſdem partes ipſius rectæ EF: Dico tertiò, efficere duos angulos BGH, DHG, internos, & ad eaſdem partes rectæ EF, duobus rectis Æquales.

Demonſtratio primæ aſſertionis. Si duo anguli alterni BGH, CHG, non ſint æquales, vnus erit inæqualis alteri; ergo ſi eis addatur communis angulus DHG, fient per 4. ax. duo anguli BGH, DHG, inæquales duobus angulis CHG, DHG; Sed per prop. 13. duo iſti poſtremi ſunt æquales duobus rectis, ergo alij duo erunt vel maiores duobus rectis, vel minores duobus rectis: Si primùm quandoquidem per cit. propoſ. 13. duo anguli AGH, BGH ſunt æquales duobus rectis; tùm etiam duo anguli CHG, DHG; iſti quatuor poſtremo enumerati anguli erunt æquales quatuor rectis: ergo ſi ab illis demamus prædictos angulos BGH, DHG, maiores duobus rectis, relinquentur alij duo interni AGH, CHG, & ad eaſdem partes rectæ EF, minores duobus rectis: igitur per 13. axioma, concurrent rectæ lineæ datæ parallelæ AB, CD, ad partes AC, & ſic non erunt parallelæ contra datum: ſi ſecundum, concurrent eedem rectæ AB, CD, parallelæ datæ ad partes BD, per citatum axioma 13. & ſic non erunt parallelæ contra datum. hoc abſurdum indicat non poſſe eſſe inæquales angulos alternos BGH, CHG; ergo erunt æquales quod erat probandum.

Demonſtratio ſecundæ aſſertionis. Si ſit angulus EGB externus inæqualis interno & oppoſito & ad eaſdem partes rectæ EF, angulo DHG, addendo illis communem angulum BGH, fient anguli EGB, BGH, inæquales angulis duobus internis BGD, DHG, ad eaſdem partes rectæ EF, per 4. axioma; ſed illi duo primi ſunt per prop. 13. æquales duobus rectis, ergo alij poſtremi erunt inæquales duobus rectis: & ſic redibit argumentatio primæ aſſertionis, & deductio aduerſarij ad abſurdum idem: ergo erunt illi duo anguli EGB, DHG, æquales, quod erat demonſtrandum.

Demonſtratio tertiæ aſſertionis. Sint ſi fieri poſſit duo anguli BGH, DHG, duobus rectis inæquales: redibit idem argumentum allatum in demonſtratione primæ aſſertionis deducens aduerſarium, vt concedat datas rectas AB, CD parallelas, concurrere, & ſic non eſſe parallelas. Ergo illi duo anguli BGH, DHG, erunt æquales duobus rectis. Demonſtrauimus ergo propoſitum.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Recta linea incidens in duas rectas non parallelas, efficiet angulos alternos inæquales; tùm angulum externum interno & oppoſito inæqualem ad eaſdem partes; tùm duos internos minores duobus rectis ex ea parte qua concurrunt; & ex alia maiores duobus rectis.*

Sᴠppoſitio. Recta linea CD, incidat in duas rectas NO, EF non parallelas, & concurrentes aut concurſuras ex parte NE. Dico primò angulos efficere inæquales alternos NQH FHQ; Dico ſecundò angulos efficere inæquales, externum CQN, & internum EHQ oppoſitumque ad eaſdem partes rectæ CD; vel alium externum CQO inæqualem interno & oppoſito QHF, ad eaſdem partes rectæ CD: Dico tertiò efficere duos angulos internos ad partes concurſus v.g. NE, duobus Fig. 47.

rectis minores, videlicet NQH, EHQ: alios verò duos internos OQH, FHQ, maiores duobus rectis.

Demonſtratio primæ aſſertionis. Si duo anguli NQH, FHQ, non ſint inæquales, erunt æquales; ergo per 27. propoſ. datæ rectæ lineæ NO, EF, non parallelæ, erunt parallelæ: quod eſt contradictorium.

Demonſtratio ſecundæ aſſertionis. Si duo anguli CQN, EHQ, non ſint inæquales, erunt æquales; ergo per 28. prop. datæ rectæ lineæ NO, EF, non parallelæ, erunt parallelæ, quod eſt abſurdum. Similiter ſi non ſint duo alij anguli OQC, FHQ, inæquales, erunt æquales, & per eandem prop. 28. datæ rectæ lineæ NO, EF, non parallelæ, erunt parallelæ.

Demonſtratio tertiæ aſſertionis. Si duo anguli NQH, EHQ, non ſint minores duobus rectis, erunt vel æquales vel maiores illis: ſi primùm, erunt per prop. 28. datæ rectæ lineæ NO, EF, non parallelæ, parallelæ: ſi ſecundùm, erunt alij duo OQH, FHQ, minores duobus rectis; quandoquidem per propoſ. 13. anguli quatuor interni deinceps ad puncta H, & Q, ſunt æquales quatuor rectis; ex quibus ſi tollantur duo NQH, EHQ, maiores duobus rectis, relinquentur alij duo minores duobus rectis prædicti: quare per 13. axioma concurrent duæ datæ rectæ lineæ concurſuræ ad partes N, E, etiam ad partes O, F; atque ita ſpatium ſeu figuram comprehendent. hæc duo abſurda indicant poſitiones aduerſarij contradicentes noſtris eſſe falſas. Quod ſi ex vna parte anguli duo interni ad eaſdem partes ſint minores duobus rectis, neceſſariò ex facto diſcurſu per prop. 13. & axioma 4. relinquentur alij duo interni anguli ad alias partes maiores duobus rectis. Corollarium ergo propoſitum demonſtrauimus.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Recta linea orthogonia vni rectarum parallelarum; producta ita vt ſecet illas omnes: erit etiam rectis illis alijs parallelis orthogonia.*

Fig. 47. EXempli gratia, recta NO orthogonia vni AB parallelarum rectarum AB, CD, IL, efficiens angulum NPB rectum per def. 10. efficiet etiam angulos NQD, NRL æquales illi recto ſeorſim ſumptos per iſtam prop. ergo per cit. def. 10. erit perpendicularis ad reliquas parallelas CD, IL.

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Recta linea inclinata vni rectarum parallelarum; producta ſi opus ſit, ita vt ſecet illas omnes: erit etiam ſimiliter inclinata alijs rectis dictis parallelis.*

ADuerte inclinationem vnius rectæ lineæ ad aliam ſumi propriè apud Geometras ratione anguli acuti quem efficiunt. Igitur exempli gratia, Recta linea EF detur inclinata vni rectarum AB, parallelarum, ſecundum angulum acutum EGA quem efficiunt; efficiet etiā alios angulos EHC, EMI, acutos æquales cum aliis parallelis CD, IL, datis, per prop. iſtam 29. ergo ſimiliter ad illas inclinata erit, hoc eſt ſecundùm æquales angulos acutos.

## PROPOSITIO XXX.

### Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ.

SVppoſitio. Sint rectæ lineæ AB, IL, eidem rectæ lineæ CD parallelæ: Dico eas eſſe parallelas inuicem, rectas datas AB, IL. Fig. 47.

Cōſtructio, ducatur recta linea EF incidens in eas omnes, ſecanſque rectam AB in G, rectam CD in H, rectamque IL in M.

Demonſtratio. Imprimis quia recta AB datur parallela rectæ CD; erunt per prop. 29. anguli alterni BGH, CHG æquales: tùm angulus EGB æqualis angulo DHG, externus interno & oppoſito ad eaſdem partes: tùm anguli duo interni BGH, DHG ad eaſdem partes duobus rectis æquales. Simili modo per eandem prop. 29. quia dantur duæ rectæ lineæ CD, IL parallelæ, erunt anguli alterni DHM, IMH æquales; tùm angulus externus DHG, interno & oppoſito & ad eaſdem partes angulo LMH æqualis; tùm anguli duo interni DHM, LMH, ad eaſdem partes, æquales. Et quia per propoſ. 15. anguli DHM, CHG ſunt æquales, erunt per 1. axioma anguli CHG, IMH æquales, quia iam oſtendimus angulos DHM, IMH eſſe æquales: imo vlterius quia etiam oſtēdimus angulos BGH, CHG eſſe æquales, erunt per 1. axio. anguli BGH, IMH, æquales. Inſuper quia oſtendimus duos angulos EGB, LMH, eſſe æquales tertio angulo DHG, erunt per 1. axioma, anguli EGB, LMG æquales. Denique ſi angulo BGH, addantur diuiſim duo anguli æquales oſtenſi, fient per 2. axioma duo anguli interni BGH, DHG, æquales duobus

duobus internis BGM, LMG, ad eaſdē partes, ſed duo primi ſunt æquales duobus rectis per 29. prop. ergo alij duo etiam erunt æquales duobus rectis per 1. axioma. His poſitis, ſi duæ datæ rectæ lineæ AB, IL non ſint parallelæ, recta linea EF incidens in iſtas, efficiet angulos alternos BGM, IMG inæquales, contra oſtenſa: Item angulum externum EGB, inæqualem angulo interno & oppoſito & ad eaſdem partes, LMG, contra oſtenſa: Denique duos angulos BGM, LMG, internos & ad eaſdem partes inæquales duobus rectis, contra oſtenſa. Contradicens ergo ſibi adverſarius, contra dicenſque huic propoſitioni, falſa aſſerit, & cogitur admittere veram iſtam propoſitionem.

## PROPOSITIO XXXI.

A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere [ oportet autem datum punctum eſſe extra datam rectam; & non eſſe in directum illius.]

Fig. 48. SVppoſitio. Data ſit recta AB, & punctum C extra illam datum, & non in directum illius: oporteatque ab puncto C rectam lineam ponere parallelam datæ rectæ AB.

Conſtructio. Ex puncto C ducatur ad rectam AB, recta quæcumque linea CE, & alia diuerſa CD; reſultabit triangulum rectilineum CED, factum ex duabus ductis rectis CE, CD, & portione DE, rectæ datæ AB. Præterea per prop. 22. corollarium noſtrum 2. fiat triangulum CFE ſuper recta CE, æquale alteri CDE, hoc eſt æquilaterum & æquiangulum illi, ita vt recta CF ſit æqualis rectæ DE. Dico rectam CF producendam vtrimque ſi opus ſit, eſſe parallelam ipſi AB, poſitam ab puncto C dato.

Demonſtratio. Cùm enim per conſtructionem in triangulis CED, ECF, duo latera CE, ED, ſint æqualia duobus lateribus EC, CF, per conſtructionem, vtrumque vtrique, baſeſque habeant æquales CD, EF, etiam per conſtructionem; habebunt angulos CED, FCE, æquales per prop. 8. qui cùm ſint alterni reſpectu duarum rectarum linearum AB, CF, erunt ipſæ parallelæ per prop. 27. poſuimus ergo rectam GF parallelam rectæ AB datæ, ex puncto C dato.

## PROPOSITIO XXXII.

Cuiuſcumque trianguli vno latere producto, externus angulus duobus internis & oppoſitis eſt æqualis.

Et trianguli tres interni anguli, duobus ſunt rectis æquales.

HVius propoſitionis inuentorem celebrat Pythagoram Proclus in Euclidem

Suppoſitio, Trianguli ABC, latus vnum AC producatur vltra C vſque ad D. Dico primo angulum externum BCD, æqualem eſſe duobus internis angulis & oppoſitis ABC, BAC, dicti trianguli. Et dico ſecundò tres angulos trianguli, videlicet ABC, ACB, CAB, eſſe æquales duobus rectis. Fig. 49.

Conſtructio, ex puncto B ſeu angulo oppoſito lateri producto AC, ponatur verſus A, ſeu partes contrarias productionis CD, lateris producti AC, recta linea BE, parallela lateri AC producto, idque per prop. 31. præcedentem.

Demonſtratio primæ partis, per prop. 29. anguli EBA, BAC alterni erunt æquales inter ſe: his addatur communis angulus ABC, fient per 2. axioma duo anguli EBA, ABC, hoc eſt totus angulus EBC, æqualis duobus angulis internis ABC, CAB, dati trianguli: ſed per prop. 29. anguli EBC, BCD, ſunt æquales quia alterni: ergo per 1. axioma, angulus BCD externus erit æqualis duobus angulis internis & oppoſitis ABC, CAB, trianguli dati. quod erat primo loco propoſitum.

Demonſtratio ſecundæ partis. Per prop. 29. duo anguli EBC, ACB, ſunt duobus rectis æquales; & oſtendimus in prima parte angulum EBC eſſe æqualem duobus angulis ABC, CAB, trianguli dati: ergo per 1. axioma in triangulo tres anguli ABC, CAB, ACB, erunt æquales duobus rectis, quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

### COROLLARIVM I.

*Cuiuſcumque dati trianguli rectilinei tres anguli ſimul ſumpti, ſunt æquales tribus angulis ſimul ſumptis alterius cuiuſcumque trianguli dati rectilinei.*

SVnt enim per hanc propoſitionem tres ſimul ſumpti æquales duobus rectis an-

gulis, ergo cùm per axioma 12. ſint omnes duo anguli recti æquales aliis duobus rectis; erunt per 1. axioma tres anguli cuiuſcumque trianguli æquales tribus angulis alterius trianguli, ſi ſimul ſumantur anguli.

## COROLLARIVM II.

*In omni triangulo iſoſcele habente rectum angulum comprehenſum ab ſuis æquis cruribus; ſinguli anguli ad baſim erunt ſemirecti.*

NAm per hāc propoſitionem tres anguli illius debent eſſe æquales duobus rectis, daturque vnus rectus, & alij duo æquales per 5.prop. igitur ſemirecti erunt ſinguli.

## COROLLARIVM III.

*Trianguli æquilateri quilibet angulus continet duas tertias vnius anguli recti, vel vnam tertiam partem duorum angulorum rectorum.*

EST enim per corollarium prop.5. omne triangulum æquilaterum æquiangulum: ergo cùm per prop. iſtam, tres anguli ſimul ſumpti illius ſint æquales duobus rectis, quilibet ſuorum angulorum continebit duas tertias partes vnius recti, vel vnam tertiam partem duorum rectorum: nam ter duæ tertiæ partes ſunt duo;& ter vna tertia, eſt vnum integrum ſeu vnus angulus rectus.

## COROLLARIVM IV.

*Si ab vno trianguli æquilateri angulo demittatur recta linea perpendicularis ad latus ei oppoſitum angulo; reſultabunt duo triangula ſcalena rectangula.*

NAm in ſingulis illis triangulis reſultantibus erit vnus angulus rectus ob perpendicularem rectam demiſſam, tùm vnus angulus intactus continens vnam tertiam partem recti per præcedens corollarium & alter angulus minor iſto, quia diuiſus ab perpendiculari vnus trianguli æquilateri angulus. Cùm ergo in hiſce duobus triangulis ſinguli anguli ſint inæquales, erit per corollarium noſtrum prop.19. ſcalenum vtrumque, & rectangulum ob rectum angulum prope perpendicularem.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*In omni triangulo Iſoſcele & æquilatero ſi ab angulo baſi oppoſito recta linea perpendicularis demittatur ad baſim, ipſam non productam ſecabit, & tota intra triangulum erit, & angulum illum biſariam diuidet.*

*Et in triangulo obtuſangulo & rectangulo, ſi ab angulo recto vel obtuſo demittatur perpendicularis ad baſim ei oppoſitam, ipſam ſecabit non productam.*

*Et ſi angulus trianguli æquilateri vel iſoſcelis oppoſitus baſi biſariam diuidatur, recta ipſum diuidens erit perpendicularis baſi; & eam biſariam diuidet.*

*Et ſi baſis diuiſa fuerit biſariam, & ab hoc puncto medio recta ducta ad angulum oppoſitum ipſi, erit perpendicularis ipſi baſi, & angulum ipſum oppoſitum biſariam diuidet; & totum triangulum, in duo triangula æqualia & æquiangula.*

HOc corollarium noſtrum præmitti debuiſſet præcedenti corollario quarto, ad tollendum ſcrupulum, caſus perpēdicularis intra triangulum æquilaterum, ac diuiſionis anguli, & ſupra baſim oppoſitam angulo è quo demiſſa eſt. Verùm ne perturbaremus ordinem commentatorum citra corollaria quatuor prima, poſtponere illud voluimus; poteſt tamen explicari ſine vllo reſpectu ad illum, & explicatum tollet illos prædictos ſcrupulos.

Cadat ſi poſſit perpendicularis recta prædicta in baſim productam; tunc efficiet angulum cum illa rectum ad partes anguli externi, trianguli vel æquilateri vel iſoſcelis, qui obtuſus erit in illis; cùm enim ſint æquales anguli ad baſim interni, non poſſunt eſſe recti neque obtuſi propter prop.17. ergo acuti, igitur alter deinceps ad illos erit obtuſus per corollarium noſtrum 3.prop. 13. ergo in triangulo reſultante ab baſeos productione, & vno latere triangulorum datorum, & perpendiculari demiſſa, erunt duo anguli maiores duobus rectis, vnus nimirum obtuſus, alter rectus cōtra prop.17. abſurdum hoc conſequens indicat antecedens poſitum ab aduerſario falſum eſſe, videlicet prædictam rectam perpendicularē cadere in baſeos productionem. Sed neque conueniet cum altero laterum, ſic enim duo anguli in triāgulo dato eſſent duobus rectis æquales, contra prop.17. Igitur cadet ſupra baſim & ipſam diuidet: ergo etiam per axioma 29. diuidet ipſum angulum ex quo demiſſa eſt: Et quidem biſariam nam in duobus triangulis reſultantibus ſcalenis, erunt duo anguli æquales, recti nimirum facti ab

iſta

iſta perpendiculari, & alij ad baſim æquales, & illis eſt communis ducta perpendicularis, ergo per prop. 26. angulus ille diuiſus eſt biſariam in duos angulos æquales. Quod verò tota intra triãgulum cadat, patet, nam ſi egrederetur antequam baſim attingeret, vel duæ rectæ lineæ figuram concluderent, vel non diuideret angulum ex quo deducta eſt, quæ omnia ſunt abſurda.

Præterea ſi ab angulo recto vel obtuſo trianguli rectanguli vel obtuſanguli recta linea demiſſa ſit ad baſim oppoſitam, eam ſecet productam, reſultabit aliud triangulum, quod habebit vnum angulum rectũm, & alium obtuſum, videlicet complemẽtum anguli acuti, dati trianguli, nam per coroll. 1. prop. 17. in omni triangulo rectangulo vel obtuſangulo, duo reliqui anguli, ſunt ſeorſim ſumpti recti; hoc verò eſt contra ipſam prop. 17. igitur recta linea dicta perpendicularis non ſecabit baſim dictam productam, ſed non productam.

Et quia in triangulo iſoſcele vel æquilatero, ſi angulus oppoſitus bifariam diuiſus ſit ab recta linea, ipſa diuidet baſim oppoſitam per ax. 29. libri huius; igitur cõſiderando duo triangula reſultantia ab hac diuiſione, quia habent duo latera æqualia reſpectiuè, continentia æquales angulos factos, baſes habebunt æquales & angulos reliquos æquales reſpectiuè, per 4. prop. baſes autem ſunt baſeos totalis partes duæ adæquatè, ideoque bifariam ſecabitur baſis: anguli autem duo ſunt deinceps æquales ad rectam diuidentem baſim, ergo ipſa erit perpendicularis ipſi baſi per 10. definitionem.

Quod ſi ab puncto medio baſeos trianguli iſoſcelis vel æquilateri, recta linea ducatur ad oppoſitum angulum ipſi baſi, reſultabunt duo triangula, quorum duo latera erunt æqualia reſpectiuè, & baſes æquales; ergo per 8. prop. anguli contenti ab lateribns æqualibus reſpectiuè, videlicet ab ſemiſſibus baſeos, & ducta communi recta, erunt æquales, deinceps ad ductam rectam, quæ per def. 10. erit perpendicularis baſi; & per coroll. prop. cit. 8. reliqui anguli qui ſunt partes adæquatæ anguli totalis oppoſiti baſeos, erunt æquales; quare recta ipſa bifariam diuidet angulum baſi oppoſitum: reliqui verò anguli ad extrema baſeos diuiſæ, ſunt æquales per 5. prop. ergo triangula reſultantia ab ductu huius lineæ rectæ prædictæ, erunt æquiangula: ſed & erunt æqualia per cit. coroll. prop. 8. demonſtrauimus ergo totum hoc corollarium.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Si trianguli duo anguli ſimul ſumpti interiores fuerint æquales: angulus exterior illis æqualis, duplus erit vnius illorum æqualium.*

HOc maniſeſtum eſt, poſito axiomate ſeptimo.

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Si trianguli vnius duo anguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, vterq́ vtrique: reliqui alij duo erunt æquales.*

CVm enim per coroll. 1. antiquorum, huius prop. tres anguli ſimul ſumpti vnius trianguli ſint æquales tribus ſimul ſumptis angulis alterius trianguli: ſi ab his demantur æquales dati, relinquentur per 3. axioma reliqui æquales.

## COROLLARIVM NOSTRVM IV.

*Si vnius trianguli duo anguli fuerint ſinguli ſemirecti, alter erit rectus.*

NAm per iſtam prop. tres anguli trianguli ſunt æquales duobus rectis, danturque duo qui ſeorſim ſumpti ſunt ſemirecti, relinquitur ergo vt ſit tertius angulus rectus.

## COROLLARIVM NOSTRVM V.

*In quadrato diagonalis recta diuidit duos angulos oppoſitos ſingulos in ſemirectos duos.*

REſultant enim duo iſoſcelia triangula rectangula, ob angulos alios duos rectos quadrati, & latera æqualia, & alios diuiſos duos rectos ab diagonali, quæ omnia requirit quadratum iuxta definitionem 29. igitur per coroll. a. antiquorum huius propoſitionis, ſinguli anguli ad baſim hoc eſt ad diagonalem rectam erunt ſemirecti.

## COROLLARIVM NOSTRVM VI.

*Omnes anguli figuræ cuiuſcumq; rectilineæ, æquales ſunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor; quot continet latera vel angulos ipſa figura.*

TOt enim continet triangula rectilinea quot latera quæ inſeruiunt baſibus illorum oppoſitis puncto vni communi intra figuram ipſam ſito; & per iſtam propoſitionem ſingula triangula angulos ſuos omnes habent æquales duobus rectis: igitur ſi per numerum laterum vel angulorum figuræ datæ rectilineæ, ( tot enim obtinet latera, quot angulos) multiplicentur duo anguli recti, producetur numerus angulorum rectorum quibus æquales ſunt anguli omnes illorum triangulorum: Verum quia illa triangula vertices habent in vno puncto areæ figuræ datæ, qui vertices ſunt anguli, & non pertinent ad angulos figuræ datæ, & per corollarium 2. propoſitionis 15. ſunt æquales quatuor rectis: Si ab numero producto angulorum rectorum præcedente demantur quatuor recti, relinquetur numerus angulorum rectorum quibus æquales ſunt anguli omnes figuræ datæ.

## COROLLARIVM NOSTRVM VII.

*Omnes anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis, ſunt æquales bis tot angulis rectis, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas.*

QVia prima figurarum rectilinearum eſt triangulum, duæ enim rectæ lineæ non poſſint figuram comprehendere, iuxta ax. 14. fit vt ſi dematur vnitas ab numero ſuorũ laterum, relinquantur duo, quæ ſi detrahantur ab numero laterũ cuiuſuis propoſitæ figuræ rectilineę, relinquetur numerus indicãs quota ſit illa in ſerie & ordine continuò figurarũ rectilinearum procedente & creſcente ſecundum vnitatem. Et quia figura quæcumque rectilinea excepto triãgulo, reſoluitur in tot triangula rectilinea communem angulum obtinentia in vno angulorum figuræ datæ, quota eſt in ordine prædicto figurarum rectilinearum; nam duorum triangulorum prædictorum extremorum ſingula obtinent duo latera figuræ datæ, reliqua vnum pro baſi, & ſic demenda ſunt duo ab numero laterum ipſius figuræ, vt numerus triangulorum habeatur in quæ reſoluitur; & omnes anguli cuiuſuis trianguli ſunt æquales duobus rectis per præſentem propoſitionem, ſi ducantur duo recti anguli per hunc numerum triangulorum, vel per numerum ordinis inter figuras rectilineas, producetur numerus rectorum angulorum quibus æquales anguli omnes figuræ datæ rectilineæ.

## COROLLARIVM NOSTRVM VIII.

*Si latera omnia cuiuſcumque figuræ rectilineæ producantur ordinatim verſus vnam ſolùm partem: omnes anguli externi effecti æquales erunt ſolummodo quatuor rectis angulis.*

NAm per prop. 13. anguli illi externi & interni figuræ datæ in quocumque latere producto ſunt ſolùm æquales duobus rectis, cùm deinceps ad vnam rectam inſiſtentem alteri; ergo ſi duo anguli recti multiplicentur per numerum laterum figuræ, vel angulorum, producetur numerus angulorum rectorum quibus æquales ſunt illi omnes anguli interni & externi figuræ prædicti: ſed per corollarium noſtrum 6. omnes anguli figuræ interni ſunt æquales bis tot rectis, quot angulos continet ipſa figura, demptis quatuor rectis; ergo ſi iſti tollantur ab illis internis & externis, relinquentur ſolùm quatuor recti anguli æquales dictis externis figuræ datæ rectilineę.

## COROLLARIVM NOSTRVM IX.

*Productis vtrimque lateribus omnibus figuræ rectilineæ datæ, ſi coeant duo in puncti vnum illa latera, efficient tot triangula quot obtinet latera: anguli omnes illorum triangulorum obuerſi lateribus figuræ erunt æquales tot angulis rectis, quot ſupererunt ſi demantur octo ab numero triangulorum ducto per duo.*

NAm per præcedens corollarium 8. anguli externi figuræ datæ productis verſùs vnam ſolùm partem ordinatim, ſunt æquales quatuor rectis; ergo quia eadem producimus verſùs aliam partem, etiam ordinatim, omnes illi anguli externi erunt æquales octo rectis: Et quia iſti anguli externi, ſunt interni triangulorum externorum baſes habentium ſupra latera figuræ datæ; quæ triangula ſingula habent angulos ſuos tres ſimul ſumptos duobus rectis æquales per iſtam propoſitionem, ſi numerus triangulorum iſtorum ducatur

ducatur per 2. producetur numerus angulorum rectorum quibus æquales ſunt omnes eorum anguli: ex quo numero ſi dematur numerus octo angulorum rectorum quibus æquales ſunt omnium dictorum triangulorum anguli ad baſes eorum; relinquetur numerus angulorum rectorum quibus æquales ſunt anguli oppoſiti lateribus figuræ datæ.

## PROPOSITIO XXXIII.

Rectæ lineæ, quæ æquales & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungunt; & ipſæ æquales & parallelæ ſunt.

Fig. 50. SVppoſitio. Rectas lineas AB, CD, æquales & parallelas datæ, nectant ad eaſdem partes duæ rectæ lineæ AC ex vna parte, BD ex alia parte eadem: Dico ipſas eſſe æquales & parallelas inter ſe AC, BD.

Conſtructio, ducatur recta AD, quæ cum datis rectis efficiet duo triangula rectilinea ABD, ACD.

Demonſtratio, quod duæ rectæ AC, BD, ſint æquales. Sint ſi fieri poſſit inæquales, maiorque recta AC, quàm BD: tùm in triangulis ADC, DAB, duo latera ſint æqualia AD, DC, duobus lateribus DA, AB, vtrumque vtrique, & baſis AC ſit maior baſe BD, erit per prop. 25. angulus ADC maior angulo DAB, contra prop. 29. ſunt enim dicti anguli alterni ADC; DAB æquales, igitur duæ rectæ AC, BD, erunt æquales.

Demonſtratio, quod rectæ AC, BD, ſint parallelæ. In triangulis ACD, ABD, duo latera AC, AD, ſunt æqualia duobus lateribus BD, DA, vtrumque vtrique, ex prima parte oſtenſa, & conſtructione, baſeſque CD, AB ſunt æquales ex datis: ergo per prop. 8. anguli CAD, BDA, alterni erunt æquales; ideoque per prop. 27. erunt rectæ AC, BD, parallelæ. oſtendimus ergo propoſitum.

## PROPOS. XXXIV.

Parallelogrammorum ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo & latera & anguli: atque illa bifariã ſecat diameter.

Figu. 50. PArallelogrammum ABDC ſit, & eius diameter AD, vel BC. Dico primò habere latera aduerſa AB, CD æqualia; tum alia duo aduerſa AC, BD, æqualia; Dico ſecundò habere angulos aduerſos ABD, ACD, æquales, tùm alios duos CAB, CDB aduerſos vel oppoſitos æquales: Dico tertiò quamlibet eius diametrum puta BC, illud partiri in duo triangula æqualia CAD, CDB.

Conſtructio, ſi latera duo aduerſa vel oppoſita non ſint æqualia, puta AB, CD, ſint ſi fieri poſſit inæqualia, & per prop. 3. de maiore DC, detrahatur DE æquale minori BA; ducaturque recta AE.

Demonſtratio primæ aſſertionis. Per definitionem 35. latera AB, CD, ſunt parallela, ſicuti etiam alia duo oppoſita AC, BD: cùm ergo rectas AB, ED, æquales & parallelas nectant duæ aliæ rectæ AE, BD, ad eaſdem partes, erunt per prop. præcedentem parallelæ ipſæ BD, AE; ſed oſtenſa eſt recta AC, parallela ipſi BD; ergo per 30. prop. duæ rectæ lineæ AC, AE commune punctum A habentes erũt parallelæ, cõtra def. 34. non igitur erunt inæqualia oppoſita latera AB, CD, ergo æqualia: & ſic de aliis duobus oſtendetur AC, BD.

Demõſtratio ſecundæ aſſertionis. In triangulis ACD, ABD, quandoquidem per 1. aſſertionem, ſunt duo latera AC, CD, æqualia duobus lateribus AB, BD, vtrumque vtrique, & baſis AD, communis; erunt per 8. prop. anguli ACD, ABD oppoſiti æquales. Simili ratione, quia in triangulis CAB, CDB, duo latera CA, AB, ſunt æqualia duobus lateribus CD, DB, vtrumque vtrique baſiſque CB communis, erunt per 8. prop. anguli oppoſiti CAB, CDB, æquales.

Demõſtratio tertiæ aſſertionis. Per corollarium prop. 8. erunt triangula ACD, ABD, æqualia; vel alia duo CAB, CDB æqualia, eo quod oſtenderimus angulos contentos ſub æqualibus illorum lateribus eſſe æquales: ideoque per 7. pronuntiatum, diameter AD, vel CB, parallelogrammi illud bifariam diuidet.

## PROPOSITIO XXXV.

Parallelogrãma ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

SVppoſitio. In eiſdẽ parallelis rectis lineis CF, AB, conſtituta ſint parallelogramma ACDB, AEFB, ſupra eandem baſim AB. Dico ea eſſe inter ſe æqualia. Fig. 51.

Tres caſus diuerſos habet hæc propoſitio. Primus eſt, quando vnius parallelogrammi latus diuerſum ab baſi eſt diagonalis alterius parallelogrammi è datis, vt latus AE in prima figura; quod ſit diagonalis parallelogrammi

ACDB, & latus DB ſit diameter alterius parallelogrammi AEFB. Secundus caſus, quando latera ſuperiora parallelogrammorũ partem habent communem, vt in ſecunda figura latera ſuperiora CD, EF, partem habentia communem ED. Tertius caſus eſt, quando latera illa ſuperiora parallela baſi communi AB, nihil habent commune, vt in tertia figura, latera CD, EF; & vnum è lateribus aliis vnius parallelogrammi ſecat latus aliud alterius parallelogrammi, veluti in eadem figura, latus AE ſecans latus BD in G.

Demonſtratio primi caſus. Per præcedentem propoſitionem 34. Triangulum ADB eſt æquale triãgulis ACD, BDF, quæ ideo erunt æqualia inter ſe per 1. axioma: his ergo æqualibus ſi addatur commune triãgulum ADB, fient æqualia ACDB, AEFB, parallelogramma æqualia totalia poſita ſupra eandem baſim AB, inter eaſdem parallelas.

Demonſtratio ſecundi caſus. Si ex æqualibus rectis lineis CD, EF, quia ſunt per 34. prop. æquales tertiæ AB, dematur communis pars ED, relinquẽtur per axioma 3. rectæ CE, DE, æquales; ſed & ſunt æquales rectæ AC, BD, tũm etiam aliæ duæ rectæ AE, BF, per prop. 34. Igitur in triangulis duobus ACE, BDF, tria latera oſtendimus eſſe æqualia reſpectiuè, ergo per propoſitionis 8. coroll. ipſa triangula erunt æqualia: quibus ſi addatur commune AEDB, fient parallelogramma ACDB, AEFB, æqualia.

Demonſtratio tertij caſus. Per præcedentem propoſitionẽ, latera CD, EF, ſunt æqualia lateri AB, ergo per 1. axioma erunt inter ſe æqualia: his æqualibus ſi addatur communis recta DE, fient per 2. axioma, rectæ CE, DF, æquales; ſed & per eit. prop. rectæ AC, BD, ſunt æquales, tũm etiam rectæ AE, BF: ergo in triangulis ACE, BDF, tria latera erunt relatiuè æqualia; ergo per corollarium propoſitionis 8. ipſa triangula erunt æqualia: ab his ergo ſi dematur commune triangulum DGE, relinquentur quadrilatera æqualia ACDG, BGEF, per 3. axioma: his quadrilateris æqualibus ſi addatur commune triangulum AGB, fient per 2. axioma parallelogramma æqualia ACDB, AEFB; quæ omnia erant demonſtranda in illis tribus caſibus diuerſis.

## PROPOSITIO XXXVI.

### Parallelogrãma ſuper æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis cõſtituta; inter ſe ſunt æqualia.

*Fig. 52.* SVppoſitio. Sint parallelogramma AEFB, CGHD, ſuper æquales baſes AB, CD, inter eaſdem parallelas EH, AD: Dico illa eſſe æqualia.

Conſtructio. Ducantur rectæ AG, BH, eſficientes quadrilaterum AGHB.

Demonſtratio, quia dantur rectæ AB, CD æquales, & per prop. 34. rectæ GH, CD, ſunt æquales, erũt etiã rectæ AB, GH æquales per 1. axioma; ſed & ſunt parallelæ ex datis; ergo per 33. prop. rectæ AG, BH, erunt parallelæ: parallelogrãmum igitur erit per def. 35. quadrilaterum AGHB, quod per præcedentem erit æquale parallelogrãmis AEFB, CGHD, datis, diuiſim ſumptis; ergo per 1. axioma, ipſa data parallelogramma AEFB, CGHD, erunt inter ſe æqualia. quod erat concludendum.

## PROPOS. XXXVII.

### Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

SVppoſitio. In eiſdem parallelis ED, AB, conſtituta ſint triangula ACB, ADB, ſupra communem baſim AB: Dico ea eſſe inter ſe æqualia. *Fig. 53.*

Cõſtructio. per prop. 31. ducatur recta AE parallela rectę BC, exurget parallelogrãmum AECB, iuxta definitionem 35. Similiter ducta recta AF parallela rectæ BD, reſultabit aliud parallelogrammum ADEB.

Demonſtratio. Parallelogramma AECB, ADFB, quia ſunt inter eaſdẽ parallelas ED, AB, ſupra communem baſim AB, ipſa erunt æqualia per propoſitionem 35. Horum verò æqualium erunt dimidia triãgula data ACB, ADB, iuxta propoſ. 34. ergo ipſa triangula erunt æqualia per axioma 7. quod erãt notum ſecuodum.

## PROPOS. XXXVIII.

### Triãgula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parellelis, inter ſe ſunt æqualia.

SVppoſitio. Triãgula AEB, CGD, conſtituta ſint ſupra æquales baſes AB, CD, inter eaſdem parallelas rectas EH, AD: Dico illa triangula eſſe inter ſe æqualia. *Fig. 52.*

Cõſtructio. Per prop. 31. ducatur recta BF parallela ipſi AE; reſultabit parallelogram. AEFB, cuius diagonalis erit EB, quæ diuidet illud in duo triãgula æqualia AEB, EBF, per prop. 34. vnde ſemiſſis illius erit triangulum datum

datum AEB. Simili modo ducatur recta DH parallela rectæ CG; exurget aliud parallelogrammum CGHD, cuius diagonalis erit GD, & eius dimidium erit triangulum aliud datum CGD, per eandem prop. 34.

Demonſtratio. Parallelogramma facta AEFB, CGHD, erunt æqualia per propoſitionem 36. ergo per axioma 7. eorum dimidia erunt æqualia, videlicet triangula AEB, CGD. quod erat manifeſtum faciendum.

## PROPOSITIO XXXIX.

Triangula æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta & in eiſdem ſunt parallelis.

Fig. 54. SVppoſitio. Sint triangula ACB, ADB æqualia, poſita ſupra communem baſim AB ad eaſdem partes illius: Dico illa eſſe inter eaſdem parallelas rectas lineas AB, CD.

Conſtructio, Ducta recta CD, ſi non fuerit parallela ipſi rectæ AB: ducatur alia recta CE parallela ipſi AB, per propoſitionem 31. quæ vel cadet ſupra rectam CD, vel infra illam. Denique tranſmittatur recta EB, producto latere AD ſi opus ſit attingens parallelam CE in E; hoc autem eſt neceſſarium, quando parallela CE cadit ſupra rectam CD.

Demonſtratio. Per prop. 37. erunt triangula ACB, AEB, æqualia: ſed ſunt data æqualia triangula ACB, ADB; ergo per 1. axioma, erunt triangula AEB, ADB, æqualia, pars & totum, contra axioma 8. hoc abſurdum indicat poſitionem contradicentem huic propoſitioni eſſe falſam, quare propoſitio confirmata relinquetur.

## PROPOSITIO XL.

Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta; & in eiſdem ſunt parallelis.

Fig. 55. SVppoſitio. Data ſint triangula AEB, CFD æqualia, ſuper æqualibus baſibus AB, CD, & ad eaſdem partes: Dico illa eſſe inter eaſdem rectas lineas parallelas AD, EF.

Conſtructio, ſi non ſint rectæ lineæ EF, AD parallelæ, ducatur ex puncto E, recta linea EG, parallela ipſi AD, occurrens rectæ CF productæ in infinitum, in puncto G, quod erit vel ſupra rectam EF, vel infra illam: denique recta ducatur GD.

Demonſtratio. Per prop. 38. triangula AEB, CGD, erunt æqualia; & dantur æqualia triangula AEB, CFD; ergo per 1. axioma triangula CFD, CGD, erunt æqualia, totum & pars, contra 8. axioma. abſurdum manifeſtam faciens deceptionem poſitionis contradicentis huic propoſitioni, quæ ideo ſtabilita remanebit.

## PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum cum triangulo eandem baſim habuerit, in eiſdemque fuerit parallelis; duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

SVppoſitio. Parallelogrammum ACDB, & triangulum AEB, obtineant communem baſim AB, inter eaſdem parallelas rectas CDE, AB: Dico parallelogrammum illud eſſe duplum illius trianguli. Fig. 56.

Conſtructio. Ducatur diagonalis recta linea AD in parallelogrammo illo dato.

Demonſtratio. Per propoſitionem 34. triangulum ADB erit dimidiũ parallelogrammi ACDB dati, quare hoc parallelogrammum erit illius trianguli duplum: & per prop. 37. triangula ADB, AEB, ſunt æqualia; ergo per axio. 6. erit parallelogrammum ACDB duplum trianguli A E B. quod erat explicandum.

## PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

SVppoſitio. Triangulo rectilineo ABC, conſtituendum ſit parallelogrammum æquale, habens angulum æqualem dato G rectilineo. Fig. 57.

Conſtructio. Per propoſitionem 10. ſecetur in D, baſis BC, trianguli dati ABC: & per prop. 31. per punctum A ſeu angulum BAC, ponatur recta linea AF parallela ipſi baſi BC; ducaturque recta AD; & per prop. 23. ad punctum D baſeos BC, fiat angulus CDE æqualis angulo dato G, rectilineo: recta linea DE occurret in E parallelæ ductæ AF; nam cùm incidat recta AD in parallelas rectas AF, BDC,

BDC, efficit angulos duos FAD , CDA , æquales duobus rectis per prop. 29. ſed angulus factus CDE eſt pars detracta ab toto angulo ADC , ergo duo anguli , ADE reſiduus , & FAD , erunt minores duobus rectis , igitur per axioma 13. rectæ DE & AF occurrent ſibi in E. Denique ducatur recta CF parallela ipſi DE , quæ etiam ſecabit rectam AF in F, per citatum axioma 13. ob duos angulos EAC, ACF, minores duobus FAC , ACH, æqualibus duobus rectis per cit. prop. 29. Reſultabit ergo parallelogrammum DEFC per iſtam conſtructionem, habens baſim communem BC cum triangulo DAC , & conſtituta ambo inter eaſdem parallelas rectas AF, BCH.

Demõſtratio. Triangula duo BAD, CAD, ſunt æqualia per propoſitionem 38. ergo per axioma 7. quodlibet ex illis erit dimidium totius trianguli dati BAC, quod erit duplum vnius illorum v. g. trianguli DAC. Sed per propoſ. præcedentem 41. parallelogrammum factum DEFC, habẽs angulum CDE æqualem angulo G dato , eſt duplum trianguli DAC : ergo per 6. axioma parallelogrammum factum DEFC ; & triangulum datum ABC , erunt æqualia. Fecimus ergo imperatum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

### I.

*Quotieſcumque vna recta occurrit alteri recta eam ſecans , altera parallela vni illarum, alteri etiam occurret eam ſecando.*

Fig 57. HOc oſtenſum eſt in conſtructione , in exemplo rectæ lineæ D E occurrenti rectæ AF eam ſecando in E ; & rectæ CF parallelæ ipſi DE, quæ etiam occurrit eidem rectæ AF in F , & ſic de aliis.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I I.

*Linea recta educta ab vno angulo eum diuidens faciente cum alio angulo duos angulos æquales duobus rectis ad eaſdem partes recta incidentis inter duas parallelas : ſecabit ambas illas parallelas.*

Fig. 57. HOc oſtendimus in conſtructione in recta DE educta ab angulo ADC illum diuidente, qui cum alio angulo FAC efficit duos angulos æquales duobus rectis ad eaſdem partes rectæ AD incidentis in parallelas AF , BC , ad eaſdem partes : nam recta linea DE ſecat ambas illas parallelas rectas AF, DC.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I I I.

*Si parallelogrammum & triangulum conſtituta ſint inter eaſdem parallelas ; & parallelogrammi baſis fuerit dimidium baſeos trianguli : ipſa erunt æqualia.*

HOc fuit finis demonſtrationis allatæ & concluſio illius.

# PROPOSITIO XLIII.

## In omni parallelogrammo, complemẽta eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.

SVppoſitio & explicatio diuerſorum caſuum huius propoſitionis. Imprimis complementum in vniuerſum eſt aliquod quod cum alio dato complet ſeu adæquat aliud: ſed in 36. definitione ſumptum eſt complementum in parallelogrammo , pro parallelogrammis duobus per quæ non incedit diameter illius , vt in parallegrammo primo ABCD , diuiſo in quatuor parallelogramma, AIFE, FGCH, IBGF, EFHD, quorum duo prima dicuntur circa diametrum AE , alia duo poſtrema vocantur complementa : Itaque in hoc primo caſu demonſtrandum erit complementa IBGF, EFHD, eorum parallelogrammorum AIFE, FGCH, quæ circa diametrum AC ſunt , eſſe inter ſe æqualia : & caſus iſte eſt quando duo parallelogramma circa diametrum nihil commune habent præter punctum duorum angulorum. Secundus caſus erit quando duo parallelogramma circa diametrum nihil omninò commune habent vt in parallelogrammo ſecundo, duo parallelogramma AIFE, LGCH, circa diametrum AC; probandum verò erit duo complementa IBGLF, EDHLF, per quæ non incedit diameter AC , quæ non ſunt parallelogramma, eſſe inter ſe æqualia. Tertius caſus erit quando duo parallelogramma circa diametrum partem habent communem , vt in tertio parallelogrammo, duo parallelogramma AIFE, GLHC, circa diametrum AC, partem habent communem LNFM , probandum eſt complementa IBGN, EMHD , illorum, eſſe æqualia, quæ in hoc caſu ſunt etiam Figu. 58.

paral-

parallelogramma. Itaque in hac propoſitione complementi nomen ſumitur in vniuerſum, propter ſecundum caſum, cuius complementa non ſunt parallelogramma, vti volebat definitio citata 36. ſunt tamen in primo & tertio caſu parallelogramma.

Demonſtratio In omnibus caſibus. Per propoſ. 34. triangula ABC, ADC, ſunt æqualia in quæ diuiditur totum parallelogrammum datum ABCD, ab ſua diagonali recta AC: ſed per eandem prop. etiam triangula AIF, AEF, ſunt æqualia; tùm etiam in prima figura, triangula duo FGC, FHC; & in ſecunda figura, LGC, LHC; & in tertia figura, LGC, LHC, ſunt æqualia in ſuis propriis figuris: Ergo per 3. axioma ſi duo enumerata triangula verſus vnam partem ſita ſeu intra propria triãgula enumerata adæquantia data illa complementa totalia, detrahantur, relinquentur in prima figura, complementa IBGF, EFHD, æqualia; & in ſecunda figura alia duo dicta complementa non parallelogramma; & in tertia figura alia duo enumerata complementa parallelogramma, quæ omnia erant demonſtranda.

## PROPOSITIO XLIV.

### Ad datam rectam lineam, dato triãgulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

*Figu.59.* SVppoſitio. Oporteat dato triangulo ABC rectilineo ponere parallelogrammum æquale, ad rectam lineam NO datam, vel illi æqualem, habens angulum æqualem dato angulo rectilineo M.

Conſtructio. Baſis AC trianguli dati bifariam ſecetur in D, per propoſitionem 10. & recta BD ducatur. Tùm vltra C producatur recta baſis AC longiſſimè verſus E: & per prop. 31. ex puncto B ducatur recta BH parallela ipſi ACE: Tùm per prop. 23. ad punctum D rectæ CD, fiat angulus CDF æqualis angulo dato M; recta DF, ſecabit rectam BH in F, per corollarium noſtrum 2. propoſ. 42. Præterea per propoſitionem 31. ducatur recta CG parallela ipſi DF rectæ, ſecabit etiam parallelas rectas, BH in G, AE in C, per corollarium noſtrum 1. prop. 42. Inſuper per propoſ. 3. ſumantur rectæ GH, CE, æquales ſingulæ ipſi rectæ datæ NO; & puncta H, E, nectantur rectâ HE, quæ parallela erit & æqualis rectæ CG per prop. 33. & etiam parallela ipſi DF per prop. 30. & æqualis illi per 34. Sed & ducta recta HC, producatur vltra C, occurret rectæ FD productæ vltra D, in puncto I, per corollarium 1. noſtrum propoſition. 42. Et per idem corollararium ſi producantur rectæ GC, vltra C, & recta HE vltra E; ſi ducatur recta IKL parallela rectæ DCE per prop. 31. occurret in K ipſi rectæ GCK, & in L ipſi rectæ HEL. Reſultabitq; per iſtam conſtructionem parallelogrammum FHLI, cuius diameter HI, diuiſum in quatuor parallelogramma FGCD, CELK, quæ ſunt complementa duorum aliorum GHEC, DCKI, per quæ incedit diameter HI.

Demonſtratio. Imprimis triangula ABD, CBD, ſunt æqualia per propoſition. 38. & adæquantur toti triangulo dato ABC iuxta axioma 9. ergo per axioma 7. erunt eiuſdem trianguli ABC dimidia: ſed trianguli CBD, parallelogrammum FGCD, habens angulum CDF æqualem dato M, eſt duplum per prop. 41. ergo per axioma 6. idem parallelogrammum FGCD, & triangulum datum ABC, erunt æqualia inter ſe. Præterea per propoſ. 29. anguli CDF, LID, erunt æquales, tùm etiam anguli LID, LKC; ergo per 1. axioma angulus LKC erit æqualis angulo CDF, vel angulo dato M. igitur parallelogrammum CELK, habebit angulum LKC æqualem angulo dato M, poſitumque erit ſub recta CE facta æquali datæ rectæ NO: Hoc autem parallelogrammum eſt æquale parallelogrammo FGCD oſtenſo æquali triangulo dato ABC; per prop. præcedentem 43: Igitur per 1. axioma erunt triangulum datum ABC & parallelogrammum CELK, poſitum ſub recta æquali datæ NO, habentque angulum æqualem dato M, æqualia. Fecimus ergo imperatum.

## PROPOSITIO XLV.

### Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

SVppoſitio ad rectam lineam datam HI, in dato angulo rectilineo G, oporteat parallelogrammum vnum conſtituere æquale dato rectilineo plano ACDEFB. *Figu.60.*

Conſtructio. Rectilineum datum reſoluatur in triangula ABC, CBD, EBF, & ſumantur primo loco duo triangula CAB, CDB, communem habentia baſim CB, quæ per prop. 10. bifariam in O ſecetur, & illi

per

per prop. 31. ex angulis A, & D, ipſi oppoſitis, ponantur rectæ lineæ, AK, DL parallelæ, quæ per propoſ. 30. erunt inter ſe parallelæ. Præterea in puncto O rectæ CB, fiat angulus BOM æqualis dato G, recta OM producta interminatè ſecabit parallelas AK, DL per corollarium noſtrum 1. propoſ. 42. illam in M, hanc in N; eritque angulus LNO, æqualis angulo BOM per 29. propoſ. & per 1. axioma angulo dato G: ducta ergo recta ex B parallela ipſi rectæ NOM, producenda vtrimque ſecabit per corollarium cit. rectam MK in K, & NL in L; & reſultabit parallelogrammum MKLN habēs angulum LNM æqualem dato angulo G, eritque æquale duobus rectangulis MKBO, OBLN, per axioma 19: Sed per propoſ. 42. corollarium noſtrum 3. parallelogrammum MKBO eſt æquale triangulo CAB, eo quod ſtet inter eaſdem parallelas, & parallelogrammum illud baſim habeat OB dimidiū baſeos CB trianguli CAB: ſimili ratione rectangulum OBLN, æquale eſt triangulo CDB; ergo per 1. axioma, totum parallelogrāmum MKLN erit æquale duobus triangulis CAB, CDB. Quod ſi fuerint alia duo triangula communem habentia baſim ſe mutuò ſequentia in rectilineo redacto ad illa, ipſa hac methodo reducantur ad aliud parallelogrammum habens angulum æqualem dato G. Quod ſi fuerit reliquum vnum triangulum, vt in exemplo allato, triangulum EBF, ipſum per 42. propoſitionē reducatur ad parallelogrāmum QRFP, æquale illi, & habens angulum FPQ æqualem dato G. Hiſce paratis faciemus aliud parallelogrammum MKLN, æquale parallelogrāmo alteri prædicto MKLN. per prop. 3. ponatur de aliqua infinita linea, vna MN æqualis lateri MN parallelogrammi prædicti MKLN, & ad eius punctum N fiat angulus MNL æqualis angulo MNL dicti parallelogrāmi, qui angulus per axioma primum erit æqualis angulo G dato: & per eādem prop. 3. detrahatur recta NL æqualis rectæ NL parallelogrāmi dicti; & per prop. 31. ponatur MK parallela rectæ NL, & æqualis per prop. 3. & ducatur recta KL, quæ erit æqualis rectæ MN, & ei parallelæ per prop. 33. & exurget parallelogrammum aliud ſeparatum MKLN ab prædicto, quorum anguli erunt æquales oppoſiti per 34. propoſ. & latera oppoſita, ideoque erunt per 1. axioma, ſi rectè comparentur æquiangula & æquilatera, & exinde per 9. axioma æqualia illa duo parallelogramma. Hoc verò parallelogrammum ſeparatum MKLN, reducetur ad parallelogrammum LZXY æquale, habens vnam rectam æqualem datæ HI, & angulum LXY æqualem dato angulo G: hac ratione. Productis rectis parallelis MK, NL, vltra K & L, in infinitum, ſumantur per 3. propoſ. rectæ KT, LZ æquales ipſi HI datæ rectæ, & puncta T, Z, coniungentur alia recta linea TZ, producenda in infinitum vltera Z, & etiam recta MN producatur in infinitum vltra N; erunt per propoſ. 33. parallelæ rectæ lineæ KL, TZ, & per prop. 30. parallelæ erunt rectæ TZ, MN; quare per corollarium noſtrum 2. propoſ. 42. recta ducenda TL producenda interminatè vltra L, occurret rectæ MN productæ in puncto V; ex quo ſi per propoſ. 31. ducatur recta VXY, ſecabit per corollarium noſtrum 1. propoſ. cit. 42. parallelas KL, TZ, productas, illam in X, hanc in Y; & reſultabit parallelogrammum LZYX, ſub recta LZ æquali rectæ datæ HI, habens angulum LXY æqualem angulo KLZ, per propoſ. 29. & per axioma primum angulo MNL, & ipſi dato G: ſed parallelogramma MKLN, LZYX, ſunt complementa aliorum duorum KTZL, NLXV, circa diametrum TV, parallelogrammi totalis MTYV, ergo per prop. 43. erunt æqualia: applicauimus ergo ad datam rectam lineam æqualemue illi, parallelogrammum æquale alteri parallelogrammo habens angulum æqualem dato angulo. Iam verò ad parallelogrammum LZYX, applicabimus aliud parallelogrammum æquale parallelogrammo QRFP, ideoque per 1. axioma æquale triangulo EBF reliquo prædicto; quod parallelogrammum applicatum erit ſub recta æquali datæ HI, habebitque angulum æqualem dato G. De recta XK producenda ſi opus ſit vltra K, ſumatur recta XAA æqualis rectæ FR, & de recta XV producenda ſi opus ſit, ſumatur recta XVV æqualis rectæ FP, per propoſ. 3. tùm per AA, ducatur recta AA DD, producenda vtrimque parallela ipſi LZ, per propoſ. 31: & duo puncta BB, VV, iungantur recta linea BBVV, hæc erit æqualis & parallela rectæ XAA, per 33. prop. & recta dicta per AA ducta parallela ipſi LZ, ſecabit rectam YT in DD, & rectam BVV in BB, per corollarium noſtrū 1. prop. 42. & reſultabit parallelogrāmum BB AA X VV, æquale parallelogrammo QRFP, & illius angulus X VV BB erit æqualis angulo YXL, ideoque angulo FPQ, ex dictis anteà: quare parallelogramma iſta erunt æqualia per 9. ax. quia ſunt æqualia & æquiangula: & ſi ducatur recta DD X, vltra X, ſecabit productam rectam BB VV, in CC, per corollarium 2. propoſ. cit. per quod punctum ſi ducatur recta CC EE, producenda parallela ipſi VV X Y rectæ, ſecabit rectas LX in FF, ZY in EE, producendas, per idem 2. corollarium

cit.

cit. noſtrum: & exurget parallelogrammum X Y FF EE, æquale parallelogrammo BB AA X VV, propoſ. 43. eritque ſub recta linea X Y æquali datæ HI, habenſque angulum X FF EE æqualem angulo L X Y, per 29. propoſ. ideoque ex dictis antea angulo dato G; & vlterius erit æquale triangulo reliquo EBF, rectilinei dati. His paratis ſequitur.

Demonſtratio. Totum parallelogrammum L Z LE FF, æquale eſt per axioma 19. parallelogrãmis duobus L Z Y X, X Y EE FF; & illud oſtẽſum eſt æquale duobus triangulis CAB, CDB rectilinei dati; & hoc æquale reliquo triangulo EBF dicti rectilinei dati; ergo per 1. axio. totum parallelogrammum æquale erit toti rectilineo dato. Sed etiam per conſtructionem demonſtratam conſtat, parallelogrammum totale L Z EE FF, eſſe ſub recta LZ æquali datæ rectæ HI, & habere angulum L FF EE æqualem dato G. Igitur datum rectilineum vertimus in parallelogrammum æquale ſub recta linea data & habens angulum æqualem dato. quod erat præſtandum.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

***Quadrilaterum rectilineum quodcumque conuertere in parallelogrammum æquale habens angulum æqualem dato angulo rectilineo.***

MOdum illud præſtandi ac demonſtrandi rectè factum oſtendimus in conſtructionis initio.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

***Parallelogrammum dato alteri parallelogrammo æquale & æquilaterum & æquiangulum delineare.***

HAnc praxim explicauimus & oſtendimus in ſecunda praxi conſtructionis ad huius propoſitionis 45. demonſtrationem.

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

***Datum parallelogrammum conuertere in aliud parallelogrammum æquale habens angulum datum æqualem dato angulo, & latus vnum æquale datæ rectæ lineæ.***

HOc præſtitimus in conſtructione.

## COROLLARIVM NOSTRVM IV.

***Ad datum parallelogrammum applicare aliud parallelogrammum æquale dato.***

IStud effecimus in vltima parte conſtructionis: nam ad parallelogrammum LZ YX, applicauimus parallelogrammum X Y EE FF æquale alteri parallelogrammo QR F P.

## COROLLARIVM NOSTRVM V.

***Datis duobus parallelogrammis inæqualibus ſub communi recta linea, & ſub angulo vno æquali; de maiore detrahere aliud æquale minori.***

PEr 3. prop. de laterum inæqualiũ maiore detrahatur recta æqualis minori lateri, & per finem ducatur per propoſ. 31. recta parallela communi rectæ vel lateri, fiet parallelogrammum vnum æquale minori incluſum in maiore, quod per 34. erit æquiangulum & æquilaterum minori, & per axioma 9. æquale illi.

## COROLLARIVM NOSTRVM VI.

***Datis duobus parallelogrammis inæqualibus, differentiam illorum parallelogrammo alio repræſentare.***

SI enim ad angulum æqualem illa redigantur per corollarium 1. & per 4. vnum applicetur ad aliud, & per 5. ex maiore detrahatur vnum æquale minori; apparebit differentiã amborum.

Longiores fuimus in explicãdo iſta propoſitione practica, quia lucem Geometriæ Tyronibus præferre volens aduerti cõfundi eos in breuiore praxi ſolita apud alios Commentatores horum Elementorum, qui ſupponunt praxes intricatas prop. præcedentiũ 42. & 43. & 44. Quare dum contendunt ſoluere iſtam propoſitionem practicam, lineis implicati deſperant; quarum verò propoſitionum praxes in exemplo vno & figura dum contemplantur, facile propoſitum aſſequuntur. Conſulto igitur figuram propoſui omnes illas praxes continentem, ex cuius conſtructione elicui noſtra corollaria præcedentia.

## PROPOSITIO XLVI.

### Super data recta linea quadratum deſcribere.

SVppoſitio. Super data recta AB terminata, ſit deſcribendum Quadratum.

Figu.61. Conſtructio. Per prop.11. ex puncto A rectæ AB, erigatur recta linea AC perpendicularis ipſi AB; & fiat recta AC æqualis rectæ AB per propoſ.3. tùm per noſtrum coroll.2. ad propoſ.22. fiat triangulum CDB ſupra rectam CB ducendam, ex tribus rectis AC, AB, CB. Dico figuram ACDB reſultantem eſſe quadratum.

Demonſtratio. In triangulis CAB, CDB, latera per conſtructionem ſunt æqualia, & baſis CB communis; ergo per 8.prop.anguli A & D erunt æquales, & quia per conſtructionem & defin.10. angulus A eſt rectus, etiam rectus erit angulus D. Et quia facta triangula CAB, CDB, ſunt iſoſcelia ob æqualia latera CA, BA, & CD, BD, ſuntque rectangula ob angulos A & D rectos, ſinguli anguli ad baſim communem BC, erunt ſemirecti per corollarium 2. propoſ. 32. quare duo ſimul iuncti DCB, ACB in eodem puncto C, efficient vnum rectum angulum ACD: ſimili modo alij duo anguli ad punctum B, efficient alium angulum rectum ABD. Cùm ergo oſtenderimus figuram quadrilateram ACDB eſſe æquilateram & æquiangulam rectangulam, ipſa erit quadratum per defin.29. Quadratum ergo poſuimus ſuper data recta linea, ita vt ipſa ſit vnum eius latus.

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Omne quadratum eſt parallelogrammum.*

NAm quia duo quilibet eius anguli ſunt recti, duo latera quoduis eius oppoſita erunt parallela per propoſ.29. quare per def. 35. erit parallelogrammum.

### COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Parallelogrammum ſub duabus rectis æqualibus angulum rectum efficientibus eſt quadratum.*

NAm erit angulus alius recto oppoſitus etiam rectus per prop. 34. & latera his oppoſita æqualia & alij anguli per 29. erunt etiam recti. ergo ex def. erit quadratum.

### COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Quadrata rectarum æqualium ſunt æqualia.*

NAm per axioma nonum, rectæ lineæ æquales ſuperpoſitæ vti par eſt, congruunt; ſic omnia latera quadratorum cùm ſint æqualia per def. illorum, congruent, ſi ſub æqualibus rectis ſint: tùm etiam anguli recti illorum, per cit. axioma 9. ergo tota congruent, ergo erunt æqualia per idem axioma.

### COROLLARIVM NOSTRVM IV.

*Quadratorum æqualium latera vel rectæ ex quibus ſunt facta, ſunt æqualia.*

NAm rectæ duæ angulum vnum rectum vnius quadrati cógruent vel ſecundum ſe totas in rectum poſitas, vel partim, vna cum angulis rectis quas efficiunt, ſi ſuperponantur vti par eſt inuicem, iuxta 9. axioma. Si primum erunt illæ rectæ æquales, quod volumus. Si ſecundum vnum quadratum continebitur in alio, & ſic erunt inæqualia per 8. axioma, contra datum: vel vnum latus vnius erit maius & minus reſpectu æqualium laterum alterius, quod eſt contradicens 1. axiom. Primum ergo membrum ſtabit quod erat intentum.

## PROPOSITIO XLVII.

### In rectangulis triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum ſubtédente deſcribitur; æquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur quadratis.

PRoclus in hunc librum, celebrat Pythagoram Authorem huius propoſitionis, pro cuius demonſtratione dicitur Diis ſacrificaſſe hecatombam Taurorum.

Suppoſitio. Triangulum ſit rectangulum BAC. Dico quadratum lateris BC ſubtendentis angulum rectum BAC, eſſe æquale quadratis ſimul duorum aliorum laterum Fig. 62.

AB,

AB, AC, angulum illum BAC continentibus.

Conſtructio. Producatur BA vltra A, & per 3.propoſ.ſumatur AH æqualis lateri AC, angulus CAH erit rectus per corollarium noſtrum 3.prop 13. tùm per praxim prop.46. perficiatur CAHI. Simili ratione producta recta CA vltra A, quadratum & ſumpta recta AF æquali rectæ AB, perficietur quadratum BAFG: Præterea per prop.11. lib.1.ex puncto B, rectæ BC, excitetur recta perpendicularis BE, quæ occurret in rectæ GF per corollarium noſtrum primum propoſ.42.lib.1. iſta recta BE probabitur æqualis rectæ BC: ſi enim ex duobus rectis angulis GBA, EBC, æqualibus, tollatur communis angulus EBA, relinquentur æquales anguli GBE, ABC; ſunt autem & alij duo EGB, BAC recti æquales: ergo per prop.26. lib.1. quia in triangulis EGB, CAB, duo prædicti anguli ſunt æquales, vterq́ue vtriq́ue & latera AB, GB, æqualia: ex natura quadrati, erunt latera BC, BE æqualia: perficietur ergo quadratum CBED per praxim prop. præced. 46. Iam verò quia in triangnlo BAC rectangulo, datur angulus A rectus, erunt per corollar.1. propoſ. 17. ſinguli reliqui anguli ABC, ACB, acuti; ergo recta linea AL demiſſa perpendicularis ad baſim BC ex angulo BAC recto, cadet in L puncto ex intermediis BC, per corollar.3.prop. cit.17. parallelæ ergo erunt rectæ lineæ CD, LA per 28. prop.& per 30.etiam parallelæ erunt rectæ LA, BE: Producatur autem recta LA vltra A, ſecabit latus ED in K per corollarium noſtrum 1. propoſ. 42. Itaq́ue reſultabunt iſta parallelogramma EKLB, KDCL: tùm etiam parallelæ erunt rectæ lineæ GB, FAC; tùm FAC, HI, per corollarium noſtrum primum prop. præced. & GF, BA. Inſuper producta recta LAK vltra K, ſumptaq́ue KM æquali ipſi AL, ducatur recta MD, erit angulus DKM rectus vt alius angulus CLK per prop 29. & per prop. 34.rectæ LC, KD, erunt æquales. Ergo in triangulis MKD, ALC, quia duo latera MK, KD, ſunt æqualia duobus lateribus AL, LC, vtrumque vtriq́ue anguloſq́ue continent rectos æquales per axioma 12. erunt baſes MD, AC æquales, & anguli KDM, LCA, æquales per propoſ.4. quibus angulis ſi addantur æquales anguli recti KDC, ACI, fient totales anguli MDC, BCI æquales. Denique ducantur rectæ EA, BI, MC.

Demonſtratio. Duo triangula ICB, MDC, habent duo latera MD, DC, æqualia lateribus IC, CB, vtrumque vtrique, (nam IC, CA ſunt æquales per naturam quadrati, tùm oſtendimus rectas MD, AC eſſe æquales, ergo per 1.axioma, erunt rectæ MD, IC æquales) anguloſq́ue continere æquales MDC, ICB, oſtendimus, igitur per 4.propoſ. triangula ICB, MDC æqualia erunt: ſed per prop. 41. quadratum CIHA duplum eſt trianguli ICB, & parallelogrammum KDCL duplum eſt trianguli MDC, ergo per 6.axioma, quadratum CIHA, & parallelogrammum KDCL, erunt æqualia. Ad hæc per 41.propoſ. quadratum BGFA duplum eſt trianguli BEA; & parallelogrammum EKLB duplum eſt eiuſdem trianguli EAB; ergo per axioma 6, erunt quadratum BGFA, & parallelogrammum EKLB æqualia. Verùm per axioma 19.quadratum BEDC, lateris BC, æquale eſt duobus parallelogrammis BEKL, KDCL, oſtenſis æqualibus ipſis quadratis BGFA, CIHA, laterum AB, AC, rectum angulum continentibus in triangulo BAC, dato: ergo per 1. axioma, quadratum lateris BC, æquale erit quadratis prædictis laterum AB, AC.quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM NOSTRVM

*Quadratum diametri dati quadrati eſt duplum quadrati ipſius, vel vtriuſve laterum quadrati dati.*

COnſulatur figura propoſ.46.ſuperioris. *Fig. 61.*
Cùm quadrata rectarum AB, AC, ſint æqualia per corollarium noſtrum 3. propoſ. cit. 46. quibus ſimul ſumptis eſt æquale quadratum CB diametri, per iſtam propoſ.47. manifeſtum eſt quod quadratum diametri AC, ſit duplum quadrati vtriuſuis laterum AB, AC, hoc eſt quadrati dati ABDC.

## PROPOSITIO XLVIII.

Si quadratum quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, æquale ſit eis quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur quadratis: angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.

SVppoſitio. In triangulo ABC, quadratum rectæ AC ſit æquale quadratis ſimul *Fig. 63.*
ſumptis aliorum duorum laterum AB, BC: Dico angulum ABC contentum ab his duobus lateribus AB, BC, eſſe rectum.

Conſtructio. De aliqua recta linea longiſſima ſumatur per 3. propoſ. recta linea DE æqualis rectæ AB; & per propoſ. 11. ex puncto E excitetur recta linea perpendicularis EF ipſi DE, ſumaturque per cit. propoſ. 3. recta EF æqualis rectæ BC: denique recta DF tranſmittatur. Reſultabit triangulum DEF rectangulum ob angulum E factum rectum.

Demonſtratio. Quadrata rectarum AB, BC, erunt æqualia quadratis rectarum DE, EF, ob æqualitatem illarum aliis per conſtructionem, idque per corollarium noſtrum 3. propoſ. 46. Sed ex datis quadratum rectæ AC eſt æquale quadratis rectarum AB, BC; & per propoſ. præcedentem 47. quadratum rectæ DF eſt æquale quadratis rectarum DE, EF: ergo per 1. axioma erunt quadrata rectarum AC, DF, æqualia: igitur per corollarium 4. prop. 46. erunt æquales rectæ lineæ AC, DF. Cum ergo in triangulis ABC, DEF, ſunt latera AB, BC, æqualia lateribus DE, EF, vtrumque vtrique, & baſes AC, DF, æquales, erunt per propoſ. 8. anguli B & E æquales; ſed per conſtructionem eſt angulus E rectus, ergo etiam angulus B rectus erit. quod erat ratiocinio facto concludendum.

COM-

# COMMENTARIVS
## IN
# LIBRVM SECVNDVM
## ELEMENTORVM GEOMETRICORVM
# EVCLIDIS.
# DEFINITIONES.

I.

***Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub rectis duabus lineis quæ rectum comprehendunt angulum.***

Figu.64. INSTAR omnium quadrilaterorum parallelogrammorum rectangulorum, ſit ABCD, duas habens rectas lineas ſeu latera AB, BC, angulum rectum ABC comprehendentes: hoc parallelogrammum dicetur rectangulum parallelogrammum contentum ſeu comprehenſum ſeu factum ſub duabus rectis AB, BC, rectum angulum efficientes. Et abſolutè in Geometrarum ſcholis vocatur rectangulum; ita vt rectanguli nomen ſine vllo addito, indicet parallelogrammum rectangulum quadrilaterum. Quod ſi duæ illæ rectæ angulum rectum comprehendentes fuerint æquales, rectangulum illud erit quadratum: ſi vna fuerit maior altera, erit figura quadrilatera altera parte longior definita definitione 30.

Alij definierunt rectangulum per cauſam efficientem hac ratione, eſt veſtigium in plano relictum ab recta linea puta AB, mota ſupra planum in quo eſt cum alia recta BC cum qua angulum rectum efficiebat, vno ſuo extremo ſemper exiſtente B in recta linea BC immobili, ita vt ſemper in illo motu, recta AB mota angulum rectum efficiat cum recta BC immobili, quando conſiſtit in altero extremo C immobilis rectæ BC.

Hæc definitio rectè explicat quare dicatur rectangulum ſub duabus rectis angulum rectum efficientibus; aſſignantur enim cauſæ efficientes illud, vnam nempe rectam fluentem, aliam verò conſiſtentem ac dirigentem motum mobilis ac terminantem motum illum, vno veluti termino à quo, alio verò ad quem.

Veſtigium autem illud relictum terminari rectis lineis facile oſtenditur: recta enim mobilis ſeu eius veſtigium relictum in termino à quo, iam relinquit rectam vnam; & in termino ad quem ipſa terminus vnus eſt ſeu recta linea: ſuo verò extremo quod non eſt in immota recta linea, aliud veſtigium rectæ lineæ relinquit terminatæ duobus punctis vnò à quo exiit, alio in quo quieſcit: & recta linea immobilis quartam rectam terminantem rectangulum effectum exprimit.

Et ne quis cauilletur extremum A rectæ BA motæ modo explicato in definitione, minimè efficere rectam lineam, ſed curuam aut fluctuãtem totam, aut partim rectam vt AE, partim etiam fluctuantem: hæc quomodocumque fluctuans ſit, poterimus per petitionem primam lib. 1. ex puncto A ad punctum D rectam lineam traiicere, quæ vel congruet cum fluctuante, vel non; ſi congruat, fluctuans euocata, erit recta quod volumus, & aduerſarius cauillans ſibi ipſi contradicet, dum lineam fluctuantem fictam ſuam, rectam eſſe concedit: ſi non congruat, erit tota ſupra rectam ductam AD, vel tota infra ipſam, vel partim infra & partim ſupra eandem rectam AD: quodcumque admiſerit aduerſarius, poterit ex puncto G illius, recta GH linea demitti perpendicularis ad immobilem rectam

 BC

65.

Digitized by Google

## LEMMA I. NOSTRVM.

*Ex duabus rectis lineis datis rectangulum exhibere: vel parallelogrammum quadrilaterum habens angulum æqualē dato angulo rectilineo non recto: vel perficere ſi duæ rectæ datæ angulum efficiant.*

Fig. 66. SVppoſitio. Ex duabus datis rectis lineis AB, AC, conſtituendum ſit rectangulum: vel parallelogrammum quadrilaterum habēs angulum æqualem dato angulo rectilineo E.

Conſtructio. Pro rectāgulo ex puncto extremo A datæ rectæ AB, erigatur per prop. 11. l. 1. recta linea AC perpēdicularis ipſi AB: tùm centro C, interuallo rectæ AB fiat arcus circuli versùs B; & centro B, interuallo rectæ AC, fiat alter arcus circuli ſecans priorē in D ſupra AB: Inſuper punctū D coniūgatur cum punctis C, & B, rectis lineis DC, DB: Denique recta linea diagonalis ducatur CB. Pro parallelogrammo non rectangulo, fiat per prop. 23. lib. 1. in puncto A rectæ AB, angulus BAC æqualis dato angulo E rectilineo; & per propoſitionem 3. ſumatur recta AC æqualis datæ AC: Et reliqua omnia fiant vti præcepimus pro rectangulo. Dico primum quadrilaterum factum eſſe parallelogrammum rectangulum, & ſecundum eſſe parallelogrammum habens angulum æqualem dato E: & ambo eſſe ſub duabus datis rectis lineis AB, AC.

Demonſtratio. Per ipſam conſtructionem rectæ lineæ AB, AC, ſunt vel ipſæ datæ vel æquales ipſis: tùm rectæ AC, BD, æquales, quia ſunt ſemidiametri circulorum æqualium per def. 37. lib. 1. tùm rectæ AB, CD, æquales, ob eandem definit. Cùm ergo in triangulis ABC, DCB, ſint latera AB, BC, æqualia lateribus DC, CB; vtrumque vtrique, & baſes AC, BD æquales; erunt per prop. 8. lib. 1. anguli ABC, DCB; æqnales: ſed ſunt alterni, ergo per prop. 27. libr. 1. latera oppoſita AB, CD, erunt parallela; quæ iam ſunt oſtenſa æqualia: igitur per prop. 33. eiuſdem libri, reliqua duo AC, BD oppoſita erunt etiam parallela. parallelogramma igitur erunt AD, per def. 35. lib. 1. Sed in primo facto quia angulus A eſt rectus, erit etiam alter angulus D illi oppoſitus etiam rectus per propoſ. 34. libr. 1. Et quia parallelæ ſunt rectæ AC, BD, oſtenſæ, erunt per prop. 29. lib. 1. anguli interni & ad eaſdem partes, CAB, DBA, æquales duobus rectis, & rectus factus eſt angulus A, ergo reliquis DBA etiam rectus erit, & per cit. prop. 34. alter huic oppoſitus videlicet ACD erit etiam rectus. At verò in ſecundo, quia angulus in A factus eſt æqualis angulo dato E; erit parallelogrammum iſtud habens angulum æqualem dato. Fecimus ergo ex duabus rectis datis lineis, & rectangulum; & aliud parallelogrammum quadrilaterum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo, ſicut fuit imperatum.

## LEMMA II. NOSTRVM.

*Si rectanguli latus vnum ſecetur in quotlibet partes, ex quarū extremis rectæ lineæ ponantur parallelæ alteri lateri cum quo ſectum efficit angulū rectum, ſecabunt productæ versùs latus parallelum ſecto, ipſum latus; & efficient rectangula ſub partibus ſecti lateris & inſecto prædicto: Idem contiget ſi ab extremis rectæ ſectæ partium erigantur perpendiculares rectæ lineæ ſecto lateri versùs aliud ipſi æquale vel parallelum.*

*Et ſi ſecetur aliud latus inſectum in alias partes, & ab earum extremis rectæ lineæ parallelæ ponantur alteri priùs ſecto, vel perpendiculares huic ſecto ſecundo lateri, productæ versùs aliud latus huic æquale, ſecabunt latus iſtud. & inter medias alias ductas lineas, cum quibus efficient alia rectangula, quorum latera oppoſita erunt partes amborum rectorum laterum ſectorum vel ipſis æquales.*

*Et ſi rectangulum ita diuiſum fuerit quadratum: rectangula illa effecta circa eius diametrum, erunt quadrata partium ſectorum laterum.*

SVppoſitio pro prima parte. Rectanguli AD, latus vnum AB ſecetur in partes AE, EF, FG, GB, vtcumque; & ab E, F, G, extremis illarum punctis rectæ lineæ EH, FI, GK, parallelæ lateri AC, cum quo ſectum latus AB, rectum angulum A efficiebat; vel ab dictis extremis E, F, G, rectilineæ EH, FI, GK ad angulos rectos ipſi AB, eductæ ſint; iſtæ ſecabunt latus CD oppoſitum lateri AB ſecto ſi producantur versùs illud, per coroll. noſtrum 1. prop. 42. libr. 1. Dico primò has parallelas rectas vel perpendiculares efficere rectangula, AH, EI, FK, GD, ſub partibus AE, EF, FG, GB, ſecti lateris AB, & inſecto latere AC. Hæc eſt aſſertio primæ partis huius lemmatis. Fig. 67.

Demonſtratio primæ partis. Si ductæ ſint rectæ parallelæ EH, FI, GK, lateri AC, ipſæ erunt per 30. prop. lib. 1. parallelæ inter ſe & lateri BD; ſed & partes oppoſitæ AE, CH; EF, HI; FG, LK; GB, KD, ſunt etiā parallelæ, quia ſunt partes parallelorum laterum AB, CD: igitur erunt parallelogramma AH, EI, FK, GD, per def. 35. lib. 1. Simili modo erunt parallelogramma AI, AK: Quòd ſi fuerint prædictæ lineæ rectæ perpendiculares lateri AB; erunt anguli deinceps recti & duo interni ſemper inter eas etiam recti; ergo erunt per prop. 28. dictæ rectilineæ EK, FI, GK, parallelæ; vnde reliqua ſequentur quæ iam oſtendimus.

dimus. Cùm autem per 34. prop. lib. 1. in parallelogrammis anguli oppoſiti ſint æquales, & anguli in A & C, ex datis ſint recti, erunt omnes anguli dictorum parallelogrammorum recti: rectangula igitur erunt AH, EI, FK, GD. quod erat probandum pro hac prima parte.

Suppoſitio pro ſecunda parte, poſita conſtructione præcedente primæ partis, Rectanguli eiuſdem AD, latus AC, ſectum ſit vt libet in partes AM, ML, LC; & ab earum extremis communibus M, L, ductæ ſint rectæ lineæ MO, LN, parallelæ lateri AB; vel perpendiculares ipſi lateri AC diuiſo, versùs latus BD oppoſitum ipſi ſecto AC; ſi producantur ipſum latus ſecabunt per corollar. cit. noſtrum primum prop. 41. lib. 1. intermediaſque priùs ductas rectas lineas parallelas datas vel oſtenſas lateri AC, vel BD. Et dico ſecundò has ſecundas rectas parallelas MO, LN, cum priùs ductis rectis lineis EH, FI, GK, parallelis, alia rectangula diuerſa, LH, LI, LK, LD; MH, MI, MK, MD; MP, MQ, MR, MN; SQ, SR, SN; TR, TN, VN; AS, AT, AV, AO; ET, EV, EO; FV, FO; GO; AP, AQ, AR, AN; EQ, ER, EN; FR, FN; GN. Et ſic de aliis omnibus; quorum latera oppoſita, ſemper erunt vel partes ſectorum duorum laterum, vel intermediarum ductarum rectarum partes illis æquales.

Demonſtratio ſecundæ partis. Imprimis dictæ rectæ lineæ MO, LN, vt in prima parte oſtendetur efficere rectangula AO, AN, MN, MD, LD, quorum quædam latera erunt partes AM, AL, ML, MC, LC, lateris AC diuiſi, alia verò vel latus AB priùs diuiſum in prima parte, aut illi oppoſitum CD, vel rectæ ipſis æquales MO, LN, per propoſ. 34. libr. 1. Cùm ergo ſint ad angulos rectos ipſis oppoſitis lateribus AC, BD; etiam ſecabunt ad angulos rectos intermedias rectas EH, FI, GK, parallelas illis, per coroll. noſtrum ſecundum prop. 29. lib. 1. & ſic ſemper erunt per ipſam prop. 29. parallelæ inuicem. Quare prædicta omnia quadrilatera recenſita in conſtructione, & infinita alia huiuſmodi, erunt parallelogramma, quia oppoſita eorum latera ſunt parallela: Et quia omnes eorum anguli ſunt recti, eo quod oſtenſæ ſint huiuſmodi rectæ ſe mutuo ſecare ad angulos rectos, ipſa parallelogramma erunt rectangula.

Conſtructio pro tertia parte. ſit quadratum, rectangulum ED, ducatur diagonalis HB, & ſectum eius latus EB, vtcumque in partes EF, FG, GB, & ab earum extremis cōmunibus eductæ perpendiculares FI, GK, ipſi EB; vel parallelæ rectæ FI, GK, lateri non ſecto EH vel BD: iſtæ rectæ erunt ſibi inuicem parallelæ, & efficient rectangula EI, EK, FK, FD, GD vti in prima parte oſtendimus, ſecabuntq; obuiam diagonalem rectā HB, in punctis Q, V: ex quibus ſi ducantur rectæ lineæ parallelæ lateri ſecto EB, vt ſunt rectæ PQN, SVO, productæ vti par eſt ſecabunt latera EH, BD quadrati dati ED, in punctis P, S, N, O, iuxta coroll. noſtrum 1. prop. 42. lib. 1. efficientque vti oſtendimus in prima parte parallelogramma rectangula PD, PO, PB, SB: tùm efficient cum aliis primis rectis lineis ductis alia rectangula diuerſa vti oſtendimus in ſecunda parte, quorum aliqua erunt circa diametrum HB, quadrati dati, qualia ſunt PI, TR, GO, SK, TN: hæc verò rectangula omnia, & ſic de aliis omnibus rectangulis circa diametrum. Dico tertiò eſſe quadrata, habentia ſua latera vel partes ſecti lateris EB, vel æqualia ipſis.

Demonſtratio. Imprimis conſtat per ſecundam partem eſſe rectangula. iam probanda ſunt eſſe quadrata partium ſecti lateris EB. Imprimis per coroll. noſtrum quintum prop. 32. lib. 1. In quadrato ED, diagonalis HB, diuidet duos angulos rectos EHD, EBD, ſingulos in duos ſemirectos DHB, EHB, & EBH, DBH, & cùm recti omnes anguli rectilinei ſint æquales per ax. 12. libr. 1. erunt per axioma 6. illi anguli ſemirecti æquales inter ſe. Præterea cùm in parallelas rectas HD, PN, SO, EB; rectā incidat HB diagonalis, & vni earum HD, inclinata ſit oſtenſa ſecundùm angulum ſemirectum DHB, erit per coroll. noſtrum tertium prop. 32. lib. 1. Similiter inclinata ad alias prædictas parallelas PN, MO, ſecundùm angulos ſemirectos æquales NQB, OVB: Cùm ergo in triangulis HIQ, QRV, VOB, ſint anguli recti in I, R, O, & anguli prædicti ſemirecti, erunt & alij ſemirecti videlicet IQH, RVQ, OBV, quandoquidem per prop. 32. Citatam, tres anguli ſimul ſumpti cuiuſcumque trianguli ſunt æquales duobus rectis: ergo in dictis triangulis anguli ad baſes HQ, QV, VB, erunt æquales cùm ſint ſinguli ſemirecti, ideoque per prop. 6. lib. 1. latera illis oppoſita erunt æqualia, videlicet IH, IQ, in triangulo HIQ; tùm latera æqualia QR, RV, in triangulo QRV; tùm latera æqualia VO, OB, in triangulo VOB: & per propoſ. 34. lib. 1. in quadrato PI, latera HP, PQ, erunt æqualia æqualibus HI, IQ, & inter ſe per 1. axioma; & quia angulus in I eſt rectus, erit quadratum PI per noſtrum ſecundum coroll. propoſ. 46. libr. 1. Eodem modo oſtendemus quadrata eſſe TR, GO. Et quia rectangulum eſt EI, & per propoſ. 34. lib. 1. latera eius EF, HI, ſunt æqualia; erit quadratum PI, ex recta HI, æquali ipſi rectæ EF, quæ eſt vna ex partibus

tibus ſecti lateris EB. Et ſic de aliis omnibus huiuſmodi circa diametrum quadrati rectangulis, quæ hoc artificio demonſtrabuntur eſſe quadrata rectarum æqualium partibus oppoſitis ſecti lateris; vel vnius ex illis, vt in quadrato GO. Demonſtrauimus ergo intentum.

# PROPOSITIONES.

## PRIMA.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarũ altera in quotcumque ſegmenta: Rectangulum comprehẽſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorũ comprehẽditur rectãgulis.

Fig. 68. SVppoſitio. Duæ rectæ lineæ ſint datæ AB, AC, & vna illarum AB ſecta in quotcumque partes AD, DE, EF, FB: & altera AC inſecta. Dico rectãgulum ſub AB, AC, eſſe æquale rectangulis ſub AD, AC; ſub AC, DE; ſub AC, EF; ſub AC, FB ſimul ſumptis, hoc eſt ſub inſecta AC, & ſegmentis AD, DE, EF, FB ſectæ AB.

Conſtructio. Per primum lemma noſtrum fiat rectangulum AK ſub duabus datis rectis lineis AB ſecta & AC inſecta: & ducantur ex punctis cõmunibus D, E, F, partium ſectæ lineæ, parallelæ rectæ DG, EH, FI, lateri inſecto AC, per prop. 31. libr. 1. versùs latus CK; ipſæ per lemma noſtrum 2. efficient rectangula AG, DH, EI, FK ſub partibus AD, DE, EF, FB, ſecti lateris AB, & inſecto AC.

Demonſtratio. Per ax. 19. lib. 1. Rectangula AG, DH, EI, FK; ſunt æqualia rectangulo AK: & illa rectangula per conſtructionem allatam ſunt ſub partibus ſecti lateris AB, & inſecto AC; & rectangulum AK; eſt ſub ſecta data recta AB, & inſecta AC: ergo rectangulũ AK ſub duabus datis rectis lineis AB, AC, æquale eſt rectangulis ſub inſecta & partibus ſectæ ſimul ſũptis. quod erat demonſtrãdum.

## PROPOSITIO II.

Si recta linea ſecta ſit vtcumque: Rectangula quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur; æqualia ſunt ei, quod à tota fit quadrato.

Figu. 69. SVppoſitio. Recta linea AB ſecta ſit vtcũque in partes AC, CB; Dico quadratum totius rectæ AB, æquale rectangulis ſimul ſumptis, factis ex AB tota & ſegmento AC; & ex tota AB & eius ſegmento CB.

Conſtructio. Per 46. prop. fiet quadratum AE ex data AB: & per 31. prop. lib. eiuſdem 1. ducatur ex puncto ſectionis C, recta CF parallela lateri AD quadrati facti AE: reſultabunt per 2. lemma noſtrum, rectangula AF, CE, quorum primum erit ſub AD vel AB æqualibus per naturam quadrati, & ſegmento AC; aliud verò ſub eâdem AB vel illi æquali BE, & altero ſegmento CB.

Demonſtratio. Duo rectangula AF, CE, ſunt per ax. 19. æqualia toti quadrato AE: ſed per conſtructionem eſt rectangulum AF ſub tota AB, & ſegmento vno illius AC; & rectangulum CE eſt ſub eâdem AB & ſegmento eius altero CB; & totum quadratum AE eſt ſub data recta AB: ergo quadratum rectę AB, erit æquale rectangulis ſimul ſub ipſa tota & ſegmentis eius.

Quod ſi recta AB ſecaretur in plures partes: ſimili modo concludentur rectangula ſub tota & ſegmentis eius ſimul ſumpta, eſſe æqualia quadrato totius.

## PROPOSITIO III.

Si recta linea ſecta ſit vtcumq;: Rectangulum ſub tota & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt illi, quod ſub ſegmentis comprehẽditur rectangulo, & illi quod à prædicto ſegmẽto deſcribitur quadrato.

SVppoſitio. Recta linea AB ſecta ſit vtcumque in C: Dico rectangulum ſub tota AB, & vno ſegmento illius puta AC, eſſe æquale rectangulo ſub ſegmentis AC, CB, illius, & quadrato prædicti ſegmenti AC aſſumpti, ſi ſimul ſumantur rectangulum illud & quadratum. Fig. 70.

Conſtructio. Fiat per lemma noſtrum primum rectangulum AE ſub tota AB recta, & ſegmẽto eius AC; & per prop. 31. l. 1. ex puncto C ſurſum ponatur recta parallela CF, lateri AD: per lemma noſtrum ſecundum, reſultabunt rectangula AF, CE, ſub partibus AC, CB, ſectæ rectæ AB in C, & inſecta AD; quæ recta AD cùm ſit poſita æqualis ipſi AC, erit per noſtrum coroll. 2. prop. 46. li. 1. rectangulum

lum parallelogrammum AF, quadratum; & quidem ſegmenti AC aſſumpti: & rectangulum CE erit ſub CB ſegmento & BE æquali AD, ideoq; æquali ipſi AC, ideoque ſub ſegmentis AC, CB.

Demonſtratio. Per ax. 19. lib. 1. rectágulum AE, æquale eſt ſimul ſumptis rectangulis AF, CE: ſed per conſtructionem rectangulum AE eſt ſub data recta linea tota AB, & vno AC ſegmentorum ſuorum; & rectágulorum duorum AF, CE, primum eſt quadratũ ſegmenti aſſumpti AC; & aliud ſecundum eſt rectangulum ſub ſegmentis AC, CB, vel AC, BE; vti oſtendimus in conſtructione: ergo rectágulum AE ſub tota AB & vno ſegmentorum eius AC, æquale eſt quadrato dicti ſegmenti AC, & rectangulo ſub dictis ſegmentis AC, CB, quod erat oſtendendum.

## PROPOSITIO IV.

Si recta linea ſecta ſit vtcumque: Quadratũ quod a tota deſcribitur, æquale eſt & illis quæ à ſegmentis deſcribuntur quadratis, & ei quod bis ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo.

Fig. 71. SVppoſitio. Recta linea AB ſecta ſit vtcũque in C. Dico quadratũ totius AB, eſſe æquale & quadratis partiũ AC, CB, & rectágulo bis cõprehenſo ſub dictis partibus AC, CB.

Conſtructio. Per prop. 46. li. 1. vel per praxim lemmatis noſtri 1. fiat quadratum AE, ex recta AB data; & ducta diagonali DB; ex puncto C, per prop. 31. l. 1. ducatur recta CF parallela lateri AD quadrati, quæ ſecabit obuiam diagonalem DB in I, & latus DE in F, per ea quæ diximus in prima parte lemmatis noſtri 2. quod ſi etiam per punctum I, ducatur alia recta linea HIG, parallela lateri AB quadrati, etiam ſecabit latera oppoſita AD, BE, illud in H, hoc in I, per ea quæ diximus in citato noſtro lem. 2. & reſultabunt rectangula AI, IE, duo ſub partibus AC, CB; & quadrata HF, CG; illud ſegmenti AC, hoc ſegmenti CB, per idem cit. lemm. 2.

Demonſtratio. Quadratum AE æquale eſt quadratis HF, CG, & rectangulis AI, IE, per ax. 19. li. 1. ſed per conſtructionem quadratum AE eſt quadratũ rectæ datæ AB; & quadrata HF, CG, ſunt quadrata partiũ eius AC, CB; & rectágula AI, IE, duo, ſunt ſub ſegmẽtis AC, CB, ipſius rectæ lineæ AB: ergo vti propoſitum eſt quadratũ totius rectæ AB, æquale erit & illis quadratis partium AC, CB, & rectangulo bis cõtento ſub eiſdẽ partibus AC, CB.

COROLLARIVM I.

*Parallelogramma circa diametrum quadrati, ſunt quadrata.*

COROLLARIVM II.

*Diameter quadrati diuidit angulos duos quadrati biſariàm.*

HÆc corollaria ſunt antiquorum, quæ ex propriis conſtructionibus ad hanc propoſitionem deduxerant. Nos verò illa referimus, licet ex noſtra cõſtructione non demonſtrentur: quia primum fuit demonſtratum in lẽmate noſtro ſecundo. Alterum verò in collario noſtro 5. ad prop. 32. l. 1. ne ordinem antiquorũ interturbaremus, & præpoſuimus conſultò vt vel adiuncta cum illis, vel ipſa nobis anſam præberent nouas demonſtrationes aſſerendi. Conſulere igitur poterit Lector allatas à nobis locis ſupra laudatis explicationes horum corollariorum duorum.

## PROPOSITIO V.

Si recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia. Rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vnà cum quadrato quod ab intermedia ſectionum; æquale eſt ei, quod à dimidia deſcribitur quadrato.

SVppoſitio. Recta linea AB ſecta ſit biſariã in C, & non biſariam in D: Dico rectangulum ſub AD, DB, partibus eius inæqualibus vnà cum quadrato intermediæ partis CD; eſſe æquale quadrato dimidiæ CB. Fig. 72.

Conſtructio. Per prop. 46. li. 1. fiat quadratum CF ex recta CB, ducaturq; eius diameter EB: & per prop. 31. lib. 1. ex puncto D, ſurſum ponatur DL recta parallela lateri BF quadrati facti; hæc recta DL ſecabit intermediã diagonalem EB, in I, & latus EF in L, per ea quæ diximus in lem. noſtro 2. per quod etiã reſultabunt rectangula CL, DF, quod ſi ex puncto I, per cit. prop. 1. li. 1. poſuerimus rectã GHIK parallelam rectæ ACB, & aliam AG parallelam BF; ſecabunt ſe in puncto G, rectæ AG, GHIK prædictæ, per eadem quæ diximus in lem. 2. reſultabuntq́ue rectágula AK, AI, AH; CK; cùm quadrata HL, DK, partium CD, DB, eritq́ue per idem lemma 2. rectangulum AI ſub ſegmentis AD, DB inæqualibus; & quadratũ HL, ſub CD intermedia ſectionum.

Demõſtratio. Quia per conſtructionem rectangula AH, CK, ſunt inter eaſdẽ parallelas GK, AB, & ſuper ęquales baſes AC, CB, erunt per prop. 36. l. 1. æqualia: ſed & per 43. rectangulã CI, IF, ſunt æqualia; quibus ſi addatur commune

cõmune DK,fient rectangula CK,DF,æqualia per 2.ax.li.1.& per 1.ax. erunt rectangula AH, DF, æqualia: his æqualibus ſi addatur commune CL,fient per 2.ax. rectãgulum AI ſub inæqualibus ſegmentis AD,DB,rectæ datæ AB, vnà cũ quadrato HL,intermediæ CD ſectionũ, ęquale quadrato CF,rectę CB dimidiæ totius datæ AB.quod erat cõcludendum.

## PROPOSITIO VI.

Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, & adiecta, vnà cum quadrato à dimidia; æquale eſt quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tùm ex adiecta cõponitur, tanquã ab vna deſcripto.

Figu.73. SVppoſitio. Recta linea AB ſecta ſit bifariam in C, & ei in rectum addita recta linea BD: Dico rectãgulum ſub tota AD compoſita ex AB data, & adiecta BD, & ſub adiecta ipſa BD, vna cum quadrato à dimidia CB; æquale eſſe quadrato ex linea CD compoſita ab CB dimidia, & adiecta BD.

Constructio. Super recta CD fiat per prop. 46.libr.1.quadratum CE; & ducta diametro FD,ponatur per prop.31.li.1.ex B recta BIL parallela lateri CF quadrati facti, ipſa ſecabit obuiam diametrum FD in I,& latus FE quadrati, per ea quæ diximus in constructione noſtri 2. Lem. tùm per eandem prop.31. ponantur rectæ parallelæ, GHIK quidem ipſi AD, tranſiens per punctum I diametri; alia verò AG parallela lateri DF quadrati facti, quæ ſibi mutuò occurrent in G, ex dictis in constructione cit. Lem.2. noſtri: & per illud Lem. HL erit quadratum rectæ CD, & BK quadratum adiectæ; quare per propoſ. 34. rectangulum erit AK, ob angulos rectos in K & D quadrati BK: & per cit.Lem. erunt rectaugula CI, IE, AH.

Demonſtratio. Per prop.36.libr.1. rectangula AH,CI,erunt æqualia; ſed per prop.43. lib.1.rectangula CI,IE ſunt æqualia;ergo per 1.ax.lib.1.rectangula AH, IE erunt æqualia: his æqualibus poſtremis ſi addantur commune rectãgulum CK, & quadratum HL ex dimidia CB;fient per 2.ax.libr.1. rectangulum AK ſub tota AD, & adiecta BD,vna cũ quadrato HL ex dimidia CB, æquale quadrato CF ex dimidia CB & adiecta BD, tanquam vna linea. ſicut fuit propoſitum.

## PROPOSITIO VII.

Si recta linea ſecetur vtcumque: Quod à tota, quodque ab vno ſegmẽtorum vtraq; ſimul quadrata; æqualia ſunt & illi quod bis ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur rectangulo, & illi quod à reliquo ſegmento fit quadrato.

SVppoſitio. Recta AB ſecta ſit vtcumque in C: Dico quadratum totius AB,& quadratum partis vnius eius, exempli gratia CB; æquale eſſe quadrato reliquæ partis AC,& rectangulo bis comprehenſo ſub tota AB, & parte CB aſſumpta, ſi ſimul ſumantur quadratum AC,& duo rectangula prædicta. Fig.71.

Constructio. Per 46.prop.li.1.ex recta AB fiat quadratum AE,& eius diameter DB ducatur: tum per prop.31. lib. eiuſdem,ponatur ſurſũ recta linea CIF,quæ ſecabit diametrum DB in I,& latus DE in F,iuxta coroll. noſtra 1.& 2.prop.42.l.1.vel ea quæ diximus in explicatione lem.noſtri 2.ſicuti etiã recta HIG parallela ducta lateri AB per punctum I,ſecabit latera AD,BE quadrati,illud in H,hoc in G:& per lemma ipſum ſecundum,erit rectangulũ AG ſub tota AB & CB parte eius; tùm etiam rectãgulum CE erit ſub eadẽ tota AB, & ſegmento eius CB; & erit quadratum HF, ſegmenti AC,& quadratũ CG ſegmenti CB.

Demonſtratio. Totum quadratum AE ex recta data AB, ſimul cum quadrato CG,ſegmẽtis CB,rectę AB,per 19.axioma,eſt æquale & quadrato HF, ſegmenti AC alterius rectæ AB, & rectangulis AG, CE, duobus, oſtenſis ſub tota AB, & parte eius CB. Quadratum igitur ex tota recta & quadratum vnius è ſuis partibus ſimul ſumpta ſunt æqualia ſimul ſumptis, & quadrato reliquæ partis, & rectangulo bis ſub tota & priore parte eius aſſumpta. quod erat oſtendendum.

## PROPOSITIO VIII.

Si recta linea ſecetur vtcũque: Rectangulum quater comprehenſum ſub tota & vno ſegmentorum, cũ eo quod à reliquo ſegmento fit quadrato, æquale eſt ei quod à tota & dicto ſegmento, tamquam ab vna linea deſcribitur quadrato.

Sup-

Fig.74. SVppoſitio. Recta linea AB ſecta ſit vtcumque in C: Dico rectangulum quater comprehenſum ſub tota AB & vno ſegmentorum eius puta CB, ſimul cum quadrato reliqui ſegmenti AC, eſſe æquale quadrato facto ab vna recta linea compoſita ex tota AB, & dicto ſegmento CB aſſumpto pro vno latere rectangulorum prædictorum.

Constructio. Per prop.46.li.1.fiat quadratum AF, ſuper tota AD recta compoſita ex data AB, & ei in rectum addita BD æquali parti eius CB. Tùm per prop.31.l.1. ex pũctis C & B, ponãtur ſurſum rectæ lineæ CM, BN, parallelæ lateri DF quadrati, quæ ſecabunt diagonalem ED in I & O, & latus EF in M & N, per corollaria duo noſtra prop.42.lib.1. Similiter ducatur ex punctis I & O, rectæ aliæ duæ GIRK, HPOL, quæ ſecabunt latera EA, FD, & rectas GM, BR, in I, R, P, O, per eadem corollaria. Iam verò per lemma noſtrum ſecundum erit GM quadratum rectæ AC; & BL quadratum rectæ BD; tùm PR quadratum rectæ CB: & quia ſunt æquales rectæ CB, BD, erunt quadrata PR, BL æqualia, per 3. noſtrum coroll. prop.46.lib.1. vnde latera illorum erũt æqualia per coroll. noſtrum 3. eiuſdem prop. Sed & per idem lemma 2. erit AO rectangulum ſub AB & CB; tùm etiam rectangulum ſecundum HR, ſub eiſdem AB, CB; tùm etiam rectangulum tertium OF ſub æqualibus AB, CB; & rectangulum IN ſub æqualibus ipſis AC, CB, cui ſi addatur quadratum BL, rectæ BD, fiat rectãgulum quartum æquale ipſi rectangulo AO, ſub AB, CB.

Demonſtratio. Per ax.19.lib.1. quadratum AE, totius rectæ AD, compoſitæ ex AB data, & parte eius CB addita ei in lõgum, eſt æquale quadrato GM, & rectãgulis AO, HR, OF, tribus, & rectangulo compoſito ex IN rectangulo & BL quadrato: ſed per conſtructionem illa omnia quatuor rectangula ſunt ſub AB tota recta linea data, & ſegmento eius CB, vno; & quadratum GM eſt quadratum rectæ AC. altero ſegmento ipſius rectæ AB: ergo uti propoſitum eſt, Quadratũ rectæ vtcumque diuiſæ & vnius partis eius, tanquam vnius lineæ, eſt æquale quadrato reliquæ partis rectæ datæ; & rectangulo quater comprehenſo ſub tota data recta, & prædicto eius ſegmento ei in rectum addito.

## PROPOSITIO IX.

Si recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: Quadrata quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt, ſimul duplicia ſunt, & eius quod à dimidia, & eius quod ab intermedia ſectionum fit, quadrati.

SVppoſitio. Recta linea AB ſecta ſit in C bifariam, & non bifariam in D: Dico quadrata ſimul, inæqualiũ partium AD, DB, eſſe duplicia quadratorum ſimul ex dimidia puta AC, & intermedia CD, ſectionum factarum. Fig.74.

Constructio. Per 46.prop.li.1. fiat quadratum AF, rectæ AB datæ: & per prop.31.li.1. ex punctis C & D, ponãtur ſurſum verſus parallelæ rectæ lineæ CM, DN, lateri BF quadrati facti; recta CM ſecabit ductam diametrum EB quadrati facti in I, & latus EF in M, per noſtra coroll.1.& 2.prop.42.libr.1: ſicuti etiam parallela recta DN, ſecabit diametrum EB in O, & latus EF in N. Tùm per eandẽ 31. prop. ex punctis I, O, diametri EB, educantur aliæ rectæ parallelæ ipſi AB, quarum prima ſit GIK, altera HOL; illa ſecabit latus EA in G, & latus FB in K; iſta verò ſecabit latus EA in H, & latus FB in L, per citata coroll. noſtra; & per lemma noſtrum 2. reſultabit GM quadratum rectæ AC; & HN, quadratum rectæ AD; & DL quadratum rectę DB; ſed & per coroll. noſtrum 3.prop.46.lib.1. quadrata GM, CK erunt æqualia, ob rectas AC, CB æquales ex datis; vnde per coroll. noſtrum 4. eiuſdẽ prop. latera MI, IK rectanguli IF, erunt æqualia; ideoq́ue per def.29.lib.1. erit rectangulum IF quadratum; & æquale quadrato GM, per noſtrum 3. coroll. cit. vel per prop.36.lib.1. Præterea rectangula HI, PK erunt æqualia per prop.36.l.1.& per 43. eiuſdem libri, rectangula HI, IN, erunt æqualia.

Demonſtratio. Quadratum HN inæqualis ſectionis AD, totius AB, continet ſemel quadratum GM, dimidiæ partis AC eiuſdem AB rectæ, & ſemel quadratũ PR, intermediæ CD ſectionum eiuſdem rectæ AB: Ergo ſi oſtenderimus duo rectangula HI, IN, complementa, ſimul cum quadrato DL alterius ſectionis inæqualis DB, totius rectæ AB, iterum continere ſemel dicta quadrata GM, PR, vel eſſe æqualia illis oſtenderimus propoſitum: Hoc autem ſic demõſtro, PK rectangulum cõtinet ſemel quadratum PR, & ſupereſt rectãgulum OK; ergo rectangulum HI æquale oſtenſum rectãgulo PK, quia eſt pars quadrati HN, iterum quadratum dictum HN continebit quadratum PR, & ſupererit rectangulũ OK, quod additum quadrato DL, fiet rectãgulum DK, æquale rectangulo RF, ſed RF rectangulum vnà cum rectangulo IN, efficit quadratum IE æquale quadrato GM, ergo rectãgula IN, OK, & quadratum DL, iterum continebunt quadratum GM, ergo etiam rectangula prædicta

dicta GI, IN,& quadratum DB; iterum continebunt quadrata GM,PR. ergo totum quadratum HN,ſimul cum quadrato DL,hoc eſt quadrata inæqualium ſectionum AD,DB,totius rectæ AB, bis continebit quadratũ GM, dimidiæ ſectionis AC, & quadratum PR,intermediæ ſectionis CD, totius datæ rectæ AB. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO X.

Si recta linea ſecetur bifariàm, adijciatur autẽ ei in rectum quæpiam recta linea. Quod à tota cum adiecta, & quod ab adiuncta,vtraq; ſimul quadrata , duplicia ſunt & eius quod à dimidia,& eius quod à compoſita ex dimidia & adiuncta, tanquã ab vna deſcriptum ſit,quadrati.

Fig. 75. SVppoſitio.Secta ſit recta linea AB, bifariàm in C, & ei in rectũ addita recta quæpiam linea BD: Dico quadrata rectarum AD, & BD , hoc eſt compoſitæ rectæ AD ex data AB & adiecta BD,& rectæ BD adiectæ,ſimul ſumpta eſſe duplicia quadratorum duorum ſimul ſumptorum,rectæ AC dimidiæ,& rectæ CD cõpoſitæ ex dimidia CB & adiecta BD.

Conſtructio. Producatur recta AB data, vltra B , & adijciatur ei in rectum alia recta BD,& per prop.3. lib.1. iterùm ex producta ſumatur DE æqualis rectæ BD adiectæ; tùm per prop.46 .lib.1.fiat ſupra rectam AE, quadratum AK, cuius diameter FE ſit ducta : & per 31.prop.lib.1.ex punctis C,B,D,emittãtur ſurſum rectæ lineæ CG,BH,DI,parallelæ lateri AF;per lemma noſtrum 2.prima CG ſecabit diametrum FE in V, ſecunda BH in S, tertia DI in O : tùm per eandem prop.31. ex punctis V, S,O,ponantur lateri AE,parallelæ rectæ ÆVL,WSM,ZON,iſtæ etiam ſecabũt latera FA,KE , quadrati , & prius ductas parallelas in punctis deſignandis characteribus; & reſultabit ZI quadratum rectæ AD cõpoſitæ ex data AB & adiecta BD;tùm quadratũ DN rectæ DE poſitæ æqualis rectæ BD adiectæ,quare dici poterit quadratum DN rectæ BD adiectæ;tùm quadratum YQ rectæ CD cõpoſitæ ex dimidia CB,& adiecta BD; tùm ÆG quadratum rectæ AC , dimidiæ AB datæ;tùm rectangula ZX, RI ; tùm rectangula WV, VH,quæ etiam ſunt quadrata ob æqualitates laterum quadratorum aliorum ÆG, XR , rectarum æqualium AC, CB; ſicuti etiam quadrata TP, DN æqualia , ob rectas BD,DE æquales.

Demonſtratio. Quod quadratum ZI ſimul cũ quadrato DN, ſimul duplicia ſint quadratorum ſimul ſumptorum YQ, & ÆG: hoc eſt quadratum rectæ AD , ſimul cum quadrato rectæ BD vel DE , duplum ſit quadrati YQ rectæ CBD,compoſitæ ex dimidia CB & adiecta BD,ſimul cum quadrato ÆG,rectæ AC dimidiæ. Imprimis quadratum ZI ſemel continet quadratum ÆG,& quadratum YQ: ergo ſi reliqua rectangula WV, ZX, VH, RI, complentia cum dictis quadratis ÆG, YQ, totum quadratum ZI,ſimul ſumpta cum quadrato DN, ſi probauerimus eſſe æqualia iterũ dictis quadratis ÆG,YQ ; duo illa quadrata ZI,DN,ſimul ſumpta duplicia erunt duorum quadratorum ÆG,YQ, ſimul ſumptorũ. Aſſumptum ſic demõſtratur per partes: Rectangulum WV quadratum, oſtenſum eſt æquale quadrato ÆG;& rectangula VH, RI , ſimul ſumpta,ſunt æqualia quadrato XR,& rectangulo SQ ſimul ſumptis , per prop. 36. lib. 1. elem.per quam etiam rectangulum ZX æquale eſt rectangulo YS ; ergo ſi rectangulis illis æqualibus ZX, YS,addãtur æqualia quadrata DN, TP,primum primo, ſecundum ſecundo, fient æqualia ZX & DN, toti rectangulo reliquo YP. Igitur per inductionem omnium partium vtrimque æqualium, probatum erit aſſumptum , & concluſio priùs allata manifeſta erit.

## PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineam ita ſecare, vt comprehenſum ſub tota , & altero ſegmentorum rectangulum; æquale ſit , ei quod à reliquo ſegmento ſit,quadrato.

SVppoſitio. Sit recta linea data AB, ita ſecãda in H, vt ſub tota AB, & minore ſegmento BH, rectangulum , ſit æquale quadrato reliquæ partis AH. Fig.76.

Conſtructio. Per prop.46. lib.1. ſupra rectam AB datam fiat quadratũ AC; & eius latus AD quod efficit angulum A,cum data recta AB,ſecetur bifariàm in E,per prop.10.lib. 1.& producendo rectam EA vltra A , ducatur recta EB,quæ efficiet cum AB,EA rectis, triangulum rectangulum EAB , cuius angulus AEB minor erit recto angulo A per coroll. 1. prop.17. lib.1. quare latus EB maius erit latere EA,per prop.19.eiuſdem lib. Vnde

recta EF ſumenda æqualis rectæ EB, per 3. prop. lib. 1. excedet rectam EA. fiat denique per lemma noſtrum 1. rectangulum FI, ſub duabus rectis DF, AF, ſupra rectam DF verſùs CB: reſultabit rectangulum IB, ob parallelas IG, DF, ideoque per prop. 30. parallelæ erunt CB, IH rectæ, & per 34. eiuſdem lib. 1. anguli in I, & H erunt recti oppoſiti rectis C & CBH angulis; & rectangulum AG erit quadratũ per coroll. 2. noſtrum prop. 46. lib. 1. quia duæ rectæ AH, AF, ſunt ęquales. Dico autem per hanc conſtructionem rectam AB datam ita eſſe ſectam in H, ab recta IG, ita vt rectangulum ſub AB & HB, hoc eſt rectangulum IB, ſit æquale quadrato AG, rectæ AH ſeu reliqui ſegmenti AH.

Demonſtratio Sint ſi fieri poſſit inæqualia rectangulum IB, & quadratum AG: eis ſi addatur commune rectangulum DH, fient per 4. ax. lib. 1. inæqualia quadratum AC, & rectangulum DG: hiſque inæqualibus poſtremis ſi addatur commune quadratũ rectę EA, fient duo quadrata rectarũ AB, EA, inæqualia, hoc eſt per prop. 47. lib. 1. quadratum rectę EB, vel EF æqualium, inæquale rectangulo DG & quadrato rectæ EA; hoc eſt rectangulum ſub DF, tota recta compoſita ex DA ſecta bifariàm in E, & adiecta AF, tanquã vna linea, & ſub adiecta AF, & quadratum rectæ EA intermediæ rectæ, erit inæquale quadrato rectæ EF compoſitæ ex dimidia EA, & adiecta AF. Sed hoc eſt contra prop. 6. huius libri; ergo falſa erit poſitio contradicens aſſertioni noſtræ, quæ ideo ſtabilita erit & confirmata.

## PROPOSITIO XII.

In amblygonijs triangulis quadratum quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, rectangulo bis cõprehenſo, & ab vno laterum quæ ſunt circa obtuſum angulũ in quod cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab aſſumpta exteriùs linea ſub perpendiculari prope angulum obtuſum.

3.77. SVppoſitio. In amblygonio ABC triangulo latus vnum puta AB circa angulum ABC obtuſum, ſit productum vltra ipſum angulum obtuſum, hoc eſt vltra B, in cuius productionem recta linea CD perpendicularis cadat ex puncto C extremo lateris AC oppoſiti dicto angulo obtuſo, quod punctum C eſt ad eaſdem partes productionis lateris prædicti AB; nam per coroll. 3. noſtrum prop. 13. quandoquidem angulus ABC eſt obtuſus datus, alter ei deinceps CBD erit acutus, ideoque per coroll. 2. prop. 17. cadet dicta perpendicularis CD ad partes huius acuti anguli CBD. Dico quadratum lateris AC oppoſiti angulo ABC obtuſo, eſſe maius quàm quadrata duo ſimul ſumpta laterum AB, CB, conſtituentium angulum obtuſum ABC, rectangulo bis comprehenſo ſub latere AB in quod productum cadit perpendicularis CD, & ſub BD parte productionis inter perpendicularem CD, & punctum B anguli obtuſi ABC: ſeu quod idem eſt, Dico quadratum lateris AB, & quadratum lateris BC, & rectangulum bis comprehenſum ſub AB, BD, ſimul ſumpta illa, eſſe æqualia quadrato AC.

Conſtructio. Per prop. 46. lib. 1. fiant quadrata tria, primum AM, rectæ AD; ſecundum DK, rectæ DC; tertium BF, rectæ BC: & ducta AM diametro quadrati AM, ponatur per prop. 31. lib. 1. recta BN parallela lateri DM vel AL, hæc ſecabit diametrum AM in Q, per coroll. noſtrum 1. vel 2. prop. 42. lib. 1. & ſecabit latus LM in N; tùm per eamdẽ prop. 31. ex puncto Q, ponatur alia recta parallela OQP, quæ per lemma noſtrũ 2. ſecabit oppoſita latera LA, MD, quadrati AM, & reſultabunt AQ quadratum rectæ AB; & QM quadratum rectę BD; & ON, BP, rectangula duo, ſingula ſub AB, BD.

Demonſtratio. Per prop. 47. lib. 1. quadratũ rectæ AC, æquale eſt quadratis AM, DK, rectarum AD, DC: ſed quadratis AM, DK, æqualia ſunt iſta omnia ſimul ſumpta, AQ, quadratum rectæ AB; QM quadratum rectæ BD; & rectangula duo ON, BP, ſingula ſub rectis AB, BD, iuxta axioma 19. tùm etiam quadratum DK, rectæ DC: ergo per 1. axioma lib. 1. iſta omnia ſimul ſumpta, quadratum AQ, rectæ AB; quadratum QM, rectæ BD; rectangula duo ON, BP, ſingula ſub rectis AB, BD; & quadratum DK, rectæ DC; erũt æqualia quadrato rectæ AC. ſed etiã per cit. prop. 47. lib. 1. quadratis QM, DK, rectarum BD, DC, eſt æquale quadratum BF, rectæ BC; ergo per. 1. ax. lib. 1. iſta omnia ſimul, quadratum AQ rectæ AB; & rectangula duo ON, BP, ſingula ſub rectis AB, BD; & quadratum EC, rectæ BC; erunt æqualia quadrato rectæ AC. quod erat demonſtrandum.

PRO-

## PROPOSITIO XIII.

In oxygonijs triãgulis quadratum à latere angulum acutum ſubtendente, minus eſt quadratis quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus; rectangulo bis comprehenſo & ab vno laterum quæ ſunt circa angulum acutum in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interiùs linea ſub perpendiculari prope acutum angulum.

Fig. 78. SVppoſitio. In acutangulo ABC triangulo, latus AB ſumptum ſit exempli gratia oppoſitum angulo acuto ACB, & ab vno eius extremo B, demiſſa ſit recta BR perpendicularis oppoſito lateri AC circa angulum ACB acutum datum, quæ cadet intra triangulum, ob coroll. 2. prop. 17. lib. 1. Dico quadratum lateris AB oppoſiti angulo ACB acuto dato, minus eſſe quadratis ſimul ſumptis laterum AC, CB, angulum acutum ACB datum conſtituentibus, rectangulo bis comprehenſo ſub toto latere AC, in quod recta BR perpendicularis cecidit, & parte eius RC, inter ipſam perpendicularem & angulũ ABD prædictum acutum: ſeu quod idem eſt, Dico quadratum rectæ AB, ſimul cum rectangulo bis ſub AC, RC, eſſe æquale quadratis ſimul laterum AC, CB.

Conſtructio. Per prop. 46. lib. 1. fiant tria quadrata diuerſa; AE ſuper latere AC; BI. ſuper latere BC; tertium BL ſuper perpendiculari BR, quæ producatur vltra R in N puncto lateris DE quod abſcindet per coroll. noſtrũ 1. prop. 42. lib. 1. eritque parallela lateribus AD, CE, per prop. 28. lib. 1. ob angulos in A, R, C rectos quadrati & deinceps ad R: hæc eadem recta BRN, ſecabit in O, diametrum CD quadrati AE, per 2. coroll. noſtrum prop. cit. 42. Tùm per prop. 31. lib. 1. ex puncto O ponatur recta linea POM parallela ipſi AC, hæc etiam abſcindet latera AD, CE, in P, & M, per citata coroll. noſtra prop. 42. lib. 1. & per lemma noſtrúm 2. reſultabunt quadrata, DO, rectæ AR; OC, rectę RC; & duo rectangula PC, NC, ſingula ſub AC, RC rectis.

Demonſtratio. In triangulo ARB rectangulo, erit per prop. 47. lib. 1. quadratum ſub recta AB, æquale ſimul quadratis DO, BL, ſub rectis AR, RB: his æqualibus ſi addantur cõmunia, rectangula duo PC, NC, ſub rectis AC, RC ſingula; fient per 2. ax. lib. 1. hæc ſimul AG quadratum, & rectangula duo PC, NC, æqualia his ſimul, quadrato BL, & quadrato DO cum rectangulis duobus PC, NC, (ſed aduertendum eſt hoc loco ſumi bis quadratum OC, dum enumerantur iſta duo rectangula): hoc eſt toti quadrato DC, & quadratis ſimul OC, BL. Verùm per cit. prop. 47. quadratis duobus BL, OC, eſt æquale quadratum BI, rectæ BC: ergo per 1. ax. lib. 1. quadratum rectæ AB, & duo rectangula PC, NC, ſingula ſub rectis AC, RC. ſunt ſimul æqualia, quadratis ſimul DC, BI, rectarum AC, CB. quod erat propoſitum ac demonſtrandum.

## PROPOSITIO XIV.

Dato rectilineo, æquale quadratum conſtituere.

SVppoſitio & conſtructio. Rectilineum quodcumque datum per prop. 45. lib. 1. conuertatur in rectangulum ABCD ipſi æquale; & latus DC producatur vltra C, & per 3. prop. lib. 1. ſumatur recta CE æqualis rectæ CB: totaque recta DE, biſariàm ſecetur in F, per prop. 10. lib. 1. & producto latere CB vltra B, fiat interuallo FE arcus circuli, centro F, ſecans in G rectam CB productam; & ducatur recta FG. Dico quod quadratum rectæ CG, erit æquale rectangulo AC, & per 1. ax. lib. 1. rectilineo dato. Fig. 79.

Demonſtratio. Si rectangulo AC non ſit æquale quadratum rectæ CG, ſint inæqualia: Tunc per axioma 4. lib. 1. illis ſi addatur commune quadratum rectæ FC, erunt inæqualia rectangulum AC, ſub AC, CE, inæqualibus partibus totius DE, ſimul cum quadrato rectæ FC intermediæ ſectionum rectæ DE ſectæ per medium in F, & non biſariàm in C; & duo quadrata rectarum GC, CF, hoc eſt per prop. 47. lib. 1. quadratum FG, vel FE dimidiæ totius DE; contra prop. 5. lib. huius. Hoc abſurdum deductum ab poſitione aduerſarij contradicente noſtræ aſſertioni, indicat poſitionem eſſe falſam, & aſſertionem noſtram veram. Quare fecerimus imperatum.

# COMMENTARIVS

## IN

# LIBRVM TERTIVM

## ELEMENTORVM GEOMETRICORVM

# EVCLIDIS.

# DEFINITIONES.

### I.

*Æquales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales; vel quorum quæ ex centris rectæ lineæ ſunt æquales.*

HANC definitionem iam explicauimus in definitione 37. libri primi, quam ex hoc libro mutuò ſumpſeramus vt inſeruiret nobis inter demonſtrandum illius libri propoſitiones diuerſas.

Huc aduoca definitiones poſtremas noſtras ad lib. 1. quas indifferenter citabimus ad hanc definitionem primam.

### II.

*Recta linea circulum tangere dicitur; quæ cùm circulum tangat, ſi producatur, circulum non ſecat.*

Fig. 80. EXempli gratia, recta linea ABC dicetur circulum BDE tangere, ſi vtrimque producta ipſum attingens aliquo ſui puta B, non ſecat vlla ratione. Hæc recta linea ab Geometris abſolutè vocatur Tangens.

Notandum eſt 1. angulum ABD mixtilineum factum ab AB tangente recta linea prædicta, & circuli circumferentia BDE, vocari ab Geometris angulum contactus vel contingentiæ, de quo ſolent agere Commentatores huius Authoris in prop. 16. huius libri 3.

Notandum eſt ſecundò ſecantem rectam lineam dici poſſe, quæ intra circuli planum penetrare poteſt, vel penetrat actu, producta vltra id quo circuli circumferentiam attingit. Cuius definitio ab Authore innuitur in hac præſenti definitione tangentis circulum rectæ lineæ, dùm dicit, circulum tangere & non ſecare. Vnde ſequitur rectam lineam contingentem circuli peripheriam, & productam vltra id quo illam attingit, ſi intra circuli planum penetret vel penetrare poſſit, eſſe ac nuncupari ſecantem circulum. Qualis eſt in figura appoſita recta FD, quæ in D attingit circumferentiam circuli BDE, & producta vltra D, penetrare intra circulum vel eius planum poſſit. Ex hac explicatione ſecantis circulum rectæ lineæ, intelligitur definitio vniuerſalis rectæ ſecantis figuras planas quaſcumque. Videlicet vt ſecans recta in vniuerſum ſit recta linea quæ producta vltra id quo attingit figuram planam, intra ipſam penetrat.

Notandum eſt tertiò rectæ lineæ ſecantis circulum partem vtrimque terminatam in circuli ſecti circumferentia, appellari ab Geometris ſubtenſam, vel chordam arcus circuli cuiuſlibet maioris vel minoris vel æqualium, cùm quibus figuram particularem concludunt compoſitam ex illa chorda vel ſubtenſa, & arcu circumferentiæ circuli cuius terminos communes ſibi vendicat. Qualis in figura eâdem, recta DE.

Notandum quartò. Arcum circuli dici ab Geometris, portionem circumferentiæ circuli terminatam duobus punctis ſeu diuerſis. Vt in eâdem figura, DGE, portio circumferentiæ circuli DBEG, erit arcus circuli, quia terminatur duobus punctis D, E, diuerſis.

III. *Cir-*

### III.

*Circuli ſeſe mutuò tangere dicuntur; qui ſeſe mutuò tangentes,ſeſe mutuò non ſecant.*

Fig. 81. HOc eſt iuxta analogiam rectæ lineæ tangentis circulum definitæ in præcedente definitione;dum circuli circumferentia vnius attingens alterius circuli circumferentiam, neutra in alterius aream penetrat: partim exiſtendo infra partim extra illam: qui contactus dupliciter eſſe poteſt, vel interior, vel exterior;interior eſt,quando vnus circuli circumferentia tota eſt intra alterius circuli aream,vt in prima figura huius definitionis; exterior eſt,quando vnius circumferentia circuli,tota eſt extra aliam circuli contacti circumferentiam, vt in ſecunda figura videre eſt. Verum in hoc vtroque circulorum contactu, vna circumferentia aliquid commune habere debet cum alterius circumferentia, puta C.

Ex hac definitione colligi debet, quid ſit circulus circulum ſecans: Eſt enim quando vnius circuli circumferentia partim intra circuli alterius aream ingreditur, partimque egreditur, & aliquid habent commune vt in tertia appoſita figura conſpici licet.

Ex hac definitione ſequitur alium eſſe angulum contactus circulorum, effectum ab duorum circulorum circumferentijs ad inuicem inclinatis ſe mutuò non ſecantibus & aliquid commune habentibus.

Sed hic contactus circulorum duorum duplex eſt interior & exterior. Interior eſt quando vnus circulus eſt totus intra alium, excepto illo quod ambobus eſt cōmune. Exterior eſt quando vnus circulus extra alium eſt totus, excepto illo quod ambobus eſt commune.

### IV.

*In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, cùm perpendiculares quæ à centro in ipſas ducuntur ſunt æquales. Longiùs autem abeſſe illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.*

Fig. 82. EXempli gratia in circulo ABDC, ſint tres rectæ lineæ ductæ AB,CD,HI;& in duas AB,CD,ductæ ſint ab centro E,duæ rectæ lineæ perpendiculares EF,ipſi AB;& EG, ipſi CD,æquales inter ſe:tunc duæ rectæ AB, CD,æqualiter diſtare ab centro E circuli dicentur. Quod ſi recta perpendicularis EK ducta ad aliam rectam HI,maior fuerit, quàm alia perpendicularis EF ad aliam rectam AB; recta HI longius aberit ab centro,quàm recta AB. Vnde ſequitur inæqualiter ab centro circuli rectas intra eum ductas diſtare, quando dictæ perpendiculares rectæ lineæ ab ipſo centro ductæ fuerint inæquales ad ipſas;vt rectæ AB,HI, intra circulum ductæ inæqualiter ab centro E circuli diſtabunt, quia rectæ EF, EK perpendiculares ad ipſas emiſſæ ab centro E,ſunt inæquales.

### V.

*Segmentum circuli, eſt figura quæ ſub recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.*

QVandoquidem figura eſt per def. 14. lib. 1. quæ ſub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur, ſegmentum circuli cùm ſit figura debet concludi ab terminis ſuis aſſignatis in hac definitione, videlicet ab recta linea,& circuli circumferentiæ parte tantummodò, communes terminos ſeu puncta habentes cum ipſa recta linea prædicta. Vt in figura appoſita circuli, ADC erit ſegmentum circuli,tùm etiam ABC,quia iſtud concluditur recta AC, & ABC parte circumferentiæ circuli;& illud includitur recta AC, & parte ADC circumferentiæ circuli totius. Vnde conſtat eandem rectam v. g. AC terminatam vtrimque in circumferentia circuli in A & C, ſubtendi duobus arcubus diuerſis ADC, ABC,circuli totam AB CD circumferētiam efficientibus; terminumque communem eſſe duorum ſegmentorum ABC, ADC,conſtituentium totum circulum AB CD. Fig. 83.

Ex dictis in notandis 3. & 4. definitionis 2.huius libri, definiri poſſe clarius ſegmentum circuli hac ratione, Eſt figura comprehenſa ſub chorda & arcu circumferentiæ circuli communia duo puncta extrema habentibus. Vnde etiam manifeſtum erit, quamlibet chordam in circulo ſeu ſubtenſam rectam, inſeruire duobus arcubus diuerſis circumferentiæ circuli, conſtituentibus ſimul totam circuli circumferentiam.

Particula, *circumferentia*, in definitione poſita,& in multis alijs locis,non intelligi debet tota,ſed tantùm eius pars, vt cùm recta ſubtenſa ſegmentum conſtituatur; nam vt ſic duo ſegmenta fiunt diuerſa: ſed pars eius intelligi debet in hac definitione & in alijs multis locis Euclidianis & Geometrarum vti in explicatione expreſſimus.

Præterea notandum eſt Euclidem & eius Commentatores vt plurimùm ſumere circulum pro circumferentia eius ipſumque terminante: quæ duo etſi diſtinguantur ex natura

tura circuli explicata definitione 15. lib. 1. nam circulus eſt figura plana terminata vnica linea circumferentia indigitata, & circumferentia eſt terminus ipſius circuli: nihilominus placuit illis Metaphoricè vti terminato pro termino ipſo. Hac de re Tyrones monere volui hoc loco, ſimulque nos vt plurimû claritatis ergo illa duo in conſtructionibus & demonſtrationibus conſultò diſtinxiſſe.

## V I.

*Segmenti angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.*

Fig. 83. EXempli gratia angulus BAC factus ab chorda AC, & arcu ABC circuli eſt angulus ſegmenti ABC. Vel angulus CAD, erit etiam alter angulus alterius ſegmenti CAD, conſtitutus ab ſubtenſa recta CA, & arcu CDA circuli.

## V I I.

*In ſegmento autem angulus eſt; cùm in ſegmenti circumferentia ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos recta eius lineæ quæ ſegmenti baſis eſt, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is inquam angulus ab adiunctis illis lineis comprehenſus.*

Fig. 83. EXempli gratia angulus rectilineus ABC comprehenſus ab duabus rectis BA, BC, deductis ab puncto B arcus ABC, ad rectæ AC, puncta extrema A & C, ſegmentum ABC comprehendentis vnà cum ipſa recta AC; erit angulus in ſegmento ABC.

## V I I I.

*Cùm verò comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam aſſumunt circumferentiam, illi angulus inſiſtere dicitur.*

Fig. 83. VErbi gratia, angulus ABC comprehenſus ab duabus rectis BA, BC, deductis ab aliquo puncto circumferentiæ circuli, vt in exemplo, ab puncto B, dicitur inſiſtens arcui ADC, eo quod extrema A, C, dictarum rectarum BA, BC, aſſumant arcum ADC, circumferentiæ circuli.

Itaque manifeſtum eſt ex mente Euclidis, angulû in circuli ſegmento, diuerſum eſſe ab angulo inſiſtente in circulo: hic enim reſpicit arcum circumferentiæ circuli cui inſiſtit; ille verò arcum in cuius puncto angulus ipſe eſt.

Notandum eſt angulum inſiſtentem arcui circuli exigere ex mente Geometrarum vt exiſtat in circumferentia circuli, licet non exprimatur in definitione; alioqui comparari inter ſe non poſſent in poſtrema propoſitione libri ſexti.

## I X.

*Sector autem circuli eſt, cùm ad ipſius circuli centrum conſtitutus fuerit angulus; comprehenſa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à circumferentia ab illis aſſumpta.*

EXempli gratia. In circuli ABCD, centro E, ſit angulus rectilineus AEC; Tota figura AE CDA, comprehenſa ab duabus rectis EA, EC, & arcu ADC circumferentiæ circuli quem aſſumunt ipſæ rectæ EA, EC, tanquam pro baſi, terminatæ in circuli circumferentia; dicetur ſector circuli. Fig. 83.

## X.

*Similia circuli ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales; aut in quibus anguli inter ſe ſunt æquales.*

EXempli gratia in circulo ABDC, ſint anguli BAC, EFD æquales; ſegmenta BAC, EFD, erunt ſimilia. Similiter addimus in circulis ABDC, GHLI, HIMK, æqualibus vel inæqualibus, ſint anguli BAC, HGI, IHK, æquales, erunt iuxta hanc definitionem noſtram additam ſegmenta in illis circulis BAC, HGI, IHK, ſimilia. Fig. 84.

## X I.

[ *Angulus contactus vel contingentiæ, vel cornicularis in circulo mixtilineus; Eſt angulus factus ab recta linea tangente circulum, & circumferentia circuli contacti non ſecti ab ducta tangente.* ]

## X I I.

[ *Secans recta linea circulum, Eſt quæ intra circuli planum penetrare poteſt, vel penetrat actu, producta vltra id quo circulum circumferentiam attingit* ]

## X I I I.

[ *Chorda vel ſubtenſa recta in circulo dicitur. Secantis recta circulum pars vtrimque terminata in circumfertntia circuli.* ]

XIV. *Arcus*

Digitized by Google

### X I V.

[ *Arcus circuli eſt, Portio circumferentiæ circuli terminata duobus punctis ſitu diuerſis.* ]

### X V.

[ *Similes circuli vel circulorum arcus ſunt, quibus inſiſtunt anguli æquales.* ]

### X V I.

[ *Similes circuli vel circulorum ſectores ſunt, quorum anguli rectilinetj in centris circulorum vel eodem centro eiuſdem circuli ſunt æquales.* ]

### X V I I.

[ *Circulus circulum ſecare dicitur, quando vnius circuli circumferentia partim intra alterius circuli aream ingreditur, partim egreditur, & aliquid commune habent.* ]

### X V I I I.

[ *Circulorum angulus contingentiæ vel contactus eſt. Angulus curuilineus effectus ab duorum circulorum circumferentijs ad inuicem inclinatis, ſe mutuo non ſecantibus, & aliquid commune habentibus.* ]

### X I X.

*Circulus circulum tangere interiùs dicitur, quando vnus illorum totus eſt intra alium, excepto eo quod illis eſt commune & in quo ſe tangunt.*

### X X.

*Circulus circulum tangere exteriùs dicitur, quando neuter alium includit, ſed commune illud habent quo ſe contingunt.*

HAs definitiones de noſtro addimus multũ nobis profuturas. Vndecimã iam explicauimus in primo notando definitionis ſecundę: Duodecimã in ſecũdo notando: Tertiã decimã in tertio: Decimã quartam in quarto.

Decimam quintam ſic explicamus. In eodem circulo ABDC, anguli BAC, EFD, æquales inſiſtant arcubus BFC, EAD, iſti arcus erunt ſimiles. Vel in circulis diuerſis ABDC, GHLI, HIMK, anguli æquales BAC, HGI, IHK, inſiſtant arcubus BEC, HLI, IMK, iſti arcus erunt ſimiles. Fig. 84.

Decimæ ſextæ denique explicationem ſic accipe. Si in eodem circulo ABDC, anguli BOC, EOD, in centro O ſint æquales, ſimiles erunt ſectores BOC, EOD. Si verò in diuerſis circulis, anguli in centris O, ſint æquales BOC, HOI, IOK, ſectores erunt ſimiles BOC, HOI, IOK.

Decima ſeptima explanata eſt in fine tertiæ, ſicuti etiam decima octaua, 19. & 20.

# PROPOSITIONES.

## P R I M A.

### Dati circuli centrum reperire.

Fig. 85. SVppoſitio. Circuli AEBD, centrum ſit reperiendum.

Conſtructio. Ducatur in eo chorda aliqua AB, quæ per prop. 10. lib. 1. bifariàm ſecetur in C; & per prop. 11. lib. eiuſdem, excitetur ex C, recta linea ad angulos rectos ipſi AB, quæ ſit ECD producenda vtrimque donec ſecet circumferentiam circuli in punctis D, E: hæc recta DE bifariàm ſecetur in F, per cit. prop. 10. Dico hoc punctum F eſſe centrum circuli dati.

Demonſtratio. Si F punctum non ſit centrum circuli dati, erit aliud punctum intra eius aream per def. 15. lib. 1. quod erit vel in recta DE, veluti G; vel extra illam veluti H. Eſto G ſi fieri poſſit; tunc per def. cit. 15. rectæ GD, GE, erunt æquales, ideoq́ue recta DE diuiſa erit in duas partes æquales in G: ſed & per conſtructionem recta eadem DE diuiſa fuit bifariàm in F; quare per axioma 7. lib. 1. erunt rectæ FD totum, & GD pars, æqualia; vel FE pars, & GE totum æqualia: Abſurdum conſequens iſtud, indicat punctum G in recta DE, vel quodlibet aliud diuerſum ab F, non poſſe eſſe centrum circuli. Eſto ſi fieri poſſit punctum H, ipſum centrum: ab eo ad puncta A, C, B, traijciantur rectæ lineæ HA, HC, HB: Imprimis recta HC efficiet ad partes centri H, reſpectu rectæ ED; angulum BCH minorem recto BCD, & alterum deinceps ACH maiorem recto, atque ita erunt inæquales anguli BCH, ACH: ſed & per def. 15. cit. lib. 1. rectę HA, HB, erunt æquales; ideoq́ue in triangulo AHB, anguli A, B, ad baſim

 AB, erunt

AB,erunt æquales per 5. prop. Cùm ergo in triangulis HBC, HAC, ſint duo latera CB, BH æqualia lateribus CA, AH, vtrumque vtrique,anguloſque comprehendant in A, & B æquales, erunt per prop. 4. lib. 1. anguli BCH, ACH,æquales,cōtra conceſſa:pugnantia iſta indicant punctum H, & quodlibet aliud extra rectam ED,eiuſque medium punctum F, non poſſe eſſe centrum circuli. Erit igitur punctum F,ſicuti aſſeruimus. Dati ergo circuli centrum reperimus, quod erat faciendum.

COROLLARIVM

*Si in circulo recta aliqua linea aliam rectam lineam ſecet bifariàm, & ad angulos rectos; in ſecante erit centrum circuli, [ eiuſq; medium punctum.]*

HOc demonſtrauimus exempli gratia in ſecante recta ED, excitata ad angulos rectos ipſi chordæ AB, in medio eius puncto C. centrumque circuli eſſe F medium punctum ſecantis ED.

COROLLARIVM NOSTRVM

*Recta linea terminata, ſolummodò ſemel diuidi poteſt bifariàm.*

HOc oſtendimus in recta ED,diuiſa bifariàm in F, nullumque aliud eius punctum poſſe illam iterum bifariàm diuidere.

## PROPOSITIO II.

Si in circuli circumferentia duo quælibet puncta accepta fuerint; recta linea quæ ad ipſa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

Fig. 86. SVppoſitio. In circuli ADB circumferentia accepta ſint duo puncta A & B diuerſa ſitu: Dico rectam lineam AB illa puncta coniungentem,totam intra circuli aream exiſtere, exceptis duobus eius extremis prædictis A, B, quæ ſunt in circuli circumferentia ex datis.

Conſtructio. Si recta AB,non exiſtat tota intra circuli aream uti aſſeruimus, vel habebit aliquod aliud punctum puta D, diuerſum ab eius extremis A, & B, in circumferentia circuli; vel tota erit extra aream circuli, vt AEB,præter eius extrema A, B, ſita in circumferentia ipſa ex datis. Tunc verò per 1. prop. præced. reperto C circuli centro,ducantur rectæ lineæ CA, CB, quæ erunt æquales per def.15.lib.1.

Demonſtratio. Primum poſitum ab aduerſario eſſe nequit, ſequeretur enim cōtra axioma 23. lib. 1. plura puncta duobus in circumferentia circuli eſſe in directum vnius rectæ lineæ. Sit igitur ſi fieri poſſit ſecundum;& ex centro C circuli inuento recta linea CE, ad aliquod punctum E rectæ AEB extra circuli aream ſitæ,iuxta placitum aduerſarij. Imprimis quia rectæ CA, CB, ſunt æquales, erunt per 5.prop.lib.1.anguli CAB,CBA æquales: ſed per prop.16.lib.eiuſdem 1.angulus AED eſt maior angulo CBE,ergo etiam per 1.axioma eiuſdem libri, erit maior angulo CAE: ergo in triangulo rectilineo ACE, per prop. 19. lib. 1. latus CA, maior erit latere CDE ſecante arcum AB circuli in D; verùm per def.15.rectæ AC,DC,ſunt æquales,ergo per 1.ax.cit. recta CD, erit maior recta CDE, pars videlicet maior toto, contra 8. axioma lib.1. hoc abſurdum conſequens indicat poſitionem ſecundam aduerſarij eſſe falſam. Cùm ergo oſtenderimus rectam lineam nectentem puncta A, B diuerſæ accepta in circumferentia circuli non poſſe eſſe extra circuli ipſius aream,neque vllum aliud punctum commune habere cum ipſius circumferentia diuerſum ab eius extremis A,& B;tota intra circuli aream exiſtet,vti propoſuit Author.

COROLLARIVM.

*Recta linea circulum tangens & eum non ſecans,eum ſolùm tangit in vno puncto.*

SI enim tangeret in duobus, intra circulum eſſet per iſtam propoſitionem, & ſic eum non tangeret iuxta def.2.lib.huius.

## PROPOSITIO III.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extenſa quandam non per centrum extenſam,bifariàm ſecet; & ad angulos rectos ipſam ſecabit.

Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariàm quoque eam ſecabit.

SVppoſitio. In circulo BEC, rectam BC chordam extra centrum A circuli tranſ- Fig. 87.

euntem

euntem, recta alia linea AD per ipſum A centrum incedens, ſecet bifariàm in D: Dico eam ſecare ad angulos rectos ADC, ADB. Quod ſi recta AD per centrum A circuli procedens ſecet rectam BC chordam non tranſeuntem per centrum dictum A, ad angulos rectos ADC, ADB: Dico quod illam ſecabit in D, bifariàm, ita vt ſint æquales partes BD, CD.

Conſtructio. Rectæ lineæ AB, AC, tranſmittantur quæ per def. 15. lib. 1. æquales erunt.

Demonſtratio primæ partis. Si non ſint anguli ADC, ADB, recti ambo, erit vnus eorum minor recto, & alter maior recto, per noſtrum coroll. 3. prop. 23. lib. 1. ideoque inæquales anguli erunt: Tunc verò in triangulis ADB, ADC, quia duo latera AD, DB, ſunt æqualia duobus lateribus AD, DC, vtrumque vtrique, & angulos continent inæquales, erunt per prop. 24. lib. 1. baſes eorum AB, AC, inæquales, contra conceſſa. pugnantia iſta manifeſtam faciunt falſitatem poſitionis contradicentis primæ huic parti, quæ ideo ſtabilita remanebit.

Demonſtratio ſecundæ partis. Sint ſi fieri poſſit partes DB, DC, totius BC, inæquales. In triangulo BAC, anguli B, & C, erunt æquales per prop. 5. lib. 1. Ergo in triangulis ADC, ADB, habebimus duos angulos æquales duobus, vtrumque vtrique, hoc eſt angulos B, & C, tùm deinceps ad D rectos ex datis, qui ſunt æquales per 12. ax. lib. 1. igitur per coroll. 3. noſtrum prop. 32. lib. 1. reliqui anguli BAD, CAD, erunt æquales. Sed in eiſdem triangulis DAC, DAB, habentibus duo latera DA, AC, æqualia duobus lateribus DA, AB, vtrumque vtrique, & per aduerſarium, baſes inæquales BD, CD, erunt per prop. 25. lib. 1. anguli BAD, CAD, inæquales, paulò antea conceſſi æquales. pugnantia ergo iſta indicant falſam eſſe poſitionem aduerſarij contradicentem huic ſecundæ parti, quæ propterea confirmata & ſtabilita relinquetur in veritate ſicuti fuit ab Authore aſſerta.

## COROLLARIVM.

*In omni triangulo Iſoſcele vel æquilatero recta linea ab angulo ad baſim ducta eam bifariàm ſecans, eſt ipſi perpendicularis; & ſi fuerit ipſi ad angulos rectos, eam bifariàm ſecabit: [& in vtroque caſu angulum oppoſitum baſi bifariàm ſecabit.]*

HOc totum oſtenſum eſt exempli gratia in triangulo iſoſceli BAC: eædemque rationes allatæ militant in triangulo æquilatero.

## PROPOSITIO IV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecent, non per centrum extenſæ; ſeſe mutuò bifariàm non ſecabunt.

SVppoſitio. In circulo ACBD, duæ rectæ chordæ AB, CD, ſe mutuò ſecent in puncto E, neutraque illarum per centrum F circuli incedat: Dico iſtas rectas chordas ſeſe mutuò non ſecare bifariàm: licet vna poſſit ab alia bifariàm ſecari, vt verbi gratia chorda AB, in E ſecta ab alia CD. *Fig. 88.*

Conſtructio. Ex centro F circuli dati rectæ tranſmittantur lineæ FD, FC, FE, ad extrema datarum chordarum & ad mutuam ſectionem in E.

Demonſtratio. Eſto quod recta AB biſariam ſecetur. Quia rectæ AE, BE ſunt æquales, & duo latera AF, FE ſunt æqualia duobus BF, F, vtrumque vtrique, erunt anguli AFE, BFE, per 8. prop. lib. 1. æquales, ſed per axioma 8. lib. 1. Angulus EFD, maior eſt angulo EFB, & angulus EFC minor eſt angulo AFE, ideo per 1. ax. lib. 1. Erit angulus EFD maior angulo EFC; Ergo in triangulis EFD, EFC, quia duo latera EF, FD, ſunt æqualia lateribus EF, FC, vtrumque vtrique, (nam EF commune eſt, & reliqua duo FD, FC, ſunt æqualia per def. 15. lib. 1.) anguloſque continent inæquales; erunt per prop. 24. eiuſdem libri 1. baſes eorum inæquales, & maior ED, quàm EC. quod erat oſtendendum, licet altera recta AB, biſariàm ſecari poſſit in E ab alia recta CD. ſed dicet aduerſarius rectam CD biſariam diuidi in E, quare probandum erit aliam AB non diuidi in partes æquales in E. In triangulo CFD iſoſcele, quia vult aduerſarius rectam CD biſariàm ſecari in E, ab recta FE proueniente ex F centro circuli, erunt per coroll. prop. præcedentis anguli EFC, EFD, æquales; ſed angulo EFC maior eſt angulus EFA; & angulo EFD minor eſt angulus EFB, per axioma 8. lib. 1. ergo per 1. ax. angulus AFE erit maior angulo BFE: igitur per prop 24. cit. baſis AE erit maior EB, in triangulis AFE, BFE, habentibus duo latera AF, FE, æqualia duobus lateribus BE, FE, vtrumque vtrique. Demonſtrata igitur remanet propoſitio.

PROPO-

g. 91.

Digitized by Google

vtraſque partes BAC, vel minimæ BD.

Conſtructio. Per prop. 23. lib. 1. fiat ad punctum A, rectæ BAD, angulus BAG æqualis angulo BAF, poſtea rectæ ducantur EC, CF, ED, FD, EF.

Demonſtratio primæ partis. Imprimis recta BAC erit maior recta BD; nã per def. 15. lib. 1. rectæ AC, AD, ſunt æquales, & recta BAC maior eſt rectâ AC, per 8. ax. lib. 1. ergo erit per 1. ax. maior quàm recta AD, & multò magis quàm recta BD. In triangulo autem iſoſcele EAC, anguli ACE, AEC, ſunt æquales per prop. 5. lib. 1. eſt autem angulus BEC maior angulo AEC per 8. ax. ergo etiam per 1. ax. erit maior angulo BCE; ergo per prop. 19. lib. 1. latus BAC, maius erit latere BE: ſimili ratiocinio per eaſdem prop. & axiomata, in triangulo FAC iſoſceli, anguli ACF, AFC æquales erunt, ſed angulus BFC maior eſt angulo AFC, ergo etiam maior erit angulo BCF, ergo recta BAC maior erit recta BF, & ſic de reliquis.

Demonſtratio ſecundæ partis. In triangulo FAD iſoſcele, anguli ADF, AFD, ſunt æquales per prop. 5. lib. 1. Et per 8. ax. angulus BFD minor eſt angulo AFD, ergo per 1. ax. minor erit etiam angulo BDF, ergo per 19. prop. lib. 1. recta BD minor erit quàm recta BF. Ex eiſdem axiomatibus & propoſitionibus, in triangulo iſoſceli EAD, anguli AED, ADE erunt æquales; ſed AED maior eſt angulo BED, ergo etiam angulus ADE maior erit angulo BED; ergo in triangulo EFD, latus BE maius erit latere BD, & ſic de reliquis.

Demonſtratio tertiæ partis. Per prop. 5. lib. 1. in triangulo EAF iſoſcele, anguli AEF, AFE, æquales erunt; ſed per ax. 9. lib. 1. angulus EFB maior eſt angulo AFE, ergo per 1. ax. erit etiam angulus EFB maior angulo AEF, & multo magis angulo BFE minore quàm AEF; ergo in triangulo EBF, latus EB maius erit latere BE. Et ſic de alijs omnibus huiuſmodi rectis lineis.

Demonſtratio quartæ & vltimæ partis. In triangulis BAF, BAG, duo ſunt latera æqualia FA, AB, duobus lateribus GA, AB; FA, GA, quidem per def. 15. lib. 1. reliqua AB, AB, vnum & idem, anguloſque continent æquales per conſtructionem, ergo per 4. prop. lib. 1. baſes eorum BF, BG erunt æquales: demonſtrauimus autem in tertia parte, reliquas omnes ducendas ex vna parte maximæ vel minimæ ductarum prædictarum, ad puncta diuerſa circumferentiæ circuli dati eſſe inæquales, ideo ſolùm duæ ſolum rectæ puta BF, BG, inter ſe æquales ab eodem puncto B, ad vtraſque partes maximæ BAC, vel minimæ BD cadere poterunt: licet etiam alia poni poſſit æqualis rectæ BE, ad partes G reſpectu BAC, vel BD, quod non contradicit propoſitioni. Totam ergo propoſitionem abundè explicauimus.

## PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarũ vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet. In cauam circumferentiam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum trãſit, remotiore ſemper maior eſt. In connexam verò circumferẽtiam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum & diametrum interponitur: aliarum autem ea quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autẽ tantùm rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ vel maximæ.

SVppoſitio. Extra circulum FECI, & eius circumferentiã datum ſit punctum A, ex quo deductæ ſint rectæ lineæ AFBC, AGD, AHE, & ſic de infinitis alijs, ſecantes circumferentiam circuli in duobus punctis ſingulæ, ſed harum vna AFBC, tranſeat per B centrum circuli. Dico primò ſi conſiderentur prædictæ lineæ terminatæ in cauam circuli EDC circumferentiam, ſeu in extremis earum punctis, C, D, E. maximam inter eas eſſe rectam AFBC tranſeuntem per centrum B circuli: ſecundò rectam AGD propinquiorem huic maximæ, eſſe maiorem remotiore AHE; & ſic de alijs ſi eſſent ductæ; tertiò ſi conſi- *Fig. 92.*

conſiderentur prædictæ rectæ lineæ appellentes in conuexam circuli circumferentiam, vel terminatæ punctis H, G, F, omnium breuiſſimam eſſe quæ inter punctum A, & diametri FBC, punctum F vicinius puncto A, interiacet: quartò rectam AG viciniorem huic minimæ AF, eſſe minorem remotiore AH; & ſic de reliquis omnibus ſi ductæ eſſent: quintò duas tantùm ad vtraſque partes minimæ AF, vel maximæ AFBC, duci poſſe æquales, v.g. in concauam partem AHE, AIK; vel in conuexam, duas AH, AI.

Conſtructio. Ducantur rectæ FD, FE, GE, GBL, CG, CH, & centro A, interuallo AH fiat circulus, cuius circumferentia ſecabit in H & I circumferentiam dati circuli, (nam probabimus tectam AH maiorem eſſe recta AF): tùm centro eodem A, & interuallo rectæ AE, fiat alius circulus, cuius circumferentia ſecabit dati circuli circumferentiam in E & K, probabimus enim rectam AE, minorem eſſe recta AFBC.) denique ducantur rectæ AI, AK.

Demonſtratio primæ partis. Per propoſitionem præcedentē 7. rectæ lineæ FE, FD, ſingulæ erunt minores recta FBC, ergo ſi illis addamus communem rectam FA, tota recta linea AFBC, per centrum B circuli incedens erit maior, quàm duæ rectæ AF, FD; vel quàm duæ aliæ rectæ AF, FE, per 4. ax. lib. 1. Et quia per prop. 20. lib. 1. duæ rectæ AF, FD, ſunt maiores quàm AGD; & etiam duæ rectæ AF, FE, ſunt maiores quàm recta AHE: erit per 1. axioma lib. 1. recta AFBC, maior quàm quælibet rectarum AGD, AHE, & ſic aliarum omnium huiuſmodi rectarum in cauam circumferentiam circuli cadentium.

Demonſtratio ſecundæ partis. Per prop. 7. præcedentem recta GD maior eſt quàm recta GE; ergo ſi illis addamus communem rectam AG, adhuc per ax. 4. lib. 1. tota recta AGD maior erir quàm rectæ duæ AE, GE; ſed per prop. 20. lib. 1. duæ rectæ AG, GE, ſunr maiores recta AHE; erit per 1. ax. lib. 1. tota recta AGD maior quàm recta AHE; & ſic oſtendetur maior quàm reliquæ omnes rectæ remotiores ſeorſim ſumptæ.

Demonſtratio tertiæ partis. Per prop. præced. 7. recta CG maior eſt quàm recta CH, & recta CBF adhuc maior quàm quælibet illarum. Sed & per prop. 20. lib. 1. duæ rectæ ſimul ſumptæ AG, GC, ſunt maiores recta AFBC; ergo ſi de his inæqualibus, demamus inæquales rectas; de minore AFBC, maiorem FBC; & de maioribus AG, GC, minorem GC; relinquentur per ax. 5. lib. 1. inæquales quantitates, hoc eſt AG recta maior quàm AF. Et vtēdo eâdem methodo, & applicando eaſdem prop. & axiomata, duæ rectæ AH, HC maiores erunt ſimul quàm recta AFBC; ergo ſi de minore AFBC, tollamus maiorem FBC rectam; & de maioribus AH, HC; minorem rectam HC; remanebit recta AH maior quàm recta AF. & ſic de aliis rectis appellentibus ab dato puncto A ad conuexam partem circuli.

Demonſtratio quartæ partis. Per prop. 21. lib. 1. duæ rectæ AH, HC, ſunt maiores duabus rectis AG, GC: ergo ſi de maioribus auferamus minorem rectam HC, & de minoribus maiorem GC per prop. præced. 7. relinquetur per 5. ax. lib. 1. recta linea AH maior quàm recta AG: & ſic de alijs omnibus huiuſmodi rectis lineis ab puncto A ad conuexam circuli circumferenriam incidentibus.

Demonſtratio vltimæ partis. Quia per demonſtrationem tertiæ partis, recta AH maior eſt quàm recta AF, circuli circumferentia deſcripta, cētro A, interuallo AH, ſecabit rectam AF productam intra circulum datum vltra F, inter punctum F, & C, non tamen vltra C, nam per 1. partem recta AFBC, maior eſt quàm recta AHE, & multò magis quàm pars eius AH; quare circuli deſcripti circumferentia ingredietur intra aream dati circuli, & iterum egredietur, ſecando in I eius circumferenriam: quare per def. 15. lib. 1. recta AI, erit æqualis rectæ AH, vna illarum exiſtente ad vnam partē minimæ AF, vel maximæ AFBC, altera ad aliam partem eiuſdem maximæ vel minimæ dictæ. Simili modo, centro A, interuallo AE rectę, circumferentia circuli deſcripta ſecabit diametrum FBC circuli dati, cùm ſit per 1. partem, tota recta AFBC maior quàm recta AHE, ergo circumferentia illa deſcripta ingtedietur aream circuli & iterum egredietur per axioma 27. lib. 1. circumferentiam circuli dati in K; quare per def. 15. lib. 1. recta AK ducta, vel ducenda, erit æqualis rectæ AHE, ad aliam partem rectæ AFBC. Cùm autem in hoc caſu, vel in alio præcedente huius partis, rectæ omnes lineæ ab eodem puncto A emiſſæ versùs vnam partem ſint inæquales, fit vt ſolùm duæ ad partes diuerſas æquales tranſmitti poſſint ab eodem puncto, ad cauam vel conuexam circuli dati circumferentiam: Totam igitur propoſitionem demonſtrauimus.

COROL-

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Eiſdem datis quæ in hac propoſitione portionum rectarum linearum in cauam circuli partem decidentium, intra circuli aream; maxima erit quæ per centrum circuli incedet; viciniorq́; illi maior erit remotiore, duaq́; ſolum ad vtraſq́; partes maximæ, æquales.*

Figu.92. SVppoſitio, & conſtructio eadem quæ in propoſitione præſenti. Dico autem portionem FBC rectæ tranſeuntis per centrum B circuli, eſſe maiorem portione GD, & portione HG, & ſic de reliquis ſi adeſſent. Secundò dico portionem GD eſſe maiorem portione HE, vtpote viciniorem maximæ FBC. Dico tertiò duas ſolum vtpote HE, IK portiones ad vtraſque partes maximæ FBC, eſſe æquales inter ſe, non autem tres, aut plures numero.

Demonſtratio. Cùm per 1. partem propoſitionis huius, ſit recta AFBC maior quàm recta AGD, & quàm recta AHE, & ſic de reliquis huiuſmodi rectis ſi adeſſent; & per 3. partem, recta AF ſit minor quàm recta AG, & quàm recta AH, & ſic de aliis ſi ductæ eſſent huiuſmodi: ſi de maxima AFBC tollamus minimam AF, & de minoribus prædictis maiores dictas, remanebit per 5. axioma libr. 1. FBC recta maior quàm recta GD, & quàm recta HE, quod erat primo propoſitũ. Pro ſecunda parte, quia per 2. partem prop. huius recta AGD maior eſt quàm recta AHE; & per 4. partem recta AG eſt minor quàm recta AH; ſi minorem de maiore detrahamus, & maiorem de minore, relinquetur per 5. axioma libr. 1. recta GD, maior quàm recta HE. Pro vltima parte oſtendenda, quia per vltimam partem huius propoſ. ſolùm duæ rectæ AE, AK exempli gratia, poſſunt educi ad partes diuerſas maximæ AFBC, in cauam partem circuli; & ſolùm duæ aliæ AH, AI, in conuexam eiuſdem partem, ad vtraſque partes minimæ AF: ſi de æqualibus AHE, AIK, demantur æquales AH, AI, relinquentur ſolùm duæ æquales HE, IK æquales ad vtraſque partes maximæ FBC, quæ omnia erant ex propoſitione præſenti deriuanda.

## PROPOSITIO IX.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulũ cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales: acceptum punctum, centrum eſt ipſius circuli.

SVppoſitio. Intra circuli FBCD aream acceptum ſit punctum A, ex quo ad circuli circumferentiam ductæ ſint tres rectæ lineæ AD, AC, AB, æquales inter ſe: Dico punctum acceptum A, eſſe dati circuli centrum. Figu.93.

Conſtructio, extrema duo rectarum duarum ductarum ſita in circumferentia circuli viciniora, nectantur recta linea, qualia ſunt D, C, vincta media recta DC; qua diuiſa bifariàm in E per prop. 10. lib. 1. tranſmittatur per E & A, recta linea AE producẽda vtrimque vſque ad circumferentiam in F & G. Denique rectæ AD, AC, ducantur.

Demonſtratio. Per prop. 3. lib. huius recta FAEG erit orthogonia ad rectam DC; ergo per coroll. 1. prop. huius libri in recta GEAF, erit centrum circuli. Quod ſi non ſit A, ſit ſi fieri poſſit quodcumque aliud punctum H, huius rectæ FAEG. hoc poſito habebimus ad vnam ſolùm partem maximæ rectæ lineæ FAEG tranſeuntis per centrum H circuli dati, duas rectas lineas AB, AC, prouenientes è puncto A diuerſo ab centro H, contra propoſ. 7. hoc abſurdum quandoquidem procedit ab poſitione contradicente aſſertioni huius propoſitionis, indicat poſitionem eſſe falſam & aſſertionem hanc veram.

## PROPOSITIO X.

Circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis, non ſecat.

DEmonſtraio afferenda ſupponit hanc propoſitionem de circulis ſe mutuò ſecantibus ratione ſuarum circumſerentiarum & in eodem plano exiſtentium: nam ſi ſupponantur in diuerſis planis exiſtere demonſtratio erit alia, quam dabimus in commentáriis noſtris in Theodoſij ſphærica. Probandum igitur circumferentiam vnius circuli ſecantis

alterius circuli circumferentiam, eam non ſecare in pluribus punctis quàm duobus diſſitis ſitu: nam duo immediata puncta in lineis & quantitate dari nequeunt.

Fig. 94. Conſtructio & demonſtratio ſimul. Eſto ſi fieri poſſit duæ circulorum circumferentiæ ſe mutuò interſecent in tribus punctis vel pluribus, E,H,F,G, ingrediẽdo & egrediendo iuxta definitionem 17. huius libri allatam circulorum ſe mutuo ſecantium ratione ſuarum circumferentiarum. Imprimis per prop. 5. huius libri, eorum centra erunt diuerſa, puta A,B, Iam verò, recta AB linea iungens iſta centra & producta vtrimque non poterit terminari in duobus punctis ſectionis mutuæ circumferentiarum ſe mutuò ſecantium, puta E,H: nam per def. 15. lib. 1. rectæ AE, AH, eſſent æquales; tùm etiam rectæ BE, BH; & ſic eadem recta linea EH terminata, bis diuideretur bifariàm in punctis A, B, diuerſis, contra coroll. noſtrum ad prop. 2. huius libri. Sed neque recta linea vinciens duo centra diuerſa circulorum datorum producta terminari poteſt ad vnum punctum commune ſectionis circumferentiarum illorum: nam eſto ſi fieri poſſit BA reuinciẽs centra A & B prædicta, terminetur ad vnum ſolum punctum E, ſectionis prædictæ, & ex ipſis dictis centris ad aliud pũctum F ſectionum datarum, tranſmittantur rectæ AF, BF, & E, F puncta recta nectantur linea EF: per naturam circuli erunt EB, BF, latera trianguli EBF æqualia, & per 5. prop. lib. 1. anguli BEF, BFE, æquales: ſed etiam in triangulo EAF, latera EA, AF, per cit. def. 15. lib. 1. erunt æqualia, & per 5. prop. eiuſdem lib. 1. erunt anguli AEF, AFE æquales: eſt autem per axioma 8. angulus AFE minor angulo BFE, ergo per 1. ax. lib. 1. angulus AEF, etiam minor erit angulo BFE: ſed conceſſit angulum BEF, qui idem eſt cum angulo AEF, eſſe æqualem angulo BFE; ergo idem angulus BEF, erit reſpectu eiuſdem anguli BFE minor & æqualis, hæc duo abſurda indicant, rectam lineam nectentem centra circulorum ſe mutuò ſecantium, non poſſe productam attingere vllum punctum ſectionis mutuæ circũferentiarum ſuarum. His poſitis, ex centris A, & B, ad puncta duo F, G, ſectionum datarum, ſita versùs eandem partem rectæ AB, tranſmittantur rectæ AF, AG; & BF, BG, ducatur etiam recta FG, reſultabunt triangula BAF, ABG: Iam verò angulus BAF, cùm ſit maior angulo BAG per 8. axioma lib. 1. & latera BA, AF, ſint æqualia lateribus BA, AG, vtrumque vtrique, nam BA & commune, & ex natura circuli ſunt duo AF, AG, æqualia; per prop. 24. lib. 1. baſis BF, maior erit baſe BG, contra def. 15. lib. 1. Abſurdum hoc proueniens cum ſuperioribus allatis, indicat poſitionem contradicentem huic propoſitioni eſſe falſam, & propoſitionem ipſam veram.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Recta linea reuinciens centra duo diuerſa circulorum ſe mutuò ſecantium ratione ſuarum circumferentiarum, producta vtrimque in infinitum; nulla ratione tranſibit per vllum punctum ſectionis mutuæ illarum.*

Hoc demonſtrauimus initio demonſtrationis allatæ.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Circuli circumferentia circuli alterius circumferentiam ſecare nequit in parte diuiſibili.*

NAM in hac parte plura puncta accipi poterunt, & modus allatus in demonſtratione huius propoſitionis, deducet aduerſarium ad abſurdum idem.

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Circuli integri circumferentia, circuli integri alterius circumferentiam ſecare in vno ſolùm puncto nequit: licet dum ingreditur circuli ſecti aream, in vno ſolùm puncto ſecet, & dum egreditur in vno alio ſolùm puncto.*

NAm ex def. 17. lib. huius, ingrediendo intra circuli aream ſecabit circumferentiam, & ingrediendo iterùm eam ſecabit, ergo bis, in duobus locis diſtinctis, alioqui ſi ſecaret iterùm illam in eodem puncto ingreſſus, vel non egrederetur extra ſecti circuli aream, vel duas figuras clauderet ſola circumferentia eiuſdem circuli, contra def. 15. lib. 1. & 17. libri huius. Sed per 2. coroll. non ſecat in parte, ergo in punctis ſitu diuerſis duobus, in vno dum ingreditur ſecti circuli aream, & in alio diuerſo dum egreditur.

## PROPOSITIO XI.

Si duo circuli ſeſe intus cõtingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet: [qui erit in vno ſolùm pũcto.]

Fig. 95. IMprimis adimam ſcrupulum videlicet diuerſa eſſe centra horum circulorum ſe mutuò interiùs contingentium, ſi enim vnum eſſet ſolum, puta punctum K, pro ambobus ducta recta linea ab A contactu per centrum K, & ducta alia KNM ad circumferentiam exterioris ſecabit obuiam circumferentiam interioris in aliquo pũcto N; atque ita KA, KN, erunt æquales rectæ per def.15. lib.1. tùm etiam KA, KNM, ergo per 1.axioma lib.1.erit KNM æqualis KN, totum parti contra axioma 8. lib.1. hoc abſurdum indicat non poſſe eſſe vnum centrum commune circulis ſe mutuò tangentibus interius.

Præterea oſtendendum exiſtimo circulos ſe mutuò contingere interiùs in aliquo communi circumferentiis eorum tantummodò, non autem areis. Si enim id in quo ſe tangunt eſſet aliquid arearum, vel areæ vnius, circumferentia illa ambiret illud, & ſic ingrederetur in alterius aream vel egrederetur, quod fieri nequit quin ſe mutuò ſecent circumferentiæ illorum; & ſic ex datis ſe mutuò tangerent iſti circuli, & ſe mutuò ſecarent iuxta def.17. libri huius, contra def.3. contactus circulorum quæ negat ſectionem: Igitur id quod commune eſt circulis ſe mutuò tangentibus interius, non erit aliquid areæ: relinquitur ergo vt ſit aliquid circumferentiarum.

Suppoſitio. Circuli duo GAE, FAD, ſe mutuò interius contingant in A, iuxta definitionem 19.lib.huius; & K punctum ſit centrum circuli FAD, & punctum I, ſit centrum alterius circuli GAE. Dico rectam lineam IK productam, tranſire per A contactum illorum circulorum, qui erit vnicum ſolùm punctum.

Conſtructio. Si non ita ſit, ſecet vtrimque ptoducta circumferentias amborum circulorum: atque vt hoc commodius demonſtretur fingamus animo B punctum eſſe centrum circuli FAD, & C punctum eſſe centtum circuli GAE, ita vt recta BC nectens iſta centra B, C, producta vtrimque ſecet in F & D, circumferentiam circuli FAD incluſi; & in G & E, circũferentiam circuli includentis GAE: tùm ab A contactu tranſmittantur rectæ lineæ AG, AF, AB, AC, AD, AE, puncta lineæ connectentis centra B, C, datorum circulorum, ex poſitione aduerſarij.

Demonſtratio. Per def.15.lib.1. Rectæ lineæ BA, BF, ſunt æquales; ergo in triangulo ABF, anguli BFA, BAF, erunt æquales per prop.5. lib.1. ſed angulus BAF eſt pars anguli CAG per axioma 29. lib.1. Verùm etiam per citat. def. rectæ CG, CA, erunt æquales, & per cit. prop.5. lib.1. anguli CAG, CGA, erunt æquales; ergo quia per prop.16. lib.1. angulus BFA eſt maior angulo CGA, erit per 1. ax. li.1. angulus BAF æqualis angulo BFA, maior erit angulo CGA, & ei æquali CAG, pars maior toto, contra 8.ax. Abſurdum hoc conſequẽs indicat poſitionẽ aduerſarij eſſe falſam. Sed cauillare poterit idem aduerſarius, volens C punctum eſſe cẽtrum circuli interioris, & B cẽtrum circuli exterioris, quo poſito ſic argumentor; Per def.15.lib.1. CA, CD, rectæ æquales erũt; ergo per prop.5.l.1. anguli CDA, CAD, æquales erunt: ſimiliter rectæ BE, BA, rectæ æquales erunt per def.15.lib.1. & anguli BEA, BAE, æquales pet prop.5.lib.1. Verùm per prop.16.lib.1. angulus CDA maior eſt angulo BEA, ergo per 1.ax.lib.1. etiã maior erit angulo BAE: ergo etiã angulus CAD æqualis angulo CDA, maior erit angulo BAE, per idem ax. 1. pars maior toto, contra 8. ax. lib.1. hoc abſurdum etiam indicat cauillationem aduerſarij eſſe falſam. Cùm ergo recta linea coniungens centra circulorum ſe mutuò intus tangentium, producta non poſſit ex vtraque parte extra contactum exorbitare illorum circulorum, ex vna parte producta incurret in contactum prædictum, quod erat demonſtrandum pro præſenti Euclidiana propoſitione.

Nunc ſupereſt probandum, contactum circulorum huiuſmodi mutuum interiorem, eſſe in vno tantùm puncto, quod conſultò addidimus.

Si non ſit in vno tantùm puncto, vel erit in duobus punctis ſibi immediatis, vel diſtinctis ac diſſitis, vel in parte. Non primum, nam in quantitate minimè dantur huiuſmodi puncta immediata. Non ſecundum, nam ſi fieri poſſit ſint puncta A & L diſſita, huius contactus: tunc recta IK, tranſiens per centra circulorum ſe mutuò contingentium interiùs, per hanc propoſitionem ad contactum iſtum pertinget; peto autem quis determinabit ad quod punctum ex A & L incurret? ſi dixeris ad vtrumque, ergo recta linea duobus diuerſis ac diſſitis punctis ex vna parte terminabitur contra naturam ſuam: ſi reſponderis ſuffi-

cere vt ad vnum illorum incidat; ſemper indeterminatio manebit,& recurrere ad Deum non eſt neceſſarium, quandoquidem alia ratione Geometrica hanc poſitionem deſtruemus: nam ex eodem centro K circuli interioris ad aliud punctum L in quod non incurrit recta IKA prædicta, ducere poterimus; & ſic duæ rectæ KA, KL æquales erunt per deſ. 15. lib. 1. Verùm quia illa duo pũcta A, L, pertinent etiam ad circumferentiam circuli exterioris GAE, cuius centrum eſt I, haberemus ex puncto K diametri circuli GAE, quod non eſt centrum eius, duas rectas lineas KA, KL æquales, contra 7. propoſ. huius, quæ aſſerit rectam KA eſſe breuiſſimam omnium rectarum ab puncto K, in portione diametri KA, quæ non tranſit per centrum I illius circuli. Abſurdum hoc indicat, poſitionem contactus huius in duobus punctis diſſitis eſſe falſam. quod abſurdum etiam manifeſtè deducetur ex poſitione huius contactus in parte; nam præter indeterminationem termini rectæ lineæ coniungentis centra circulorum dictorum in parte iſta, aliud L punctum diuerſum ab eo quod illam terminabit in parte illa aſſignari poterit; & ad illud ab centro dicto K, recta linea duci KL, & ſic argumentum deducens ad abſurdum idem redibit. Maneat igitur pars illa à nobis addita in propoſitione.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

***Circuli duo ſe mutuò interiùs tangentes non poſſunt habere centrum commune.***

HOc initio demonſtratum eſt ad tollendum omnem ſcrupulum cauillatori; qui contra ſuppoſitionem Euclidis iſtud obiicere poſſet.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

***Id quod commune eſt circulis ſe mutuò tangentibus interius eſt aliquid circumferentiarum illorum.***

HOc explicatum eſt ſecundo loco ante ſuppoſitionem ad demonſtrandam propoſitionem.

## PROPOSITIO XII.

### Si duo circuli ſeſe exteriùs contingant: linea recta quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum tranſibit, [qui ſolùm erit in vno puncto.]

IMprimis oſtendam circulos ſe mutuò exteriùs contingentes diuerſa habere centra: *Fig. 96.* nam per def. 20. lib. huius, quilibet illorum totus extra alium eſt, excepto eo quo ſe contingunt, commune illis, quod non poteſt eſſe aliquid interni illorum; nam circumferentia vnius ingrederetur in aream alterius, debet enim cingere illud commune tanquam proprium, & ſic ſe ſecarent per def. 17. libri huius, & non tangerent per definit. 3. libr. eiuſdem, quæ ſe mutuò deſtruunt prouenientia ab poſitione illius communis contactus in aliquo interiore circulorum; erit ergò aliquid ſuorum terminorum ſeu circumferentiarum: omnes ergo areæ illorum extra inuicem erũt; & ſic cùm areæ duæ duorum circulorum ſe mutuò exteriùs tangentium ſint diuerſæ, & extra inuicem poſitæ, ſingulæ ſibi vendicabunt ſuum centrum particulare, quod ex definitionibus 15. & 16. lib. 1. intra areã circuli eſt. hoc poſito veniamus ad ſuppoſitionem.

Suppoſitio. Duo circuli EFC, DGC, ſe mutuò exteriùs contingant in C communi illis quod modò oſtendimus eſſe aliquid circumferentiarum illorum circulorum: & per centra illorum A, B, diuerſa recta linea AB tranſmittatur: Dico tranſituram per C communem contactum.

Conſtructio. Si non tranſeat per cõtactum C communem, ſecabit circumferentias illorum in punctis F & G, & producta vltra centra A & B, ſecabit eaſdem circumferentias in aliis punctis E & D. Præterea ex punctis E & D, poterunt duci rectæ lineæ EC, DC, ad contactum C communem.

Demonſtratio. Vel duæ rectæ lineæ EC, DC, ſunt in directum, ita vt efficiant vnam rectam lineam EC, vel angulum conſtituunt ECD: non primum nam ſic duæ rectæ lineæ EAFGBD, ECD, figuram clauderent, contra axioma 14. lib. 1. ſi ſecundum, habebimus triangulum ECD conſiderandum, cuius duo latera EC, DC, maiora ſunt reliquo EAFGBD per prop. 20. lib. 1. & multò magis maiora partibus EAF, DBG illius: ſed per prop. 7. libri huius recta EAF incedẽs per centrum

A

A circuli maior eſt recta EC, ſimiliter recta DBG maior eſt recta DC: ergo duæ ſimul rectæ EAF, DBG, erunt maiores duabus ſimul rectis EC, DC, contra conceſſa. pugnantia iſta indicant poſitionem aduerſantem propoſitioni Euclidianæ eſſe falſam, & propoſitionem veram.

Quoad partem additam à nobis demonſtrandam ſic diſcurro. Si contactus iſte exterior communis circulorum non ſit vnum ſolum punctum cõmune circumferentiis illorum, vel erunt duo immediata pũcta illarum, vel duo diſſita pũcta, vel pars illarum. Nõ primum quia non dantur in quantitate duo immediata puncta in continuo. Non ſecundum, nam præter indeterminationem ad quod illorum peruenire debeat recta nectens centra circulorum, quandoquidem ad duo diſtincta ex vna parte terminari nequeat in circumferentia, alioqui tria puncta eſſent in directum in circumferentia circuli, contra axioma 23. lib. 1. ad illud aliud puta I, poſſemus ducere rectas lineas AI, BI, ex centris circulorũ, quæ vel erunt in directum vel angulum efficient AIB: ſi primum duæ rectæ AFGB, AIB, figurã claudent contra ax. 14. lib. 1. ſi ſecũdum, in triangulo AIB, duo latera AI, BI, erunt per def. 15. lib. 1. æqualia duabus partibus AF, BG, baſeos AFGB, vtramque vtrique: & ſic contra 20. prop. lib. 1. in triangulo AIB, duo latera AI, BI, erunt minora reliquo AFGB. Simile abſurdũ deducetur ſi ponatur tertium, nam in parte illa communi aliud punctum I, eligetur diuerſum ab C, & reliqua conſtruendo, veniemus ad abſurdum idem. Adde quod in hoc tertio caſu aduerſarij, curua duo circularia in contrarium congruerent, contra rationem curuorum oppoſitorum. Abſurda iſta indicant omnes poſitiones alias ab noſtra falſas eſſe, & noſtram veram.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Circuli duo ſe mutuò exteriùs tangentes, diuerſa habent centra.*

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Id quod commune eſt circulis ſe mutuò exteriùs tangentibus, eſt aliquid circumferentiarum illorum.*

Corollaria iſta duo explicata ſunt à nobis & demonſtrata in diſcurſu facto ante ſuppoſitionem demonſtrationis.

## PROPOSITIO XIII.

### Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno, ſiue intus, ſiue extra tangat.

HÆc propoſitio, duo complectitur iam à nobis demonſtrata, primum in propoſit. 11. ſecundum in 12. præcedente: quæ conſultò addidimus illis, ne aduerſarius inter demonſtrandum illas propoſitiones litem poneret ſoluendam per ſequentem propoſitionem, quod non ſolent Geometræ præſtare: probant enim ſemper per antecedentia iam nota, non autem per conſequentia declaranda. Verùm ne ordinem propoſitionum iam receptarum perturbaremus, hanc hoc ordine proponimus, licet eius partes conſultò in aliis præpoſitas iam oſtenderimus.

## PROPOSITIO XIV.

### In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro. Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe.

Svppoſitio. In circulo ABDC, rectæ lineæ ſeu chordæ AB, CD, ſint æquales: Dico eas æqualiter diſtare à cẽtro E circuli. Tùm dentur illæ chordæ AB, CD, æqualiter diſtare ab eodem E centro circuli: Dico eas eſſe inter ſe æquales. Fig. 97.

Conſtructio. Diuidãtur datæ chordæ AB, CD, biſariam ſingulæ per prop. 10. lib. 1. illa in G, iſta in F; & ab centro E circuli, tranſmittantur rectæ lineæ EA, EG, EB, EC, EF, ED.

Demonſtratio primæ partis, In triangulis AEB, CED, duo latera AE, EB, ſunt æqualia duobus lateribus CE, ED, per def. 15. lib. 1. & dantur eorum baſes AB, CD; ergo per 8. prop. lib. 1. erunt anguli AEB, CED, æquales: ſed per coroll. prop. 3. anguli iſti æquales diuiduntur biſariàm ſinguli ab ſuis propriis rectis EG, EF, & per 3. ipſam prop. libri huius, rectæ EG, EF, ſunt ad angulos rectos ad rectas AB, CD; ergo cùm in triangulis AEG, CEF, anguli in F ſint æquales quia recti iuxta axioma 12. lib. 1. & anguli CEF, AEG, ſint æqualium angulorum AEB, CED, ſemiſſes oſtenſi, ideoque æquales per 6. axioma

 lib. 1.

libr.1. & æqualia habeant latera EA, EC; erunt per prop.24.lib.1. latera EF, EG, æqualia; cumque ſint rectæ ad angulos rectos ſupra datas æquales rectas chordas AB, CD, erunt iſtæ chordæ æqualiter diſtantes ab centro circuli E, per def.4.lib.huius.

Demonſtratio ſecundæ partis. Dantur rectæ AB, CD, chordæ æqualiter diſtare ab E centro circuli, ergo iuxta def.4. libri huius, rectæ lineæ perpendiculares ad illas, videlicet EG, EF, erunt æquales interſe & per prop.3. lib.huius, ſingulæ chordæ AB, CD, bifariã ſecabũtur in G, & F, ab ſuis propriis perpendicularibus dictis rectis EG, EF. Iã verò per ſuperpoſitionem intellectualem, recta EG æqualis rectæ EF, ipſi congruet & angulus EGA rectus, angulo EFH, per axioma 9. lib.1. quod ſi chordæ non ſint æquales erit vna maior altera, puta BA maior, etiam eius ſemiſſis GA maior erit FC ſemiſſe minoris CD; ergo in prædicta ſuperpoſitione, recta GA excedet rectam FC, verbi gratia, parte CH; ergo recta linea EIH repræſentabit rectam EA, quandoquidem eius extrema ſunt E, H, quæ EH ſecabit intermediam circumferentiam in I, quandoquidem punctum H extra circulum & eius circumferentiam eſt: erant autem rectæ EA, EC; æquales, & EI æqualis eſt EC per def.15.lib.1.ergo per 1.ax. eiuſdem libri, rectæ EH, EI, totum & pars, æquabuntur, contra 8.axioma. abſurdum hoc conſequens indicat rectas chordas AB, CD, non poſſe adſtrui inæquales, ergo æquales erunt, ſicuti propoſitum fuit.

## PROPOSITIO XV.

In circulo maxima quidem linea eſt diameter: aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper maior.

HÆc propoſitio ſicuti & præcedens de chordis in circulo intelligenda eſt.

Fig. 98. Suppoſitio. In circulo BDFC, cuius centrum A, ſit diameter BAC, & aliæ chordæ DE, FG; DE quidẽ centro A vicinior quàm FG. Dico maximam chordarum eſſe diametrum BAC, & chordam DE viciniorem centro A, eſſe maiorem remotiore chorda FG, & ſic de reliquis.

Conſtructio. Ex centro A, per prop.12.lib. 1. demiſſa ſit recta AK ad angulos rectos ad chordam DE; & alia ad chordam FG in I: Diuidentur biſariàm illæ chordæ per 3.prop. huius libri, DE quidem in K, FG in I: & iuxta defin. 4. huius libri, maior erit recta AI perpendicularis, quàm alia AK: Denique ducantur rectæ AG, AE, quæ per defin.15.lib. 1.erunt inter ſe æquales.

Demonſtratio. In triangulis rectangulis AKE, AIG, alij anguli erunt acuti per 2.corollarium propoſ.32.lib.1. quare angulus rectus erit maior illis ſeorſim ſumptis; ergo per propoſ.20.eiuſdem libri, latera AG, AE, ſingula erunt maiora quàm IG, & quàm KE: ſed recta AC eſt æqualis cuilibet laterum AG, AE, per defini.15.lib.1. ergo per 1.ax. lib. eiuſdem ſemidiameter AC erit maior quàm KE, vel IG, ſemiſſes chordarum DE, FG: ergo per axioma 4.lib.1. tota diameter BAC, erit maior chorda DKE, vel altera FIG, & ſic de aliis, quod erat primò propoſitum. Et quia in dictis triangulis rectangulis quadrata rectarum angulos rectos in K, & I; efficientium ſunt æqualia quadratis ſemidiametrorum AG, AE, æqualibus iuxta corollarium noſtrum 3.propoſ.46.libri 1.erunt per 1.axio. eiuſdem libri duo ſimul quadrata rectarum AK, KE, æqualia duobus ſimul quadratis rectarum AI, IG: Ex his æqualibus ſi demamus quadrata inæqualia, minoris rectæ AK, & maioris rectæ AI, relinquetur per 5.ax.lib.1.quadratum maius rectæ KE, & quadratum minus rectæ IG: ergo recta KE erit maior recta IG; ergo per cit.ax.5.tota recta DE chorda vicinior centro A circuli, erit maior chorda tota FG remotiore. quod erat ſecundo loco propoſitum.

## PROPOSITIO XVI.

Quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet: & in locum inter ipſam rectam lineam & circumferentiam comprehenſum, altera recta linea non cadet: Et ſemicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior eſt; reliquis autem minor.

SVppoſitio. Sit circulus FAGB, eiuſque diameter ACB, centrumque C, & recta EAD ad angulos rectos diametro BCA, in eius extremitate A. Dico primò rectã EAD Fig. 99.

extra

extra circulum FAGB cadere, ſeu ipſum non ſecare. Dico ſecundò inter rectam DA, & circumferentiam AGB circuli, nullam rectam lineam poſſe duci, quin ſecet circumferentiam circuli, hoc eſt vt ait Author nullam rectam lineam cadere. Dico tertiò Angulum GAB, ſemicirculi AGB, eſſe maiorem quouis angulo rectilineo acuto. Dico quartò reliquum angulum DAG mixtilineum ex recta DA, & arcu BGA vel GA circuli; quem vocauimus in definitione 11. libri huius, angulum contingentiæ vel contactus in circulo, eſſe minorem quouis angulo acuto rectilineo.

Conſtructio. Si recta linea perpendicularis EAD; ad diametrum BCA circuli, in eius extremo A ducta, extra circulum non cadet; ſi fieri poteſt, eius circumferentiam ſecando in duobus punctis F, G hinc inde poſitis ad A punctum etiam circumferentiæ, vt eſt recta FAG; vel ſolum in vno puncto G ex vna parte, ſitque EAG recta. Tùm per 3. propoſ. lib. 1. de recta AE adimatur recta AH æqualis rectæ AG, & ex centro C circuli ducantur rectæ CH, CG, prima CH ſecabit in F circumferentiam circuli, eo quod punctum H ſit extra circulum. Præterea ſi fieri poſſit recta AI ducatur inter rectam DA, & circumferentiam AGB circuli; ita vt eum non ſecet; erunt anguli IAD, IAC acuti ſinguli partes recti BAC: & per propoſ. 12. lib. 1. ex centro G educatur perpendicularis recta CI ad rectam AI, quæ cadet ad partes anguli acuti per corollarium 2. propoſ. 17. lib. 1. & ſecabit circumferentiam circuli in aliquo puncto puta G, nam cadit extra circulum ex aduerſario: denique ducatur recta AG.

Demonſtratio primæ aſſertionis. Imprimis recta linea FAG aduerſarij orthogonia diametro BCA circuli in eius extremo A, circuli circumferentiam non ſecabit in tribus punctis F, A, G, neque vnquam in tribus quibuſcumque aliis, per axioma 23. lib. 1. ſed neque EAG eadem perpendicularis ſecabit circuli circumferentiam in A & G: nam in triangulis HAC, GAC, cùm latera HA, AC, ſint æqualia lateribus GA, AC, vtrumque vtrique, anguloſque rectos contineant æquales per axioma 12. lib. 1. eſſent per prop. 4. libri eiuſdem baſes eorum CH, CG æquales: ſed CF & CG ſunt æquales per naturam circuli, ergo per 1. axioma lib. 1. rectæ CF, CH, eſſent æquales, pars & totum, contra 8. axioma lib. 1. Abſurda hæc conſequentia ad poſitiones contradicentes primæ aſſertioni huius propoſitionis, indicant eſſe illas impoſſibiles, & aſſertionem iſtam primam veram.

Demonſtratio ſecundæ aſſertionis. Quandoquidem ex aduerſario recta A inter rectam DA, & circumferentiam GA circuli cadit, minimè ſecando circumferentiam circuli, & ducta eſt recta CI ad angulos rectos ipſi IA, habebimus in triangulo CIA, angulum rectum I, maiorem angulo acuto IAC parte anguli recti BAC; ſicuti etiam eſt acutus angulus GAC pars recti DAC: ſed per propoſ. 5. lib. 1. in triangulo ACG iſoſceli ob latera CA, CG æqualia per naturam circuli, æquales erunt anguli CAG, CGA, quorum primus eſt acutus oſtenſus. ergo etiam acutus erit angulus CGA; qui per propoſ. 16. lib. 1. maior erit angulo AIC recto. Abſurdũ hoc deductum ex poſitione aduerſarij contradicente ſecundam aſſertionem, firmam eam reddit, ac deſtruit ſuam poſitionem vnde procedebat abſurdum.

Demonſtratio tertiæ aſſertionis ſequitur ex duabus primis demonſtratis: ſi enim inter circumferentiam AGB circuli, & perpendicularem rectam DA, nulla recta linea mitti poteſt ex A, quin ſecet circumferentiam circuli, efficiatque angulum acutum rectilineum cum diametro BCA circuli, qualis eſt angulus GAC, qui ſit pars recti anguli DAC, & anguli GAB, ſemicirculi BAG; manifeſtum eſt angulum GAB, ſemicirculi BAG, eſſe quouis angulo acuto rectilineo maiorem.

Demonſtratio quartæ aſſertionis, ſequitur ex præcedentibus declaratis, præſertim tertia: nam angulus DAG mixtilineus contingentiæ, reliquus in angulo recto DAC, detracto angulo GAB ſemicirculi etiam mixtilineo, ſemper continebitur in angulo rectilineo puta DAG acuto ſeu parte recti DAC, quandoquidem recta AG ſemper per ſecundam aſſertionem ſemper circulum ſecat.

## COROLLARIVM

*Recta linea in extremitate diametri circuli ducta perpendicularis ipſi diametro, circulum tangit.*

NAm commune quid habet cum circumferentia circuli, videlicet extremum eius diametri ad quam perpendicularis eſt, & per 1. aſſertionem huius propoſitionis tota extra circulum ipſum eſt, ideoque eum non ſecat etiamſi producatur: ergo per def. 2. lib. huius circulum tanget.

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

PRACTICVM.

*Ex puncto aliquo dato in circumferentia circuli, rectam lineam ducere tangentem ipſum circulum.*

Diameter circuli ducatur, datum punctũ in circumferentia circuli; & per propoſ. 11. lib. 1. educatur ab hoc extremo dato recta linea perpendicularis huic diametro; ipſa per coroll. præcedens circulum tanget, & quidem in puncto dato.

COROLLARIVM NOSTRVM

II.

*Semicirculi angulus minor eſt angulo recto rectilineo.*

NAM recta linea perpendicularis diametro circuli partim efficiẽti angulum ſemicirculi, in eius extremo, cùm non ſecet circuli circumferentiam per præſentem propoſ. ſemper angulus ſemicirculi, & reliquus prædictus contingentiæ mixtilineus continebuntur tanquam partes efficientes totum angulum rectum rectilineum formatum ab diametro circuli data, & ducta perpendiculari ad illam in eius extremo. Vnde declaratum manebit ſequens.

COROLLARIVM NOSTRVM

III.

*Rectus angulus rectilineus æqualis eſt angulo ſemicirculi, & contingentiæ mixtilineis eiuſdem circuli.*

# PROPOSITIO XVII.

A dato puncto [extra circulum eiuſque circumferentiam] rectam lineam ducere quæ ipſum tangat circulum.

Fig. 100.

SVppoſitio. Datus ſit circulus BC, & punctum datum A, quod exiſtere poteſt in circumferentia circuli, vel extra illam & eius aream, vel intra illam. Vltimum eſſe nequit quia implicat contradictionem rectam incipere à puncto intra circulum dato, & eum tangere, ſecabit enim circulum, & ſic impoſſibile erit vt eum tangat. De primo caſu non faciunt Authores mentionem, verùm nos in corollario noſtro primo prop. præced. 16. illum tamquam practicum propoſuimus & ſoluimus. Secundùm verò aduerterunt & ſoluerunt Interpretes Euclidis. Verum iudicauimus ad tollendam omnem ſub dubitationem, addenda eſſe illa verba, de puncto dato, extra circulum eiuſque circumferentiam dato, ne includeremus primum caſum iam explicatum, & excluderemus vltimum oſtenſum impoſſibile. Sit igitur punctum A datum extra circuli dati aream & circumferentiam; ex quo ad circulum datum BC, recta linea tangens deducenda ſit.

Cõnſtructio. Per prop. 1. lib. huius quæratur D punctum centrum circuli dati BC; & ex puncto A dato extra circulum eiuſque circumferentiam ponatur recta AD terminata in centro D circuli quæ ſecabit in B circumferentiã circuli: Tùm ex aliqua linea longiſſima ſeparata ſumatur per 3. prop. lib. 1. recta EF æqualis ſemidiametro BD circuli: & per prop. 11. lib. eiuſdem ex puncto F excitetur recta FG longiſſima perpendicularis ipſi EF: & centro E, interuallo rectæ DA, fiat circulus, cuius circumferentia ſecabit obuiam rectam FG in G, eſt enim interuallum AD maius recta BD vel recta EF æqualibus factis: reſultabit triangulum EFG, ductâ rectâ EG. Præterea in puncto D ſeu centro circuli, fiat angulus rectilineus ADC æqualis angulo GEF, per prop. 23. lib. 1, ſecetque recta DC, circumferentiam circuli in C: Denique recta ducatur linea AC. hanc dico tangere circulum datum in C, ductam ab puncto A dato.

Demonſtratio. In triangulis FEG, CDA, habemus per conſtructionem duo latera FE, EG, æqualia duobus lateribus CD, DA, vtrumque vtrique angulosque continent æquales per ipſam conſtructionem: ergo per prop. 4. lib. 1. anguli F & C, æquales erunt: ſed per conſtructionem angulus F rectus eſt, ergo etiam angulus ACD rectus erit; ergo per corollar. propoſ. 16. præcedentis, recta AC, datum circulum tanget, fecimus ergo imperatum.

PRO-

# PROPOSITIO XVIII.

Si circulum tangat recta linea quæpiam, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

Fig.101. SVppoſitio. Circulum AG, contingat recta BD, in puncto A circumferentiæ ſuæ, iuxta corollarium noſtrum 4.propoſ. 16. lib. huius, & ex centro C, circuli ad punctum A ducta ſit recta C A: Dico hanc C A eſſe perpendicularem tangenti BD.

Conſtructio. Si recta C A non ſit perpendicularis rectæ B A D, tangenti circulum datæ; excitetur per propoſ. 11. lib. 1. ad punctum A, rectæ C A, alia recta EAF perpendicularis ipſi CA, quæ vel congruet cum data tangente BAD, vel illam ſecabit decuſſatim in puncto A.

Demonſtratio. Si congruant rectæ BAD, E A F, tam erit perpendicularis B A D, quàm EAF, rectæ C A; & contrà, recta C A tam erit perpendicularis rectæ B A D tangenti datæ, quàm ductæ EAF: perpendicularis enim recta alteri rectæ, patitur reſpectiuè illam alteram ſibi perpendicularem ex dictis in definit.10.lib.1. habebimus ergo intentum. Quod ſi non congruant ſed ſe decuſſent in A, rectæ BAD tangens data, & ducta EAF; iſta ducta per corollarium propoſ. 16. libri huius erit tangens eundem circulum in eodem puncto A vnico per corollarium noſtrum 4. propoſ. citat. totaque exiſtet extra circulum per propoſ. ipſam 16. Verùm contra ſecundam eius partem inter tangentem D A B, & circumferentiam circuli contacti, altera recta EAF cadet, circulum non ſecans quia eum tangit. Abſurdum hoc falſam reddit poſitionem contradicentem aſſertioni huius propoſitionis quæ ideò vera relinquetur.

# PROPOSITIO XIX.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

SVppoſitio. Circulum AKGLI, tangat recta BAD, in puncto A ex quo recta ſit ACL excitata ad angulos rectos ipſi BAD tangenti: Dico in hac recta ACL excitata eſſe centrum circuli. Fig.101.

Conſtructio. ſi centrum circuli non ſit in chorda ACL, ſit ſi fieri poſſit in puncto H extra illam, ab quo ad contactum A ducta ſit recta linea H A.

Demonſtratio. Per prop. præced. 18. recta HA erit perpendicularis rectæ datæ tangenti BAD; & ex datis eſt eidem BAD recta linea LCA perpẽdicularis; ergo contra coroll. noſtrum 4.prop.13.lib.1. erunt duæ rectæ lineæ diuerſæ HA, LA, perpendiculares eidem rectæ BAD, in eodem eius puncto A, & ad eaſdem partes. Abſurdum hoc deductum indicat centrum circuli contacti non poſſe eſſe extra rectam ACL, erit ergo in illa, quod erat propoſitum.

# PROPOSITIO XX.

In circulo angulus ad centrum duplus eſt anguli ad circumferentiam, cùm fuerit eadem circumferentia baſis angulorum.

SVppoſitio. In circulo ABC, cuius centrum D, ſit angulus BDC in centro D, & habens pro baſi arcum BC circuli; ſitque etiam alter angulus B A C in circumferentia eiuſdem circuli habens etiam eandem baſim arcum BC, eiuſdem circuli. Dico angulum BDC in centro eſſe duplum anguli BAC in circumferentia. Fig.102

Tres caſus diuerſos obtinere poteſt hæc propoſitio. Primus eſt, quando angulus BDC in centro eſt exterior alterius BAC in circumferentia. Secundus eſt quando latera BA, AC, efficientia angulum BAC, complectuntur intra figuram BAC, latera BD,DC, continentia angulum BDC in centro. Tertius eſt

eſt quando vnum latus anguli BAC in circumferentia, ſecat alterum è lateribus anguli BDC in centro. Secundùm iſtos tres caſus diuerſos, diuerſæ erunt conſtructiones noſtræ, & demonſtrationes.

Conſtructio primi caſus nulla eſt, veniamus ad demonſtrationem. Ex natura circuli, rectæ DA, DC, ſunt æquales, ergo per prop. 5. libr. 1. in triangulo ADC, anguli A, C, erunt æquales; ergo per prop. 32. lib. 1. corollarium noſtrum 2. angulus exterior in centro BDC, erit duplus anguli BAC in circumferentia.

Conſtructio ſecundi caſus. Producatur latus BD vltra D centrum circuli, donec attingat in E latus AC, & ducatur recta AD.

Demonſtratio. Ex natura circuli rectæ AD, CD, ſunt æquales, ergo per prop. 5. lib. 1. erunt anguli C, & DAC æquales: ſimiliter anguli D & DAC, erunt æquales: Ergo ſi primis duobus æqualibus, addantur duo poſtremi æquales, fient per 2. axioma lib. 1. duo DAB, DAC anguli, ſeu totus angulus BAC, æquales duobus angulis B, C; ſed per prop. 16. lib. 1. angulus DEC exterior æqualis duobus internis & oppoſitis D, EAC, vel CAD; & per eandem prop. 16. angulus BDC, eſt æqualis duobus angulis DEC, DCE; ergo per 1. axioma lib. 1. angulus BDC in centro D, erit æqualis tribus angulis B, C, BAC: ex bis tribus angulis ſi adimamus angulos duos B, C, æquales oſtenſos toti angulo BAC, relinquetur angulus BAC ſub duplus anguli BDC, per 7. axioma lib. 1. Duplus ergo erit angulus in centro BDC, anguli BAC in circumferentia circuli, etiam in hoc caſu.

Conſtructio tertij caſus. Secet latus BA, latus CD in E: ducatur recta DA; erunt ex natura circuli, rectæ DA, DB æquales; vnde in triangulo iſoſceli BDA, anguli B, DAB æquales per prop. 5. lib. 1. Tùm etiam erunt rectæ DA, DC, æquales; & anguli DAC, DCA æquales. Ergo quia angulus BAC, minor eſt angulo DAC, poterimus per prop. 23. libr. 1. angulum ACF ponere æquale angulo BAC, & recta CF producta ſecabit obuiàm BA in F.

Demonſtratio. Ex angulis DAC, DCA æqualibus oſtenſis, ſi detrahantur æquales anguli FAC, FCA, demonſtrati, relinquentur anguli æquales DAB, DCF; ergo per 1. axioma lib. 1. angulus DBA erit æqualis angulo DAB. Iam verò per prop. 16. lib. 1. angulus EFC æqualis eſt angulis FAC, FCA æqualibus, ideoque duplus anguli FAC vel BAC vnius illorum: ſed & per eandem propoſ. 16. angulus BEC æqualis eſt duobus EFC, ECF, tùm etiam angulis EDB, EBD; ergo per 1. axioma libr. 1. duo anguli EBD, EDB, erunt æquales duobus angulis ECF vel DCF, EFC: ablatis ergo angulis æqualibus oſtenſis DBA, DCF, relinquentur per 3. axioma lib. 1. anguli EFC, BDC, æquales: oſtendimus autem angulum EFC eſſe duplum anguli FAC, vel BAC; ergo per 6. ax. lib. 1. angulus BDC in centro, duplus erit anguli BAC in circumferentia circuli, etiam boc caſu.

Cùm ergo propoſitum demonſtrauerimus in omnibus caſibus, propoſitio declarata erit abundè, ſine auxilio axiomatis 20. libr. 1. quod promiſeramus.

## PROPOSITIO XXI.

### In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli; ſunt inter ſe æquales.

SVppoſitio. In eodem ſegmento ACDB circuli, exiſtant anguli rectilinei ACB, ADB: & ſic aliis: Dico eos eſſe æquales inter ſe. Fig. 103.

Demonſtratio. Si non ſint æquales, ſint ſi fieri poſſit inæquales; Iam verò mente ſuperponatur punctum D puncto C, & recta DA ſupra rectam CA, (nihil autem refert an recta DA ſit æqualis vel inæqualis rectæ CA) angulus maior v. g. ADB, continebit minorem, & recta DB illum maiorem efficiens cum altera DA, deuiabit ab recta CB, & ſic producta ſi opus ſit ſecabit circulum in alio puncto quàm B, magis remoto ab A, puta E: quare angulus ADB in hac ſuperpoſitione erit in alio ſegmento ACE, quàm angulus ACB: tranſpoſitio autem anguli nihil immutat in angulo per axioma 30. lib. 1. Quod ſi dixeris rectam DB ſuperpoſitam ex puncto C, etiam ſi angulus ADB ſit maior angulo ACB, terminari in puncto B, atque ita in eodem ACB eſſe angulos illos inæquales; ſequitur contra ax. 14. lib. 1. duas rectas CB, DE, figuram concludere, quod abſurdum eſt. Conſequens autem primum deductum tollit datum, quod abſurdum eſt, ergo antecedens vnde fluit erit falſum, videlicet poſitio aduerſarij contradicens propoſitioni præſenti, quæ ideò vera erit.

PRO-

Digitized by Google

## PROPOSITIO XXII.

### Quadrilaterorum in circulis deſcriptorum anguli qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales.

Fig. 104 SVppoſitio. in circulo ſit quadrilaterum ABCD deſcriptum, ita vt eius anguli omnes ſint in circumferẽtia circuli: Dico angulos ABC, ADC, oppoſitos eſſe æquales duobus rectis; tùm alios duos BCD, BAD oppoſitos eſſe etiam æquales duobus rectis.

Conſtructio, ducantur in quadrilatero duæ diagonales rectæ BD, AC.

Demonſtratio. In ſingulis triangulis è quatuor ABC, BCD, ACD, DAB, tres anguli ſimul ſumpti, ſunt æquales duobus rectis, iuxta prop. 32. lib. 1. verùm quia in ſingulis aſſignatis triangulis vnus angulus diuiditur in duos per alteram diagonalium rectarum ductarum; quilibet ex illis triangulis, conſiderari poterit tanquam habens quatuor angulos, ſimiliter æquales duobus rectis; nam totum eſt æquales ſuis omnibus partibus ſimul ſumptis per axioma 19. lib. 1. Notemus autem in vno ex dictis triangulis, puta BAD; quatuor numeros ordinarios in ſingulis angulis quatuor prædictis: hos angulos ſi oſtenderimus æquales aliis, in eis etiam inſcribemus proprios numeros eoſdem vt in aliis: & ſi in oppoſitis angulis quadrilateri eos numeros quatuor reperiamus, ſignum erit manifeſtum eos eſſe æquales duobus rectis. Iam verò per propoſ. 21. præcedentẽ, anguli BDA, BCA erunt æquales eodem numero 3. deſignati: Prætereà per eandem prop. anguli ABD, ACD, erunt æquales, eodem numero 4. notati, ergo quia in angulis oppoſitis BCD, BAD, reperiuntur quatuor numeri, vt in triangulo BAD, ipſi anguli erunt æquales duobus rectis per 1. ax. lib. 1. Similiter per prop. præcedentem, anguli CBD, CAD, ſunt æquales, eodem charactere 2. ſignati: tùm per eandẽ prop. anguli BAC, CDB ſunt æquales, eâdem figura 1. diſtincti: Cûm igitur in aduerſis angulis ABC, ADC, quatuor notæ prædictæ 1.2.3.4. ſeu numeri reperiantur, ſignum eſt eos eſſe duobus rectis æquales, per 1. ax. lib. 1. Demonſtrauimus ergo totam propoſitionem.

## PROPOSITIO XXIII.

### Super eâdem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia, non conſtituentur ad eaſdem partes.

SVppoſitio. Super recta AB ſit circuli ſegmentum ADB, & aliud circuli ſegmentum ACB maius, erunt ſic inæqualia ſegmenta ſupra eandẽ rectam AB, & ad eaſdem partes: Dico iſta duo circulorum ſegmenta non poſſe ſimilia eſſe. Fig. 105.

Conſtructio. Ex puncto aliquo C, arcus ACB, ducantur rectæ CA, CB, tùm ex aliquo puncto arcus minoris ADB iacente inter latera CA, CB, puta D, ducantur rectæ lineæ DA, DB.

Demonſtratio, per prop. 21. lib. 1. angulus ADB maior erit angulo ACB: ſed ſi ſimilia ſint prædicta ſegmenta inæqualia, erunt dicti anguli æquales per defin. 10. lib. huius: ergo propter hanc contradictionem non poterunt inæqualia ſegmenta illa, eſſe ſimilia. quod volumus.

## PROPOSITIO XXIV.

### Super æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta; ſunt inter ſe æqualia.

SVppoſitio. Super æqualibus rectis lineis AB, CD, ſimilia ſint circulorum ſegmenta AEB, CFD; Dico illa eſſe inter ſe æqualia. Fig. 106

Conſtructio. In ſegmento AEB; fiat quicumque angulus rectilineus AEB: & per prop. 23. lib. 1. Elem. ad punctum D, rectæ CD, fiat angulus CDF æqualis angulo ABE, & producatur DF recta donec ſecet in F circuli circumferentiam: denique ducatur recta FC.

Demonſtratio. Quia dantur ſegmenta circulorum ſimilia AEB, CFD, erunt per def. 10. lib. huius, anguli AEB, CFD, æquales in illis. Et quia in triangulis AEB, CFD, ſunt anguli E, F, æquales oſtenſi, tùm anguli B, D, per conſtructionem æquales, & ex datis ſunt latera AB, CD, æqualia; erit per prop. 26. lib. 1. reliquus angulus A reliquo angulo C, æqualis; tùm latus EB, lateri FD æquale; & latus EA, lateri FC æquale: ergo per 9. ax. lib. 1. totum triangulum AEB, toti triangulo CFD,

CFD, congruet, punctaque tria angulorum, tribus punctis congruent, hoc eſt E & F, A & C, B & D. Igitur in hac ſuperpoſitione arcus AEB, tria puncta A, E, B, tribus punctis prædictis C, F, D, arcus CFD ſuperponentur, & communia erunt iſta tria puncta ambobus arcubus ſegmentorum dictorum: Quare vel in eis ſe contingent dicti arcus; vel in eis ſe mutuò ſecabunt; vel congruent dati arcus: Non primùm, cùm enim ſint arcus circulorum, qui ſe mutuò contingere exterius vel interius poſſunt in vno tantùm puncto iuxta prop. 13. lib. præſentis, ſolùm etiam iſti arcus in vno puncto ſe mutuò contingerent: Non ſecundum, quia circuli ſe mutuò ſecarent ratione circumferentiarum ſuarum in pluribus punctis quàm duobus contra prop. 10. lib. huius. Reſtat igitur vt congruant iſti arcus ſegmentorum: ſed etiam oſtenſæ ſunt baſes eorum AB, CD, congruere; ergo ſegmenta iſta AEB, CFD, circulorum ſimilia, erunt æqualia per axioma 9. libr. 1. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIUM NOSTRUM AUREUM.

*Arcus circulorum, vel circumferentiæ integræ circulorum quæ plura puncta duobus habebunt communia, congruent & æquales erunt circumferentiæ circulorum integrorum: totiq́ circuli.*

HOc demonſtrauimus, quia in eis ſe mutuò non poſſunt contingere nec ſecare, ergo congruent.

## PROPOSITIO XXV.

### Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

*Fig. 107* SVppoſitio. Arcus ADB circuli datus ſit, & oporteat circulum perficere cuius eſt arcus vel ſegmentum ſeu pars.

Conſtructio. Ducatur chorda AB arcus dati ADB circuli, quæ bifariàm ſecetur in C, per prop. 10. libr. 1. ex quo puncto C per propoſ. 11. libr. eiuſdem, excitetur recta linea perpendicularis ECD, ipſi chordæ AB; & producatur donec ſecet arcum in D; rectæque ducantur lineæ DA, DB, tùm per prop. 23. libr. 1. fiat angulus BAH in puncto A, rectæ DA, æqualis angulo ADE, ſecabit AH rectà BCE in H: nam certum per corollarium prop. 1. lib. huius in excitata perpendiculari recta BCE ad chordam AB arcus circuli diuiſam bifariàm in C, ineſſe centrum circuli; quare angulus ADE mixtus ex arcu AD, & recta DCE parte diametri, vel diametro, vel ſuperante diametrum circuli, erit angulus ſemicirculi, qui per prop. 16. lib. huius ſemper eſt maior quouis angulo rectilineo acuto, quare angulus rectilineus ADC, vel ADE erit acutus comprehenſus ab dicto angulo ſemicirculi; ergo etiam alter angulus DAH factus huic acuto angulo æqualis, erit etiam acutus; ergo per axioma 13. rectæ AH, BCE, concurrent in H. inſuper ducatur recta HB. Præterea per 3. propoſ. lib. 1. detrahatur recta HE, æqualis rectæ HA. Dico H eſſe centrum circuli perficiendi cuius arcus erat datus ADB.

Demonſtratio. Imprimis, quia ſunt anguli rectilinei ADH, DAH, æquales per conſtructionem, erunt rectæ HD, HA æquales per prop. 6. lib. 1. ſed & per conſtructionem rectæ HE, HA, ſunt æquales; ergo per 1. ax. lib. 1. erunt tres rectæ lineæ HD, HA, HE, æquales; & tota DE diuiſa biſariam in H. Præterea, cùm recta AB diuiſa ſit biſariam in C, erunt rectæ CA, CH, æquales rectis CB, CH, vtraque vtrique, eorumque quadrata æqualia; quibus ſũt per prop. 47. lib. 1. æqualia quadrata rectarum AH, BH, in triangulis rectangulis ACH, BCH; ergo rectæ HA, HB, erunt æquales; ideoque etiã per 1. ax. cit. quatuor rectæ HE, HA, HD, HB, erunt æquales ergo per axioma 25. lib. 1. circulus factus centro H, interuallo vnius ex his quatuor æqualibus rectis, tranſit eius circumferentia per omnes extremos punctos aliarum non communes, hoc eſt per E, A, D, B, puncta; & per tria arcus dati A, D, B, ergo per coroll. noſtrum prop. præcedentis congruet arcus factus cum dato ADB, quia tranſit per tria eius puncta A, D, B; & pars erit circuli deſcripti, habemuſque intentum, videlicet nos deſcripſiſſe circuli circumferentiam perfecti, cuius arcus ADB datus erat.

## PROPOSITIO XXVI.

### In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus circumferentiis inſiſtunt; ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias conſtituti inſiſtant.

SVppoſitio. In circulis æqualibus BGC, EHF, æquales anguli ſint in centris ipſorum *Fig. 108.*

ſorum

ſorum A primi rirculi, D ſecundi: tùm alij anguli æquales BGC, EHF, in circumferentijs illorum. Diro arcus BC, EF, quibus inſiſtunt, eſſe æquales.

Demonſtratio. Per 1. def. libri huius, latera AB, AC, DE, DF, romplectentia æquales angulos in centris circulorum æqualium, erunt æqualia; dantur verò anguli in centris BAC, EDF; ergo per axioma 9. lib. 1. ſuperpoſita inuirem, rongruent, angulus A, angulo D, & laterum prædictorum extrema, B ipſi E, C ipſi F; & ideo rentra A & D, datorum circulorum æqualium, qui circuli ideo per rit. ax. etiam rongruent, eorumque arrus BC, EF, quibus inſiſtunt dicti anguli; quare per ipſummet axioma æquales erunt. Simili ratione idem concludetur ex alijs angulis æqualibus BGC, EHF, in circumferentijs (quod ſi in illa ſuperpoſitione opus ſit mente produrere aliquod latus vel diminuere, nihil de ratione angulorum tollit.)

COROLLARIVM NOSTRVM.

*In eodem circulo aquales anguli aqualibus circumferentijs inſiſtunt; ſiue ad centra ſiue ad circumferentias conſtituti inſiſtant.*

NAm eodem artificio demonſtrabitur per illam ſuperpoſitionem intellectualem.

## PROPOSITIO XXVII.

In æqualibus circulis, anguli qui æqualibus circumferentijs inſiſtunt ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra ſiue ad circumferentias conſtituti inſiſtant.

Fig. 108. SVppoſitio. In æqualibus rirculis BGC, EHF, æqualibus arcubus BC, EF, inſiſtant ad oentra A, D, anguli BAC, EDF: vel in circumferentijs illorum, anguli BGC, EHF inſiſtant: Dico tam angulos illos ad centra eſſe æquales inter ſe, quàm angulos in cirrumferentijs.

Demonſtratio. Per axioma 9. lib. 1. congruent circuli dati æquales, & eorum centra A, D; & arcus eorum BC, EF; punctumque B puncto E; & punctum C puncto F; & rectæ AB, DE; & rectæ AC, DF; æquales inter ſe. Iam verò ſi angulus BAC non congruat angulo EDF, neceſſariò diuaricabitur alterum eius latus, quod tamen terminari debet extremo arcus æqualis, & ſic duæ rectæ lineæ figuram efficient, contra axioma 14. lib. 1. cõgruet ergo angulus BAC, angulo EDF, ideoque per ax. 9. cit. erunt æquales. Sed dum congruunt rirculi, punctum G anguli incidit in circumferentiam alterius ſuppoſiti circuli; & dum congruunt æquales circumferentiæ quibus inſiſtunt dicti anguli, neceſſariò ſi dicti anguli non ſunt æquales, latera vnum angulum è datis efficientia, rum alijs figuram roncludent, terminati in eiſdem punctis æqualium rirrumferentiarum rongruentium quibus inſiſtunt, rontra 14. ax. lib. 1.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*In eodem circulo, anguli qui aqualibus arcubus inſiſtunt, ſiue ad centrum ſiue in circumferentia illius; ſunt inter ſe aquales.*

DEmonſtratio manifeſta eſt per ſuperpoſitionem mentalem, applicando ea principia demonſtrationis allatæ.

## PROPOSITIO XXVIII.

Inæqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales arcus auferunt; maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

SVppoſitio. Rrectæ lineæ BC, EF, æquales, ſint chordæ circulorum æqualium; BC quidem in circulo BGC, & EF in rirculo EHF: Diro quod auferant ex illis rirculis æqualibus æquales arcus; hoc eſt ſi non fuerint diametri circulorum datorum æqualium; arcus ablati maiores BGC, EHF, ſint æquales, & minores BC, EF, ſint etiam æquales inter ſe. Fig. 108.

Demonſtratio. Nã per 9. ax. l. 1. congruent æquales rectæ BC, EF, & circuli dati æquales; vnde etiam arcus maiores prædicti rõgruent, & minores etiam inter ſe congruent; ergò per idem axioma, maior maiori æqualis erit, & minor minori.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*In eodem circulo aquales chorda auferent aquales arcus, maiorem maiori, minorem minori.*

NAm per ax. 9. lib. 1. congruent illæ æquales chordæ ſuperpoſitæ inuicẽ, eoſdem ergo auferent maiorem & minorem ar-

cus:porrò arcus quos afferebant, congruent etiam, nam circulus idem concipi poteſt reproductus æqualis, qui congruet alteri: & ſic ſinon congruerent illi arcus prædicti, circulorum illorum ſeu circuli circumferentiæ integræ non congruerent, contra conceſſum. Ergo arcus auferent in eodem circulo, æquales chordæ.

## PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, æquales arcus, æquales chordas ſubtendunt.

Fig. 108. Svppoſitio. In circulis æqualibus BGC, EHF, ſint æquales arcus BGC, EHF: Dico æquales chordas BC, EF, illis ſubtendi.

Demonſtratio. Per axioma 9. lib. 2. æquales arcus BGC, EHF, æqualium circulorum congruent, & ſic eorum extrema B, C, E, F, congruent B ipſi E, C ipſi F: atque ita recta chorda BC, chordæ EF congruet, & æquales erunt per 21. ax. lib. 1.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*In eodem circulo, æquales arcus ſubtendunt æquales chordas.*

Nam per citatum axioma 9. congruent illi arcus æquales, & extrema extremis vtraque vtrique, ergo etiam rectæ chordæ illorum congruent & æquales erunt per cit. ax. 21.

## PROPOSITIO XXX.

Datum circuli arcum, bifariàm ſecare.

Fig. 109. Svppoſitio. Arcus ADB circuli alicuius ſit ſecandus bifariàm.

Conſtructio. Per 1. prop. Ductam chordam AB, ſeca bifariàm in C per prop. 10. lib. 1. & per 11. eiuſdem libri, excita rectam CD perpendicularem ipſi AB, producendam donec ſecet in D arcum datum & duc rectas AD, BD.

Demonſtratio. In triangulis rectangulis, erunt per 4. prop. lib. 1. baſes BD, AD, æquales, qui habent duo latera AC, CD, æqualia duobus CD, BC, vtrumque vtrique anguloſque in C continent rectos æquales: triangulū ergo erit iſoſceles ADB, cuius anguli A B, per 5. prop. lib. 1. erunt æquales; ergo per coroll. noſtrum 26 prop. lib. huius, inſiſtent æqualibus AD, BD, arcubus. Totum ergo arcum ADB in B, bifariàm ſecauimus.

## PROPOSITIO XXXI.

In circulo, angulus qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui verò in minore ſegmento, maior eſt recto.

Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt: minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto.

Hvius propoſitionis primæ partis inuentorem Proclus facit Thaletē Mileſium primum in Græcia ſapientem appellatum, & Geometriæ Profeſſorem quam in Ægypto didicerat. Fig. 105.

Quinque habet partes hæc propoſitio, quas ſeorſim proponemus ac demonſtrabimus. Primæ ſuppoſitio eſt huiuſmodi. In circulo ABCD, ſit angulus ABC, in ſemicirculo ABC: dico hunc angulum eſſe rectum.

Conſtructio. Per prop. 31. lib. 1. ex A puncto ducatur recta linea AD chorda parallela chordæ BC, & recta ducatur CD.

Demonſtratio. Per prop. 29. lib. 1. erunt anguli ACB, CAD, æquales; ideoque per coroll. noſtrum prop. 26. lib. huius, inſiſtent arcubus CD, AB, æqualibus; quibus ablatis ex ſemicirculis æqualibus ABC, CDA, relinquentur per 3. ax. lib. 1. æquales arcus BC, AD, qui per coroll. noſtrum prop. 29. chordas habebunt æquales BC, AD; quæ cùm ſint poſitæ parallelæ, aliæ duæ chordæ AB, CD, erunt etiam æquales & parallelæ per prop. 33. lib. 1. Habebimus ergo quadrilaterum parallelogrammum in circulo dato inſcriptum, cuius anguli oppoſiti ABD, ADC, erunt æquales per 34. prop. lib. 1. & ſimul ſumpti æquales duobus rectis per 22. prop. lib. huius. Ergo cùm in triangulis BCA, DAC, latera ſint duo BC, CA, æqualia duobus DA, AC, vtrumque vtrique, angulos contineant æquales ACB, CAD, erunt per 4. prop. lib. 1. anguli ABC, CDA, illorum æquales; qui cùm ſint oſtenſi æquales duobus rectis, & ſinguli æquales; ſinguli erunt recti: ergo angulus ABC in ſemicirculo rectus erit.

Secundæ

Secundæ partis ſuppoſitio. In circulo ABCD, ſit angulus BAC in maiore ſegmento quàm ſemicirculus: Dico illum angulum eſſe acutum ſeu minorem recto.

Conſtructio. Ex angulo A per centrum E circuli dati reperiendum per prop. 1. lib. huius ducatur recta AE circuli circumferentiam ſecans in C, & ducatur recta BC, ſi opus ſit.

Demonſtratio. In triangulo ABC, angulus ABC rectus erit per 1. partem præcedentem, ergo per coroll. 2. prop. 32. lib. 1. angulus BAC, erit acutus.

Tertiæ partis ſuppoſitio. In circulo ABCD, ſit angulus BFC in ſegmento minore quàm ſemicirculus: Dico illum angulum eſſe maiorem recto.

Conſtructio. Ex puncto C, per centrum E circuli tranſmittatur diameter CEA; & ex F, recta FA.

Demonſtratio. Angulus AFC erit rectus per 1. partem; ſed hunc continet angulus datus BFC; ergo erit angulus BFC, maior recto per 8. ax. lib. 1.

Quartæ partis ſuppoſitio. Sit angulus ABC mixtilineus maioris ſegmenti quàm ſemicirculus: Dico illum angulum ABC eſſe maiorem recto rectilineo.

Conſtructio & demonſtratio. Ex puncto C tranſmittatur diameter circuli CEA, & ducatur recta AB, quæ per 2. prop. lib. huius cadet intra circulum tota, efficietque cum recta chorda BC, angulum ABC rectum rectilineum per 1. partem, qui continebitur in angulo prædicto ABC mixtilineo maioris dati ſegmenti, qui ideo maior erit per 8. ax. lib. 1. angulo recto ABC rectilineo.

Quintæ partis ſuppoſitio. In circulo ABCD, ſit angulus FBC mixtilineus minoris ſegmenti CFBC quàm ſemicirculus: Dico hunc angulum eſſe minorem recto rectilineo.

Conſtructio. Ex puncto C per E centrum circuli ducatur diameter CEA, & chorda AB, producenda vltra B.

Demonſtratio. Productio chordæ AB vltra B, vel extra ſegmentum datum progreditur, vt BG; vel cögruit cũ arcu BFC ſegmenti; vel ipſum ſecat in H. Neutrum ex duobus eſſe poteſt: Non vltimum, nam ſic contra axioma 23. lib. 1. tria puncta circumferentiæ circuli, videlicet A, B, H, eſſent in directum rectæ lineæ ABH. Non ſecundum, nam rectum curuo congrueret contra naturas illorum. Primum ergo erit: Igitur GBC angulus rectus per prop. 13. lib. 1. eo quod per 1. partem huius propoſitionis ſit angulus ei deinceps ABC rectus, continebit angulum datum FBC minoris ſegmenti: ergo hic angulus minoris ſegmenti erit minor angulo recto rectilineo, per 8. lib. 1. axioma.

## COROLLARIVM.

*In triangulo angulus qui æqualis eſt duobus eius reliquis angulis, rectus eſt.*

NAm per prop. 32. lib. 1. tres anguli cuiuſcumque trianguli ſunt æquales duobus rectis; Datur in vno ſolum angulo dimidium trium angulorum trianguli, videlicet æquali alijs duobus reliquis: igitur erit rectus, nam duo recti quibus ſunt æquales tres illi anguli, non poſſunt diuidi per medium in duo æqualia, niſi in vnum angulum rectum, & alios duos æquales illi.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Super data recta linea excitare ad eius vnum extremum, rectam perpendicularem, alia methodo quàm traditu ad propoſitionem 12. lib. 1.*

SVppoſitio ſit data recta AD, & ei excitanda ſit recta perpendicularis DC, ad eius extremum D. Fig. 110.

Conſtructio. Centro quolibet puncto E, quod non ſit in directum datæ rectæ AD, & interuallo ED, fiat circuli circumferentia ſecans in A rectam datam DA producendam ſi opus ſit ad partes A non D extremi: & ducatur recta AEC diameter huius circuli facti: Dico rectam CD ducendam, eſſe perpendicularem datæ rectæ AD, in eius extremo D dato.

Demonſtratio. Angulus ADC erit in ſemicirculo ADC, ergo per 1. partem huius prop. 31. erit rectus: ergo per def. 10. lib. 1. erit perpendicularis recta CD ducta, datæ rectæ AD, & quidem in eius extremo dato D. Fecimus ergo imperatum, & rectè factum demonſtrauimus.

## PROPOSITIO XXXII.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea; à contactu autem producatur quædam recta linea circulum ſecans: Anguli quos ad contingentem facit, æquales ſunt ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.

Fig. 111. SVppoſitio. Circulum tangat recta ABC in puncto B ex quo recta linea ſecans vel chorda BD ducta ſit, diuidens circulum in duo ſegmenta BFD, BED, in quorum primo ſit angulus BFD, & in altero angulus BED: Dico quod anguli CBD, ABD, quos ſecans BD efficit cum tangente ABC, ſunt æquales angulis qui in alternis circuli ſegmentis prædictis conſiſtunt; hoc eſt angulus CBD eſt æqualis angulo BED; & angulus ABD, æqualis angulo BFD.

Si linea recta ſecans deducta ab puncto B contactus tranſierit per centrum H circuli dati: manifeſtum per prop. 18. lib. huius eſſe ad angulos rectos tangenti rectæ ABC; tum per prop. præced. 31. angulos in ſegmentis ſemicirculorum eſſe rectos: quare in hoc caſu vera erit propoſitio.

Conſtructio, quando recta ſecans BD non incedit per H centrum circuli contacti. Ex puncto D, per prop. 31. lib. 1. ducatur recta linea chordaque circuli DG, parallela tangenti ABC rectæ; & recta linea ex puncto contactus B, per centrum circuli H, quæ erit ad angulos rectos ipſi rectæ tangenti ABC, per prop. 18. lib. huius, & per coroll. noſtrum 1. prop 42. lib. 1. ſecabit in I, parallelam DG ductam, eritque per coroll. noſtrum 2. prop. 29. lib. 1. etiam ad angulos rectos ipſi rectæ DG, vnde per prop. 3. lib. huius eam ſecabit in I bifariàm: Quare in triangulis BID, BIG, cùm latera BI, ID, ſunt æqualia lateribus BI, IG, anguloſque contineant rectos æquales, erunt per 4. prop. lib. 1. baſes eorum BD, BG, æquales: ergo per prop. 5. lib. eiuſdem anguli BDG, BGD, erunt æquales in triangulo iſoſceli GBD. Denique producatur recta GD, vltra D in K.

Demonſtratio. Per prop. 29. lib. 1. Anguli CBD, BDG, ſunt æquales; & anguli BDG, BGD, oſtenſi æquales; ergo per 1. axioma lib. 1. erunt anguli CBD, BGD æquales: ſed per prop. 21. lib. huius, anguli BGD, BED ſunt æquales, ergo per 1. ax. cit. anguli CBD, BED erunt æquales, quod erat vnum è propoſitis. Iam verò per cit. prop. 29. lib. 1. anguli ABD, BDK ſunt æquales; & anguli duo CBD, BDK æquales duobus rectis; tùm etiam per prop. 32. lib. 1. tres anguli trianguli BFD ſunt æquales duobus rectis; & per primam partem iam demonſtratam, ſunt anguli CBF, BDC, æquales: Ergo ſi ex duobus angulis CBD, BDK, ſimul ſumptis, æqualibus tribus angulis BFD trianguli, (nam ſunt oſtenſi æquales duobus rectis) demamus communes angulos æquales oſtenſos CBF, BDF, & communem FBD, angulum; relinquentur per 3. axioma lib. 1. anguli BFD, BDK æquales: ſed oſtendimus angulum BDK eſſe æqualem angulo ABD, ergo per 1. ax. lib. 1. angulus ABD erit æqualis angulo BFD, quod erat ſecundo loco propoſitum.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si chorda circuli non eſt perpendicularis recta linea tangenti circulum ipſum educta ex puncto contactus illius, non tranſibit per centrum ipſius circuli: & ſi dicta chorda non incedit per centrum ipſius circuli, non erit perpendicularis ipſi tangenti.*

PRima pars patet in chorda BD; nam ſi tranſiret per centrum H circuli, eſſet perpendicularis rectæ ABC tangenti per prop. 18. lib. 1. contra datum. Secunda pars etiam manifeſta eſt; nam ſi eſſet perpendicularis chorda BD, tangenti rectæ ABC, incederet per prop. 19. lib. huius, per centrum H circuli, contra datum. Hæc duo abſurda indicant duas poſitiones aduerſantes noſtris duabus huius corollarij falſas eſſe; quare veræ erunt noſtræ. Fig. 111.

## PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

SVppoſitio. Super data recta AB deſcribendum ſit circuli ſegmentum capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo H recto, vel FGK acuto, vel FGN obtuſo. Nam tres huiuſmodi caſus eſſe poſſunt diuerſi, ob diuerſi- Fig. 112.

diuerſitatem trium ſpecierum angulorum rectilineorum.

Conſtructio, & demonſtratio, quando datus angulus eſt rectus H recta linea AB data diuidatur biſariàm in C per prop. 10. lib. 1. & centro C interuallo CA circuli circumſerentia integra deſcribatur, quæ tranſibit per aliud B extremum iuxta 25. ax. lib. 1. & quodcumque aliud punctum ab A & B, circuli facti eligatur puta D, ex quo ad alia puncta A & B, rectæ lineæ immittantur efficient angulum ADB rectum in ſemicirculo ADB, per prop. 31. libri huius; atque ita ſupra rectam datam AB, deſcripſerimus ſegmentum ſemicirculare ADB quod capiat angulum ADB æqualem dato angulo rectilineo recto H.

Conſtructio, quando datus eſt angulus acutus FGK. Per propoſitionem 11. lib. 1. ad punctum G, rectæ FG, ponatur recta GI perpendicularis ipſi rectæ FG, ad partes K, ita vt rectus angulus FGI, contineat intra ſe angulum datum FGK rectilineum, & alium acutum KGI reſultantem angulum. Præterea per cit. prop. 11. excitetur in puncto B rectæ AB datæ, alia recta BD perpendicularis ipſi AB; & per prop. 23. lib. 1. fiat angulus BAD æqualis angulo IGK acuto; recta AD occurret rectæ BD in D, per 13. axioma lib. 1. eo quod angulus DBA, & angulus A ſimul ſumpti ſint minores duobus rectis. Inſuper per prop. 10. lib. 1. recta AD ſecetur biſariàm in C, & centro C, interuallo CA, fiat circuli circumferentia quæ incedet per punctum D, per cit. 25. axioma lib. 1. etiamque tranſibit per punctum B anguli recti ſacti, alioqui ſecaret in E, productam AB vltra B rectam, vel non productam, atque ductis rectis DE, anguli in E eſſent recti per prop. 31. lib. huius; & ſic in alterutro triangulorum reſultantium DBE, eſſent duo anguli recti, vnus in B, alter in E, contra prop. 17. lib. 1. quod abſurdum, ergo circumferentia circuli ſacti non aberrabit ab puncto B ſicuti voluimus. Iam verò aſſero factum eſſe ſupra rectam datam AB, circuli ſegmentum ADB, quod capiat angulum ADB æqualem dato acuto rectilineo FGK.

Demonſtratio. Tres anguli ſimul ſumpti, trianguli ADB, ſunt æquales duobus rectis per prop. 32. lib. 1. Eſt autem vnus eorum per conſtructionem rectus in B, reliqui ergo duo anguli ſimul ſumpti, A & ADB, erunt æquales vni recto videlicet facto FGI: ſed per conſtructionem angulus A eſt æqualis angulo IGK parte vna recti IGF, ergo reliquæ parti ſeu angulo FGK dato acuto, alter angulus ADB erit æqualis, in ſegmento ADB facto ſupra datam rectam AB. Fecimus ergo imperatum in hoc ſecundo caſu.

Conſtructio, quando datus eſt angulus FGN obtuſus. Producatur vnum è lateribus illum angulum continentibus, puta NG, vltra G punctum anguli, vſque ad K: & per præcedentem ſecundum caſum fiat ſupra rectam datam AB, ſegmentum circuli capiens angulum ADB ęqualem angulo FGK acuto, qui eſt complementum dati obtuſi NGF, ad duos rectos iuxta prop. 13. lib. 1. & in altero ſegmento eiuſdem circuli facti fiat angulus quilibet, puta AMB: Dico ſegmentum iſtud AMB, continere angulum AMB, æqualem dato obtuſo rectilineo NGF.

Demonſtratio. Ex conſtructione reſultabit in circulo facto rectilineum quadrilaterum ADBM, cuius duo anguli oppoſiti ADB, & M, ſunt æquales duobus rectis per prop. 22. lib. huius; ſed per prop. 13. lib. 1. illis etiam duobus rectis ſunt æquales duo anguli NGF, FGK: ergo cùm per axioma 12. lib. 1. omnes duo anguli recti ſint æquales duobus alijs rectis angulis; & alij duo æquales illis, ſint etiam æquales alijs duobus æqualibus eiſdem duobus rectis angulis per axioma 1. lib. 1. ſi detrahamus æquales angulos factos FGK, ADB, ab prædictis angulis deſignatis æqualibus, remanebunt alij duo æquales NGF, AMB, per 3. axioma lib. 1. ſed iſte angulus AMB eſt in circuli ſegmento AMB facto ſupra datam rectam AB, æqualis dato obtuſo angulo NGF. Fecimus ergo imperatum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si trianguli rectanguli rectilinei latus ſubtenſum angulo recto biſariàm ſecetur, & ex puncto hoc medio veluti centro fiat interuallo ſemiſſis dicti lateris ſecti, circuli circumferentia; ipſa tranſibit per extrema dicti lateris, & per punctum anguli recti.*

HOc demonſtratum in primo caſu.

## PROPOSITIO XXXIV.

### A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

SVppoſitio. Ex dato circulo ſit reſcindendum ſegmentum capiens angulum æqua- Fig. 113.

 lem

bemal.

b. II.

b. III.

b. II.

III.

Digitized by Google

æquale quadratis rectarum GC, GF, hoc eſt quadrato rectæ FC; vel rectæ FB: ſed quadrato rectæ FB æquale eſt rectangulum ſub AE, EB, vnà cum quadrato rectæ FE; ergo per 3. ax. lib. 1. ſi dematur ab illis æqualis poſtremis aſſignatis commune quadratum rectæ FE, relinquetur rectangulum ſub CE, ED, æquale rectangulo ſub AE, EB. quod erat oſtendendum.

Sch. IIII. Conſtructio tertij caſus. Quando duæ chordæ AB, CD, ſe mutuò ambæ ſecant in E, & neutra tranſit per centrum F circuli. Ducatur recta chorda GFEH, per centrum F circuli, & punctum E.

Demonſtratio, per demonſtrationem ſecundi caſus rectangulum ſub AE, EB, eſt æquale rectangulo ſub GE, EH: ſimiliter rectangulum ſub CE, ED, æquale eſt eidem rectangulo ſub GE, EH; ergo per 1. ax. libri primi, rectangulum ſub AE, EB, erit æquale rectangulo ſub CE, ED. quod erat concludendum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

### I.

*Si in eodem circulo innumeræ chordæ ſe mutuò ſecent in vno puncto: rectangula ſub earum proprijs partibus erunt inter ſe æqualia.*

QVia vt in tertio caſu ea poterimus comparare cum vno eodem rectangulo ex illis, & ea æqualia concludere; ergo per 1. ax. lib. 1. erunt omnia inter ſe æqualia.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### II.

*Dato vno rectangulo, infinita alia rectangula ſub diuerſis lateribus conſtituere æqualia illi dato ſingula.*

Sch. IIII. DVo latera, v.g. GE, EH, rectanguli dati ſub quibus eſt vel conſtituitur, iuxta def. 1. lib. 2. ponãtur in vna recta linea GEH, diuidenda biſariàm in F puncto per prop. 10. lib. 1. quo puncto F, vt centro decircinandus erit circulus. cuius circumferentia tranſibit per extrema G & H huius rectæ lineæ, iuxta coroll. noſtrum 2. prop. 46. lib. 1. denique intra circulum ponendæ erunt innumeræ chordæ tranſeuntes per punctum E rectæ GEH: nam per coroll. noſtrum præcedẽs rectangula omnia ſub earum partibus erunt æqualia rectangulo ſub partibus GE, EH, rectæ GEH; quæ partes erant, latera ſub quibus datum rectangulum erat. Et ſic fecerimus imperatum.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### III.

*Dato vno rectangulo exhibere vnum quadratum æquale, aliter quàm per propoſitionem 14. lib. ſecundi.*

IN recta linea infinita verſùs vnam partem ſumantur per prop. 3. lib. 1. duæ rectæ AE, EB, ita vt vna AE ſit æqualis lateri maiori rectanguli dati, & alia EB æqualis minori eius lateri: totaque recta AEB diuidatur biſariàm in F per prop. 10. lib. 1. & ad punctum E ponatur per prop. 11. lib. eiuſdem 1. recta linea perpendicularis vtcumque rectæ AEB; tùm centro F, interuallo FA, vel FB, deſcribatur circulus cuius circumferentia incedet per extrema A, & B, rectæ AEB, per axioma 25. lib. 1. & ſecabit in C & D, perpendicularem rectam ductam ipſi AEB, in puncto eius E. Dico autem rectãgulum ſub CE, ED, eſſe quadratum æquale rectangulo dato ſub AE, EB. nam quia recta AFEB, incedit per centrum circuli F, eſtque perpendicularis ipſi CED per conſtructionem, in puncto eius E, eam ſecabit biſariàm in E, per prop. 3. lib. huius: quare rectangulum ſub CE, ED, partibus eius erit quadratum per coroll. noſtrum 2. prop. 46. lib. 1. quodque per demonſtrationem 2. partis huius propoſitionis erit æquale rectangulo ſub AE, EB dato. Fecerimus ergo imperatum aliter quàm per prop. 14. lib. 2. Sch. II.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### IV.

*Quadrato vni dato, exhibere innumera rectangula ſub diuerſis rectis, æqualia ſingula.*

VIde figuram ſecundi caſus primam huius propoſitionis. Sit quadratum ſub CE, ED æqualibus rectis compoſitis in directum CED: & per prop. 11. lib. 1. ex puncto E medio excitetur recta linea EA ſurſùm perpendicularis ipſi CED; tùm ex aliquo puncto F, huius rectæ EA, ducatur recta FC ad punctum C extremũ rectæ CED: Præterea centro F, interuallo FC, fiat circulus, cuius circumferentia ſecabit rectam EA productam ſi opus ſit in A, & in B productam infra E; nam latus FC in triangulo rectangulo FEC maius eſt latere FE per prop. 19. lib. 1. quandoquidem per coroll. 1. prop. 32. lib. eiuſdem, angu- Sch. II.

lus FCE ſit acutus: Ad hæc circumſerentia circuli facti tranſibit per D aliud extremum rectæ CED, per axioma 25. lib. 1. quandoquidem ſi duceretur recta FD, eſſet æqualis rectæ FC; nam in triangulis FED, FEC, duo latera FE, ED, ſunt æqualia duobus lateribus FE, EC, anguloſque rectos æquales continent in E per conſtructionem, ergo per 4 prop. lib. 1. rectæ FC, FD erunt æquales. His poſitis ſi per E ducantur in circulo facto chordæ innumeræ tranſeuntes per E punctum: rectangula ſub partibus proprijs illarum, erunt per hanc propoſitionem æqualia ſingula rectangulo ſub CE, ED, æqualibus rectis, hoc eſt quadrato dato. Atque ita dato vni quadrato æqualia innumera rectangula poſuerimus ſingula ſub diuerſis rectis lineis, iuxta prop. 7. huius libri, quod erat etiam aduertendum in demonſtratione corollarij ſecundi: nam rectæ illæ omnes ad vnam partem diametri circuli ſunt inæquales, & ſic aliæ ad aliam partem.

## PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam circumferentiam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur quadrato.

Fig. 115. SVppoſitio. Extra circulum BCF, cuius centrum E, datum ſit punctum A, ex quo ad circulum cadant duæ rectæ lineæ ABD, ACH, quarum vna videlicet ABD circulum ſecet in B & D; altera ACH, ipſum circulum tangat in C. Dico rectangulum ſub tota ſecante ABD, & ſub eius portione AB quæ eſt inter punctum A datum, & circulum datum, externis ſita, eſſe æquale quadrato rectæ AC tangentis ipſum circulum.

Conſtructio. Centro E circuli dati quærendo per prop. 1. huius libri ſi datum non ſit, & interuallo EA deſcribetur alter circulus, cuius circumferentia ſecet productam tangentem AC in H, & ſecantem ABD in N: Tùm ex centro E, rectæ ducantur lineæ EC, EB; & ex puncto A, per centrum E circuli dati, & centrum etiam circuli facti AHN, ducatur recta diameter AEG circuli facti, quæ ſecabit in O, & F, circuli dati circumferentiam; vnde OEF recta erit diameter circuli dati: & ſi ex ſemidiametris EA, EG æqualibus circuli facti demantur, ſemidiametri EO, EF, circuli dati æquales, relinquentur per 3. ax. lib. 1. æquales rectæ OA, FG. Inſuper per propoſitionem 11. lib. 1. ad punctum B ſemidiametri EB excitetur chorda LBM circuli facti ad angulos rectos ipſi EB, tùm etiam alia chorda IOK perpendicularis ſemidiametro EO, ad punctum O illius extremum: Chordæ illæ LBM, IOK, circulum datum tangent per coroll. prop. 16. huius libri; eritque ſemidiameter EC perpendicularis tangenti ACH, per prop. 18 lib. huius: Et quia ſemidiametri EC, EB, EO, circuli dati, ſunt perpendiculares æquales rectis tangentibus chordis ACH, IOK, LBM, ſingulæ ſuis proprijs, erunt ipſæ tangentes chordæ ACH, IOK, LBM, æqualiter diſtantes ab centro E circuli facti, per def. 4. libri huius, & per prop. 14. eiuſdem libri, erunt æquales inter ſe & per prop. 3. ſecabuntur omnes bifariàm in punctis proprijs C, O, B, medijs; vnde quadrata ſemiſſium illarum puta CA, OI, BL, æqualium erunt æqualia per coroll. 3. noſtrum prop. 46. lib. 1. vel rectangula ſub partibus illarum erunt æqualia quadrata per 2. coroll. prop. cit. 46. noſtrum. Denique diuiſa recta DB chorda biſariàm in P per prop. 10. lib. 1. & ducta recta EP ex E centro circuli, erit per prop. 3. lib. huius ad angulos rectos ipſi chordæ DB; & per eandem prop. erit tota chorda NDBA diuiſa bifariàm in puncto P: quare ex æqualibus PN, PA, ſi tollantur æqualia PB, PD, relinquentur per 3. axioma lib. 1. æqualia BA, DN: Et ſi his æqualibus DN, BA, addatur commune DB, fient æqualia BN, DA, per 2. axioma: ſimili ratione ſi æqualibus oſtenſis AO, EG, addatur commune OF, fient æqualia AF, OG: Quare rectangulum ſub AF, AO, erit idem atque ſub OG, AO: & rectangulum ſub AD, AB, erit idem atque ſub BN, AB. his conſtructis & declaratis ſequitur.

Demonſtratio. Aut recta ſecans data tranſit per E centrum circuli dati, qualis eſt recta AOEF, vel extra illud qualis eſt recta ABD. Si primum, Quādoquidem duæ rectæ AOG, IOK, in circulo exteriore facto ſe mutuò ſecant in puncto O, erit rectangulum ſub AO, OG, æquale rectangulo ſub IO, OK, vel quadrato rectæ IO per prop. 35. præced. lib. huius: Eſt autem oſtenſum quadratū rectæ IO æquale quadrato rectæ AC tāgētis; ergo per 1. ax. lib. 1. erit rectāgulū ſub AO, OG, vel quod idem

idem rectangulum ſub AF, AO, vti oſtendimus æquale quadrato tangentis AC. Si ſecundum: erit etiam rectangulum ſub AB, BN, æquale rectangulo ſub LB, BM, vel quadrato rectæ LB, per prop. cit. 35. Eſt autem oſtenſum quadratum rectæ LB eſſe æquale rectæ AC tangentis; ergo per 1. axioma lib. 1 rectangulum ſub AB, BN, vel quod idem eſſe oſtendimus, rectangulum ſub AD, AB, erit æquale quadrato rectæ AC tangentis, quomodo fuit propoſitum.

### COROLLARIVM I.

*Si à puncto quouis extra circulum aſſumpto plurimæ lineæ rectæ ſecantes circulum ducantur: rectangula comprehenſa ſub totis lineis, & partibus exterioribus, erunt inter ſe æqualia.*

Nam ſingula ſunt per præſentem propoſitionem æqualia quadrato tangentis circulum rectæ lineæ; ergo per 1. ax. lib. 1. erunt inter ſe æqualia omnia.

### COROLLARIVM II.

*Duæ rectæ lineæ ab eodem puncto extra circulum ſumpto ductæ, ipſum tangentes circulum, ſunt inter ſe æquales.*

Nam per præſentem propoſitionem earum quadrata ſingula ſunt æqualia rectangulo ſub tota ſecante recta linea circulum ipſum ducta ab eodem puncto dato, & ſub exteriore eius parte; ergo per 1. axioma, quadrata illarum tangentium erunt æqualia, ergo per coroll. 4. noſtrum prop. 46. lib. 1. ipſæ tangentes rectæ erunt æquales.

### COROLLARIVM III.

*Ab eodem puncto extra circulum ſumpeo, duci poſſunt tantum duæ rectæ lineæ quæ circulum tangant.*

Si enim plures duabus ducerentur, eſſent ad eaſdem partes ſecantis circulum per centrum ductæ rectæ ab eodem puncto dato extra circulũ, duæ rectæ lineæ ad conuexam circuli circumferentiam, æquales inter ſe, contra prop. 8. lib. 3. hoc abſurdum indicat non poſſe duci plures duabus tangentibus circulum ex puncto eodem extra ipſum dato.

### COROLLARIVM IV.

*Si duæ rectæ lineæ æquales ex puncto quopiam extra circulum ſumpto in conuexam eius circumferentiam incidant; & earum vna circulum tangat, altera quoque eum tanget.*

Nam ductis ad puncta incidentiarum illarum in circuli circumferentiam rectis ſemidiametris circuli æqualibus, reſultabunt triangula duo, contenta ſub rectis datis æqualibus, & his ſemidiametris æqualibus, & communi ſecante circulum ab puncto externo eodem dato ductæ ad centrum circuli; quare per prop. 8. lib. 1. anguli ſub illis datis æqualibus & ſemidiametris ductis erunt æquales; ſed vnus illorum qui eſt cum tangente data eſt rectus per prop. 18. lib. huius, ergo etiam alter erit rectus, ergo per coroll. prop. 16. lib. huius, circulum etiam tanget altera recta tangenti datæ æqualis.

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Si duo circuli fuerint concentrici, maior & minor; ductæ diametri maioris portiones inter circumferentias amborum circulorum erunt æquales.*

### COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Si duo circuli fuerint concentrici, maior & minor, ductaq; chorda ſecans ambos; portiones maioris chordæ, inter circumferentias amborum circulorum, erunt æquales.*

### COROLLARIVM NOSTRVM. III.

*Si duo circuli fuerint concentrici, maior & minor, ductaq; fuerit chorda ambos ſecans; chorda minoris addita cuilibet portioni chordæ maioris exiſtenti inter amborum circumferentias, æqualem rectam lineam facit, rectæ compoſitæ ex eadem chorda minoris, & alia portione maioris exiſtente inter amborum circumferentias.*

COROL-

Digitized by Google

## COROLLARIVM NOSTRVM.

## I V.

*Si duo circuli fuerint concentrici, maior & minor: recta omnes lineæ ducta tangentes minorem circulum, intercepta circumferentia maioris; ſunt inter ſe æquales.*

HÆc quatuor noſtra corollaria demonſtrata ſunt in conſtructione & apparatu ad demonſtrationem huius propoſitionis 36.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

## V.

*Dato rectangulo exhibere quadratum æquale alia ratione quàm per prop. 14. lib. 2. & corollarium noſtrum 3 prop. 35. libri huius.*

LAtus maius rectanguli dati, & minus ſimul in vna recta componantur, quæ ſecetur bifariàm, & puncto medio vt centro fiat circuli circumferentia interuallo ſemiſſis, quæ tranſibit per aliud extremum dicti lateris per 25. ax. lib. 1. tùm producto hoc latere ſumatur pars æqualis minori lateri ab extremitate vna dictæ prioris rectæ lineæ; & ab extremo puncto huius ſumptæ rectæ per 3. prop. lib. 1. ducatur per prop. 17. lib. huius recta linea circulum factum tangens: quadratum huius rectæ tangentis erit æquale rectangulo dato facto ex tota ſecante & parte illius inter circuli circumferentiam conuexam & punctum extremum totius factæ rectæ extra circulum ſitum iuxta hanc propoſitionem.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

## VI.

*Dato vni rectangulo æqualia infinita alia rectangula ſingula ſub diuerſis rectis lineis conſtituere, alia ratione quàm per corollarium noſtrum 2. propoſitionis 35. præcedentis.*

LAtus maius & minus rectanguli dati in vnam rectam componantur lineam bifariàm diuidendam per prop. 10. lib. 1. Tùm centro facto hoc medio puncto circulus fiat interuallo vnius extremi rectę diuiſæ qui trãſibit per aliud eius extremum, iuxta axioma 25. lib. 1. Præterea producta hæc diametro circuli addatur illi recta in directum æqualis minori lateri dati rectanguli per prop. 3. lib. 1. denique per prop. 17. lib. huius ab extremo huius rectæ additæ ſito extra circulum ducantur; tùm innumeræ rectæ lineæ ſecantes circulum factum: erunt per coroll. 1. huius prop. rectangula ſub totis ſecantibus & partibus proprijs ſitis inter punctum illud externum & conuexam circuli circumferentiam, æqualia inter ſe & dato rectangulo.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

## V I I.

*Dato vni quadrato æqualia conſtituere diuerſa rectangula ſub diuerſis rectis lineis, aliter quàm per corollarium noſtrum 4. propoſitionis 35. antecedentis.*

CIrculo deſcripto ex aliquo puncto vt centro, ducatur eius ſemidiameter, ex cuius extremo in circumferentia ſito excitetur recta linea perpendicularis ipſi ad vnam partem, per prop. 11. lib. 1. & ex qua per 3. prop. eiuſdem libri ſumatur recta æqualis dati quadrati lateri ab puncto anguli recti facti ſupra ſemidiametrum circuli: denique ab extremo alio huius ſumptæ rectæ ſito extra circulum ducatur recta ſecans circulum per centrum, & innumeræ aliæ ſecantes ipſummet circulum ad vnam partem ſecantis per centrum. Rectangula ſub iſtis ſecantibus totis & partibus illarum proprijs inter punctum dictum externum & circuli facti circumferentiam conuexam, erunt æqualia quadrato tangentis rectæ, hoc eſt quadrato dato, per prop. præcedentem: & quia rectæ illæ lineæ ſecantes ſunt diuerſæ & non æquales per prop. 8. lib. huius, ideo rectangula ſub illis diuerſis, & partibus dictis earum diuerſis, erunt diuerſa: & ſic fecerimus imperatum.

## PROPOSITIO XXXVII.

Si extra circulum ſumatur punctũ aliquod, ab eoque pũcto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; ſit autem quod ſub tota ſecante & aſſumpta exteriùs inter punctum & conuexam circumferentiam, comprehenditur rectangulum, æquale ei quod ab incidente deſcribitur quadrato: Incidens ipſa circulum tanget.

SVppoſitio. Extra circulum BCD, punctum A datum ſit, ex quo ducta ſit recta linea Fig. 115.

Fig.115. linea AC circulum attingens in C, & alia recta ABD ipſum ſecans in B & D punctis: ſitque rectangulum ſub ABD tota ſecante, & ſub BA portione eius inter punctum datum A & conuexæ circumferentiæ puncto B, circuli, æquale quadrato rectæ AC incidentis in circulum. Dico rectam AC tangere ipſum circulum.

Conſtructio. Centrum E circuli dati repériendum erit per prop.1.lib.huius: & ſi recta ſecans circulum tranſierit per illud E centrum circuli dati, qualis eſt AOEF; centro E, interuallo EA deſcribendus erit circulus, qui ſecabit in G productam ſecantem AOF vltra F: & per propoſitionem 11.lib.1. excitanda in O chorda IOK perpendicularis diametro OEF circuli dati, quæ per coroll. prop.16. lib.huius, circulum datum tanget. Quod ſi data recta ſecans ſit ABD, ex centro E circuli dati, interuallo eodem EA deſcribendus erit circulus ad cuius circumferentiam producendæ erunt duæ datæ rectæ lineæ, AC quidem vſque ad H, ABD verò ſecans vſque ad N. Denique ad ductam EB ſemidiametrum circuli dati, in eius extremo B, excitanda erit recta chorda LBM perpendicularis ipſi EB, quæ per coroll.prop.16.libri huius, circulum datum tanget in B; & per 3.prop.lib.huius bifàriàm diuidetur in B, ſicut recta IOK in O.

Demonſtratio; vtriuſque caſus. Primi quidem, quando recta ſecans data AOEF, tranſit per centrum E circuli dati. Imprimis erit recta OG, æqualis rectæ AOEF, per coroll.noſtrum 4.prop.præced. quare rectangulum ſub AF, & AO, erit idem atque ſub OG & AO: Eſt autem per prop.35.lib.huius rectangulum ſub OG, AO, æquale rectãgulo ſub rectis IO, OK, hoc eſt quadrato rectæ IO; & ex datis rectangulum ſub OG, AO, eſt æquale quadrato rectæ AC; igitur erunt per 1.ax.lib.1. æqualia quadrata rectarum IO, AC, ideoque per noſtrum 4.coroll.prop.46.lib.1. rectæ IO, AC, erunt æquales. Quod ſi concipiamus ductam rectam IE, ipſa erit æqualis ipſi EA, ex natura circuli: tunc verò in triangulis IOE, CAE, erunt duo latera IO, OE, relatiuè æqualia duobus lateribus AC, CE, baſeſque IE, AE, æquales; ergo per prop.8. lib.1. erunt anguli IOE, ACE, æquales; oſtenſus eſt rectus angulus IOE, ergo etiã angulus ACE rectus erit; ergo per coroll. prop.16. recta AC circulum datum tanget in C. Secundi verò caſus demonſtratio iſta erit. Per coroll. noſtrum 4. prop.præcedentis recta BN erit æqualis rectæ AD, ergo rectangulum ſub BN, AB, erit idem atque ſub rectis AD, AB: eſt autem per prop.35.lib.huius rectangulũ ſub BN, AB, æquale rectangulo ſub LB, BM, hoc eſt quadrato rectæ LB: datur verò rectangulum idem ſub BN, AB, æquale quadrato rectæ AC, ergo per 1.axioma lib.1. quadrata rectarum LB, AC, erunt æqualia, & per noſtrum coroll.4. prop.46.lib.1. ipſæ rectæ LB, AC, æquales. Fingamus inſuper animo ductam rectam LE quæ erit ex natura circuli æqualis rectæ EA: In triangulis LBE, ACE, duo latera LB, BE, erunt relatiuè æqualia duobus AC, CE, baſeſque LE, AE æquales; ergo per prop.8.lib.1. anguli LBE, ACE, erunt æquales; primus eſt rectus LBE, ergo ſecundus ACE rectus erit: ergo per coroll.prop.16.libri huius, recta AC circulum datum continget, ſicuti propoſitum fuit.

COM-

# COMMENTARIVS IN LIBRVM QVARTVM ELEMENTORVM GEOMETRICORVM EVCLIDIS.

## DEFINITIONES.

I.

*Figura rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur cùm ſinguli eius figura qua inſcribitur anguli, ſingula latera eius in qua inſcribitur, tangunt.*

II.

*Similiter, & figura circum figuram deſcribi dicitur, cùm ſingula eius qua circumſcribitur latera, ſingulos eius figura angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.*

III.

*Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cùm ſingule eius figura qua inſcribitur anguli, tetigerint circuli circumferentiam.*

IV.

*Figura verò rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cùm ſingula eius latera qua circumſcribitur, circuli circumferentiam tangunt.*

V.

*Similiter & circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cùm circuli circumferentia ſingula latera tangit eius figura cui inſcribitur.*

VI.

*Circulus autem circum figuram deſcribi dicitur, cùm circuli circumferentia ſingulos tangit eius figura quam circumſcribit angulos.*

VII.

*Recta linea in circulo accommodari dicitur, ſeu coaptari; cùm eius extrema in circuli circumferentiâ fuerint.*

VIII.

*Figura rectilinea plana regularis, eſt figura aquilatera rectilinea & equiangula.*

IX.

*Centrum figura plana rectilinea regularis, eſt punctum intra figuram ex quo ad angulos eius omnes, recta linea extenſa, ſunt aquales inter ſe.*

## PROPOSITIONES.

### PRIMA.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior.

Fig.116. SVppoſitio. In dato circulo CDE, ſit accommodanda recta linea æqualis datæ rectæ AB, quæ non ſit maior diametro circuli dati.

Conſtructio. Centro A, interuallo rectæ datæ AB, fiat circulus: & puncto aſſumpto quolibet C in circumferentia circuli dati, interuallo eiuſdem rectæ AB fiat alter circulus, cuius circumferentia ſecabit dati circuli circumferentiam in D, per axioma 26. lib. 1. quandoquidem recta AB datur minor diametro circuli dati. Dico rectam CD, nectentem

tem puncta C & D circumferentiæ circuli eſſe accomodatam in circulo dato, æqualem datæ A B.

Demonſtratio. Duo enim circuli facti eodem interuallo rectæ AB, ſunt æquales per def.1.lib.3. ideoque rectæ AB, CD ex centris illorum ad circumferentias proprias, æquales erunt. Sed recta C D, terminatur vtrimque in circumferentia circuli dati, in punctis eius C, & D; ergo per def.7.libri huius, erit accommodata in circulo dato, æqualiſque datæ, quod erat faciendum.

## PROPOSITIO II.

### In dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

Fig.117 SVppoſitio. In dato circulo ABC, inſcribendum ſit triangulum æquiangulum dato triangulo DEF.

Constructio. Per propoſitionem 31. lib.1. ex angulo E dati trianguli ducatur EG recta linea parallela baſi DF: & per noſtrum 1. coroll.prop.16.lib.3. ex aliquo puncto puta A, in circumferentia circuli dati ducatur recta A H tangens ipſum circulum: Et per prop. 23.lib.1.in puncto A, rectæ HA,fiat angulus HAC, æqualis angulo GEF;tū alter angulus fiat CAB, æqualis angulo FED. Imprimis recta AC ſecabit circulum,quia per 16.prop. lib.3. angulus contingentiæ HAC in circulo dato eſt minor angulo rectilineo HAC:ſimili ratione recta AB, ſecabit circulum. Iam verò ducta BC recta etiam ſecabit circulum per 2. prop. lib. 3. erit igitur triangulum BAC in circulo dato inſcriptum iuxta definitionem 3.huius libri.& Dico illud eſſe æquiangulum, Dato triangulo DEF.

Demonſtratio. Per prop.32. lib.3.angulus ABC æqualis eſt angulo HAC, ſed angulus HAC factus eſt æqualis angulo GEF,qui per prop.29. lib.1.æqualis eſt angulo EFD; ergo per 1.ax.lib.1. angulus ABC æqualis erit angulo EFD: ſed & per conſtructionem angulus CAB æqualis angulo FED; ergo per coroll.3.noſtrum prop.32.lib.1.reliqui duo anguli ACB, EDF,erunt æquales. Æquiangulum igitur triangulum BAC in circulo dato inſcriptum; dato triangulo DEF. Fecimus ergo imperatum.

## PROPOSITIO III.

### Circa datum circulum triangulum deſcribere, dato triangulo æquiangulum.

SVppoſitio. Circa datum circulum ABC, ſit deſcribendum triangulum dato triangulo DEF, æquiangulum. Fig.118

Conſtructio. Per prop. antecedentem, inſcribatur in circulo dato ABC, triangulum GHI, dato DEF triangulo æquiangulum; & ex centro K circuli dati quærendo per prop. 1.lib.3.deducantur per prop.12.lib.1.perpendiculares rectæ propriæ ad latera trianguli GHI, & producantur donec ſecent circumferentiam circuli dati, in punctis A, B, C: ex quibus per prop. 11. lib. 1. emittantur hinc & inde perpendiculares rectæ lineæ,ſemidiametris KB, KA, KC; hæ perpendiculares circulum datum tangent per coroll.prop.16.lib. 3. & ſe mutuò ſecabunt in punctis M, N, L productæ ſi opus ſit; nam ſi ducatur recta linea AB, efficiet versùs H, duos angulos acutos ad eaſdem partes H, vtpote partes angulorum rectorum in A & B priùs exiſtentium; quare versùs H in puncto M conuenient duæ perpendiculares rectæ: & ſic eodem modo probabimus conuenturas alias duas in L, & alias duas in N: Triangulum igitur habebimus LMN, quod dico eſſe circa circulum ABC datum deſcriptum, & æquiangulum dato triangulo DEF.

Demonſtratio. Latera LM, LN, NM, per conſtructionem tangunt circuli dati circumferentiam, ergo per def.4. lib.huius, triangulum LMN deſcriptum erit circa circulum datum. Quod ſi produceremus latus IH, trianguli GHI in circulo dato inſcripti, vltra H, ſecaret latus LM trianguli circa circulum ipſum deſcripti per ax.28.lib.1. Et quia ſemidiametri KA, KB, KC, ſunt perpendiculares lateribus inſcripti & circumſcripti triangulorum prædictorum propriis, erunt ipſa propria latera parallela per prop.28.lib.1. videlicet in exemplo latera duo LM, GH, parallela erunt, tùm alia duo IH, NM: ideoque per prop.29.lib.1.anguli LMN, LOI, erunt æquales; tùm etiam anguli LOI, GHI; ergo per 1.ax. lib.1. anguli LMN, GHI, æquales erunt; eſt autem per conſtructionem angulus GHI, æqualis angulo DEF, ergo per 1.ax. lib.1. anguli LMN, DEF, erunt æquales. Eodem artificio oſtendentur anguli D, L, æquales; tùm reliqui anguli F, N: æqui-

angulum ergo erit triangulum LMN, triangulo dato D E F.

## PROPOSITIO IV.

### In dato triangulo circulum inſcribere.

Fig. 122. SVppoſitio. In dato triangulo ABC ſit inſcribendus circulus.

Antequam accedamus ad explicationem huius propoſitionis quartæ præmittemus demonſtrationes trium lemmatum noſtrorum maximo vſui futurorum in ſequentibus & tota Geometria.

### PRIMVM LEMMA ERIT.

*Omnis angulus rectilineus bifariàm diuiſus per 9. propoſ. libr. 1. reſoluitur in duos acutos angulos rectilineos.*

NAm quicumque angulus rectilineus proponatur, vel rectus eſt, vel acutus, vel obtuſus. Si primum & ſecundum, certè eius duæ partes æquales erunt anguli minores recto ſinguli; atque ita probatum erit intentum in his duobus caſibus. Si tertium, niſi duo æquales anguli in quos reſoluitur angulus obtuſus, fuerint acuti ſinguli, erunt vel recti vel obtuſi; ergo ſi producatur alterum latus vltra angulum obtuſum datum eumque cum alio latere efficiens, tres illi anguli rectilinei ſupra latus productum ſeu lineam rectam, erunt maiores duobus rectis, contra corollarium noſtrum 2. ad propoſ. 13. lib. 1. Relinquitur igitur, vt omnis angulus rectilineus bifariàm diuiſus, reſoluatur in duos angulos acutos rectilineos.

### ALTERVM LEMMA NOSTRVM.

*Figurarum omnium planarum æquilaterarum & æquiangularum, ſi duo anguli ſe mutuò conſequentes bifariàm ſecentur per prop. 9. libr. 1. rectæ lineæ eos diuidentes concurrent intra figuram in vnum punctum, quod erit centrum circuli eas circumſcribentis.*

Fig. 119. SVppoſitio. Sit figura regularis ſextilatera æquilatera & æquiãgula ABCDEF duoq; eius anguli FAB, ABC, ſe mutuò conſequentes, vel inſiſtentes eidem lateri AB, bifariàm ſecentur per rectas duas, quæ dictos angulos reſoluent in duos acutos ſingulos angulos per propoſ. 1. præcedentem; quæque ideo per axio. 13. lib. 1. ſupra rectam AB; concurrant ergo ſi fieri poſſit primùm in angulum C immediatè ſequentem figuræ datæ: Verùm quia recta BGC diuidens angulum ABC bifariàm diuerſa eſt ab latere BC, quod concurrit in C, cum recta BC, & ambæ exeunt ab eodem puncto B, duæ rectæ lineæ ſpatium comprehendent, contra axioma 14. libr. 1. abſurdum hoc, indicat rectas illas ſecantes dictos angulos non concurſuras ad angulum C immediatè conſequentem alterum è diuiſis angulis.

Eſto ſi fieri poſſit concurrant in H punctum ex intermediis lateris BC immediatè ſequentis latus AB cui inſiſtunt dicti anguli diuiſi; eodem modo ſequetur rectam BH, & BIH, diuerſas, ſpatium comprehenſuras contra citatum axio. lib. 1. 13. quare non concurrent in punctum vllum ex intermediis lateris prædicti BC.

Eſto concurrant ad angulum D, ſi fieri poſſit, ita vt vnus angulus C ſit intermedius inter alterum è diuiſis, & alterum concurſus prædicti: Tunc verò quia duo anguli DAB, DBA, ſunt æquales, vtpote datorum æqualium angulorum dimidia, erunt per 6. prop. lib. 1. latera AD, BD, æqualia: Præterea quia in triangulis DAB, DBC, duo anguli DAB, DBC ſunt æquales, quia æqualium dimidia ſunt, & duo latera DA, AB, ſunt æqualia duobus lateribus DB, BC, relatiuè; erunt per 4. propoſ. lib. 1. baſes eorum DB, DC, æquales; ideoque per 5. propoſ. lib. 1. anguli DCB, DBC, æquales, indiuiſus DCB, & dimidium æqualis illius, videlicet angulus DBC, contra 8. axio. lib. 1. abſurdum hoc condemnat poſitionem iſtam falſitatis.

Eſto ſi fieri poſſit concurrant dictæ rectæ lineæ in punctum K lateris CD, ita vt ſit vnum latus BC intermedium; ſimili ratione ac diſcurſu, ſequetur angulum KCB indiuiſum & æqualem diuiſo ABC, eſſe æqualem dimidio KBC diuiſi, contra 8. axio. cit. falſa igitur iſta poſitio.

Eſto etiam ſi fieri poſſit concurrant ad vnum angulum D figuræ datæ, ita vt ex vna vel duabus partibus, multi interſint anguli figuræ datæ inter diuiſum, & angulum concurſus, quales ſunt duo E & F, inter A diuiſum, & D concurſus, ex vna ſolum parte, (quod enim dicturi ſumus de iſta parte, applicandum in altera ſi adeſſent multi anguli huiuſmodi intermedij:) Tunc ex angulo D, concurſus ad angulum F figuræ immediatè ſequentem diuiſum A, ducta recta linea, DF; probabuntur per 6. propoſ. lib. 1. latera æqualia

æqualia DA, DB, ob angulorum æqualium diuiſorum ſemiſſes æquales: & quia in triangulis DAB, DAF, angulos æquales DAB, DAF, habentibus, factos ab lateribus DA, AB, æqualibus ipſis DA, AF, erunt baſes DF, DB, æquales, anguliq́ue eorum DBA, DFA æquales,per 4. prop. lib. 1; ſed angulus DBA eſt ſemiſſis vnius anguli figuræ datæ, ergo angulus DFA erit etiam ſemiſſis anguli EFA figuræ datæ, qui eſt æqualis cuilibet angulo figuræ dato; relinquetur ergo angulus EFD æqualis cuilibet ſemiſſi angulorum æqualium figuræ datæ: (& ſic deinceps erit faciendum ac demonſtrandis de huiuſmodi angulis, ducendo rectas ab angulo D conuerſus ad alios immediatè ſequentes angulos, donec perueniamus ad vnum angulum ſic diuiſum, inter quem & angulum concurſus D, ſolum mediet vnus angulus figuræ datæ indiuiſus:) ponamus autem nos deueniſſe ad huiuſmodi angulum F: Porrò probabuntur huiuſmodi omnes rectæ ab angulo D concurſus ductæ ad angulos figuræ datæ, eſſe æquales interſe per citat. 6. propoſ. libr. 1. ob angulos eis oppoſitos demonſtratos æquales: Ergo cùm in triangulis huiuſmodi EFD, DFA, ſint anguli circa F, æquales, nimirum ſemiſſes totalis EFA, & latera eos continentia æqualia, videlicet EF, FD, & EF, FA, erunt per 4. propoſ. lib. 1. anguli eorum E, & FAD, æquales; indiuiſus, & pars dimidia diuiſi æqualis indiuiſo, contra axioma 8. libr. 1. quod abſurdum accuſat falſitatis poſitionem iſtam.

Eſto inſuper ſi fieri poſſit punctum L concurſus in aliquo latere figuræ datæ, puta DE, ad vnam, vel ambas partes, ſint alia multa latera inter latus concurſus, & latus AB cui inſiſtunt anguli diuiſi, & ducatur recta LF ad immediatè ſequẽtem angulum ab vno è diuiſis: Iam verò cùm in triangulis LAB, LAF, ſint anguli ad A æquales per diuiſionem anguli FAB totalis in duos æquales, & latera circa hos angulos æqualia, erunt per 4. prop. lib. 1. LFA, LBA, æquales, ſed vltimus LBA eſt dimidium anguli ABC totalis, ergo etiam angulus LFA erit dimidiũ anguli EFA æqualis totali ABC; quare reliquus angulus LFE erit æqualis angulo LFA; (& ſic deinceps traducendæ erunt rectæ ab L ad reliquos angulos figuræ ſi adſint ad eandem partem, donec traducta ſit vna, v. g. LF, ita vt vnus angulus E, figuræ datæ ſit intermedius inter punctum L, & angulum diuiſum per rectam ab L ductam vltimo loco, nam probabuntur ſemper æquales anguli modo prædicto relicti ab altero, angulis dimidiis prædictis totalium figuræ.) hoc poſito, Cùm in triangulis EFL, LFA, anguli ad F, ſint æquales, comprehenſi ab lateribus LF, FE, æqualibus ipſis LF, FA, lateribus, erunt per 4. propoſ. libr. 1. anguli E, & LAF, æquales, indiuiſus ac dimidium æqualis indiuiſo: hoc abſurdum manifeſtam reddit falſitatem huius poſitionis.

Sed eſto duæ illæ rectæ diuidentes duos angulos illos æquales figuræ datæ æquilateræ & æquiangulæ coeant ſi fieri poſſit extra figuram ipſam. quod multos caſus etiam habebit poſitio iſta, quos vocabimus poſitiones particulares ſub iſta vniuerſali diuerſa ab præcedente vniuerſali diuiſa in multas. Fig. 120

Eſto igitur primò ſi fieri poſſit punctum M concurſus prædicti extra figuram, ita vt duæ rectæ lineæ AM, BM, diuidentes biſariàm duos angulos datos ſecent latus BC immediatè ſequens aliud latus AB cui inſiſtunt duo anguli diuiſi: verum quia recta BSRM diuidens angulum ABC debet ſaltem ſecundum partẽ aliquam ſui exiſtere inter duo latera BC, BA, angulum diuiſum ABC ab illa, comprehendentia, v. g. ſecundum ſuam partem BS, & latus BC ſecat in R; duæ rectæ BR, BSR, ſpatium continebunt, contra 14. axioma libri primi abſurdum hoc condemnat falſitatis hanc primam poſitionem.

Eſto ſecundò ſi fieri poſſit, duæ rectæ prædictæ coeant in N, extra figuram ipſam, ſecentq́ue idem latus CD, quod non ſit immediatum lateri AB, cui inſiſtunt duo diuiſi anguli, verum vnum ſolum interſit inter ſectum & illud AB; ducaturq́ue recta NC, ex qua & recta BN, & latere BC, triangulum reſultabit BCN: Iam verò in triangulis NBA, NBC, duo anguli ad B, ſint æquales, & latera eos comprehendentia æqualia, erunt per 4. propoſ. libr. 1. anguli NAB, NCB, æquales, diuiſi anguli pars, & indiuiſo BCD maior, contra 8. axioma libr. 1. abſurdum hoc indicat falſam eſſe iſtam poſitionem.

Eſto tertiò ſi fieri poſſit punctum concurſus in O, ita vt recta BO incedat per angulum D, inter quem & diuiſum B, medius ſit vnus angulus C, & alia recta AO ſecet latus ED; ducaturq́ue recta OC quæ non ſit in directum lateris DC, ſed cum illo & DO portione BDO, triangulum efficiat ODC: In triangulis OBA, OBC, cùm anguli in B ſint æquales ex datis, & latera circa illos æqualia; erunt per 4. propoſ. libr. 1. anguli OAB, OCB, æquales, ſemiſſis diuiſi & maior diuiſo, contra 8. axioma libr. 1. quod abſurdum condemnat hanc poſitionem tertiam falſitatis.

Eſto quartò ſi fieri poſſit punctum concurſus in P, ita vt duæ rectæ AP, BP, latus vnum E D ſecent, inter quod & latus AB cui inſiſtunt anguli diuiſi, medient multa latera figuræ datæ non ſecta ab illis rectis diuidentibus; ducanturque rectæ ex P ad extrema laterum intermediorum prædictorum, v.g. PC, PD: Iam verò, quandoquidem triangula PBA, PBC, angulos habent ex datis circa B æquales, comprehenſos ab lateribus æqualibus, habebunt per propoſ.4. libr. 1. angulos PAB, PCB, æquales; quare reliquus angulus P C D erit ſemiſſis totius anguli DCB, vt angulus PCB eſt ſemiſſis illius æqualis angulo PAB qui eſt dimidium anguli F A B æqualis angulo BCD: Præterea cùm triangula PCB, PCD, angulos habeant ad C æquales, contentos ab æqualibus lateribus, obtinebunt per citat. propoſ.4. libr.1. angulos PDC, PBC æquales, dimidium diuiſi, & maior diuiſo, contra 8.axioma lib.1. quod abſurdum indicat repugnare rationi hanc quartam poſitionem: Notandum verò eſt quod ſi plura latera intercederent inter AB, & ſectum ab diuidentibus rectis, ductiſque rectis ab puncto concurſus ad extrema illorum; ſemper argumentationem debere fieri in conſequentibus trianguli, vti fecimus in vno ſolum intermedio PBC, donec ad vltimum PCD deueniamus, ex quo abſurdum propalatum conſequitur.

Eſto quintò ſi fieri poſſit, punctum concurſus in Q, ita vt rectæ ſecantes angulos, QA, QB, ſecent latus vnum puta ED, & ex puncto Q ad aliquam partem recta ducta ad F angulum vnum immediatum ab diuiſis angulis, ſit in directum lateris FE vnius ex duobus complectentibus angulum dictum F: Tunc quoniam in triangulis Q A B, Q A F, duo anguli ad A ſunt æquales, contenti ab æqualibus lateribus, erunt per propoſ.4. lib. 1. anguli F, & QBA, æquales; indiuiſus F, & ſemiſſis QBA, diuiſi ABC æqualis ipſi indiuiſo F; contra idem axioma 8. libr. 1. quod cùm ſit falſum, falſa erit etiam hæc poſitio vnde procedit.

Igitur cùm oſtenderimus ſecundùm omnes poſitiones ſeu caſus duas rectas lineas bifariàm diuidentes duos angulos figuræ rectilineæ regularis immediatos, concurſuras in vnum punctum ſupra latus cui inſiſtunt illi duo anguli diuiſi; & non poſſe exiſtere illud punctum in vllo puncto extremorum figuræ datæ rectilineæ regularis, & neque extra figuram: ſupereſt vt punctum illud concurſus ſit intra figuram ipſam. Nunc verò probandum hoc punctum concurſus eſſe centrum circuli circumſcribentis ipſam figuram rectilineam regularem. Atque hoc erit loco ſecundæ propoſitionis.

Eſto T punctum concurſus duarum rectarum AT, BT, diuidentium bifariàm angulos duos dictos F A B, CBA, intra figuram regularem rectilineam ſitum: ex quo ad reliquos angulos C, D, E, F, rectæ ducantur. Imprimis per propoſ. 6. libr. 1. rectæ TA, TB, æquales erunt, ob angulos TAB, TBA, æquales. Præterea, quia in triangulis TBA, TBC, ſunt anguli ad B æquales, & latera circa illos æqualia; erunt per 4. propoſ. libr. 1. baſes TC, TA, æquales; ideoque tres rectæ T A, T B, T C, æquales per 1. axioma libr. 1. ſed & ex diſcurſu facto & propoſ.4. cit. anguli TCB, TAB, erunt æquales; qui detracti ab æqualibus B C D, AFE, remanebunt æquales anguli T C D, TFE, dimidij totorum dictorum, vt erant ablati. Ex his principiis oſtendentur reliquæ omnes rectæ lineæ ex T tranſmiſſæ ad angulos figuræ, eſſe æquales inter ſe, & prædictis; & omnes angulos figuræ diuidi bifariàm ab rectis ductis ad illos ex puncto prædicti concurſus. Quare circulus factus centro T, interuallo cuiuſuis è dictis rectis æqualibus, incedet ſua circũferentia per extrema omnia dictarum linearum, videlicet per angulos figuræ regularis datæ iuxta 25. axio. libr. 1. ipſamque figuram circumſcribet, per defin. 6. libri huius.

Notandum quod facillima erit demonſtratio huiuſmodi in triangulo æquilatero & æquiangulo, ob pauciſſimos angulos eius & latera. Difficilior verò ſeu longior in plurium laterum vel angulorum figuris regularibus; non ita longa in figuris regularibus paucorum laterum & angulorum.

## TERTIVM LEMMA NOSTRVM.

*Diuiſis duobus angulis cuiuſcumque rectilinei trianguli bifariàm, iuxta 9. propoſ. lib. 1. duæ rectæ lineæ illos diuidentes concurrent intra datum triangulum.*

Exempli gratia diuiſi ſint anguli CAB, CBA, trianguli ABC, bifariàm iuxta propoſitionem 9. lib. 1. Dico duas rectas ſingulos angulos diuidentes concurrere in D punctum vnum ex interioribus trianguli dati. Fig.121.

Imprimis enim quia per prop. 17. lib. 1. duo quilibet anguli cuiuſcũq; triãguli sũt minores duobus rectis, duæ rectæ lineæ eos diuidentes bifariàm

biſariàm efficient duos internos angulos ſupra rectam AB, cui inſiſtunt duo anguli diuiſi, multò magis minores duobus rectis; ergo per axioma 13. libr. 1. concurrent illæ duæ rectæ diuidẽtes ſupra latus A B. Verùm ſi non concurrant vti aſſerimus, concurrent ſi fieri poſſit in E punctum vnius è lateribus, puta BC; vel in reliquum angulum C; vel extra triangulum in K. Non primum, nam recta BFE diuidens angulum ABC, cùm intra anguli ABC latera AB, BC, incedere debeat, perueniens ad E punctum lateris BC, concluderet cum recta BE, figuram, contra 14. axioma lib. 1. Sed neque ſecundum, nam rectæ AGC, BHC, ſimiliter ob rationem allatam, ſpatium includerent ſingulæ cum rectis AC, BC, propriis, communia extrema obtinentibus, contra idem axioma. Sed neque tertium, nam eodem modo recta BIL, figuram includeret cum recta BL, hæc abſurda manifeſtam reddunt falſitates poſitionum illarum trium: relinquitur ergo vt duæ illæ rectæ concurrant in D, intra triangulum datum ABC, ſicuti propoſitum fuit.

Ex demonſtratione huius propoſitionis tertiæ, ſequitur, vt ſi diuidanrur duo anguli quicumque, trianguli cuiuſcumque ſiue biſariàm ſiue nõ biſariàm, rectas duas lineas eos diuidentes concurſuras intra triangulum datum. Eadem enim demonſtratio allata in hac propoſitione vltima applicanda erit, ex qua concludetur intentum.

Sequitur ſecundò ex demonſtratione ſecundæ propoſitionis, in figuris regularibus rectilineis, ſi diuidantur biſariàm quilibet duo earum anguli non immediati, per prop. 9. lib. 1. per rectas lineas, eas coituras in vnum punctum internum figuris niſi in vnam confluant, quod erit centrum circuli eas circumſcribentis, ex quo ad reliquos angulos figuræ ſi ducantur rectæ lineæ, ipſas etiam æquales inter ſe eſſe & aliis duabus coeuntibus: Quod ſi in vnam cõfluant rectam, diuiſa tota ab angulo ad angulum biſariàm, per prop. 10. libr. 1. punctum diuiſionis medium eſſe centrum dicti circuli, & rectas ab eo ductas ad reliquos angulos eſſe æquales inter ſe & ſemiſſibus totius diuiſæ. Nam per 4. prop. lib. 1. probabuntur illæ rectæ omnes ex illo puncto ad omnes angulos æquales, & omnes anguli ad latera figurarum æquales ſemiſſes totorum figurarum datarum; ideoque ex illo puncto circulo deſcriptus vti centro tranſibit per extrema dictarum rectarum æqualium, ſeu per angulos omnes figurarum dictarum regularium.

Has verò propoſitiones tres, referemus tanquam corollaria noſtra ad hanc propoſitionem tertiam, eritque prima corollarium noſtrum 2; ſecunda tertium; Tertia quartum: & in conſequentibus iſta ſolùm corollaria noſtra citabimus, non autem propoſitiones. Hoc monere placuit, ne Geometriæ ſtudioſos confunderemus. Veniamus ergo ad conſtructionem.

Conſtructio. Per propoſ. 9. lib. 1. diuidantur biſariàm duo trianguli dati anguli quilibet, v.g. BAC, BCA, rectis AD, CD, quæ concurrent in D, intra triangulum, per propoſitionem 3. præmiſſam, eo quod iam duo anguli diuiſi ſint minores ſimul ſumpti duobus rectis per propoſ. 17. lib. 1. idque per axioma 13. lib. eiuſdem 1. Tùm ex puncto D, per propoſ. 12. lib. 1. demittantur rectæ lineæ perpendiculares DG, DF, DE, ad latera ſingula trianguli dati propria. Dico autem circulum factum centro D, interuallo cuiuſlibet ex iſtis rectis perpendicularibus, v.g. DG, inſcriptum eſſe in triangulo dato ABC. Fig. 128

Demõſtratio. In triangulis duobus DGC, DFC, cõmune eſt latus DC, & anguli DFC, DGC recti ſunt æquales per 12. axioma lib. 1. tùm anguli DCF, DCG, per conſtructionem æquales; ergo per propoſ. 26. lib. 1. rectæ DF, DG erunt æquales. Eodem modo in triangulis DEA, DGA, anguli in A ſunt æquales per conſtructionem, tùm anguli in E & G recti æquales, & latus DA commune; ergo per citat. prop. 26. lib. 1. rectæ DE, DG, erunt æquales: probauimus autem rectas DF, DG, eſſe æquales; ergo per 1. axioma lib. 1. erunt tres rectæ lineæ DE, DF, DG, æquales: igitur per axioma 25. libr. 1. circuli deſcripti circumferentia, centro D, interuallo DG tranſibit per extrema E, F, reliquarum duarum DE, DF. Ergo quia ſemidiametris DE, DF, DG, ſunt perpendicularia latera trianguli dati, ſingula ſuis propriis, ſingula tangent circulum datum per corollarium propoſ. 16. lib. 3. & ſic per defin. 5. lib. huius circulus factus inſcriptus erit triangulo dato ABC. Fecimus ergo imperatum.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Si trianguli duo anguli biſariàm ſecentur per rectas lineas quæ concurrent in vno puncto, ex quo ad reliquum angulum recta ducatur, ipſum biſariàm diuidet: & rectæ lineæ perpendiculares ad latera trianguli ipſius, erunt æquales.*

IN triangulo ABC, duo anguli A & C, diuiſi ſint biſariàm per rectas AD, CD, concur-

concurrentes in punctum D, vti oſtendimus in conſtructione præcedentis demonſtrationis: ex quo demittantur ad latera ſingula duo efficientes angulum tertium ABC, propriæ rectæ perpendiculares DE, DF, per propoſit. 12. libr. 1. & ducatur recta DB: Dico angulum ABC diuiſum eſſe bifariàm ab recta DB. Cùm enim ſint duo triangula rectangula DEB, DFB; erunt tàm ex vna parte per propoſ. 47. libr. 1. quadrata rectarum DE, EB, ſimul æqualia quadrato rectæ DB; quàm ex alia parte, quadrata rectarum DF, FB, ſimul ſumpta, æqualia quadrato rectæ DB: ergo per 1. axioma lib. 1. illa duo quadrata, erunt æqualia iſtis duobus quadratis; auferendo ergo quadrata æqualia, æqualium rectarum DF, DE oſtenſarum in demonſtratione propoſitionis, relinquentur per 3. axioma lib. 1. quadrata æqualia rectarum EB, FB; & ipſæ æquales rectæ erunt per noſtrum 4. corollarium propoſit. 46. libr. 1. In eiſdem ergo triangulis quia latera BE, BD, ſunt æqualia relatiuè lateribus BF, BD, baſeſque DE, DF, ſunt æquales; erunt per 8. propoſit. lib. 1. anguli EBD, FBD, æquales. quod erat oſtendendum.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Omnis angulus rectilineus bifariàm diuiſus, per 9. propoſit. libr. 1. reſoluitur in duos angulos acutos rectilineos.*

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Figurarum omnium planarum æquilaterarum & æquiangularum, ſi duo anguli ſe mutuò conſequentes bifariàm ſecentur, per propoſ. 9. lib. 1. recta linea eos diuidentes, concurrent intra figuram in vnum punctum, quod erit centrum circuli eas circumſcribentis.*

## COROLLARIVM NOSTRVM IV.

*Diuiſis duobus angulis cuiuſcumque rectilinei trianguli bifariàm, iuxta propoſ. 9. libr. 1. duæ rectæ lineæ illos diuidentes, concurrent intra datum triangulum.*

## COROLLARIVM NOSTRVM V.

*Si diuidantur quilibet duo anguli cuiuſcumque trianguli, ſiue bifariàm ſiue non bifariàm: rectæ lineæ ducta eos diuidentes, concurrent intra triangulum datum.*

## COROLLARIVM NOSTRVM VI.

*In figuris regularibus rectilineis, ſi diuidantur bifariàm quilibet duo earũ anguli non immediati, per prop. 9. lib. 1. per rectas lineas: ipſa concurrent in vnum punctum internũ figuris, niſi in vnam confluant rectam; quod erit centrũ circuli eas circumſcribentis & ipſarum, ex quo ad reliquos angulos recta ducta linea, erunt æquales inter ſe, & dictis coeuntibus. Quod ſi duæ rectæ illæ confluant in vnam rectam; punctum eius medium reperiendum per propoſ. 10. libr. 1. ab angulis diuiſis intercepta, erit etiam centrum circuli, ex quo reliqua prædicta euenient: eruntq́; circumſcriptibiles circulis.*

## COROLLARIVM NOSTRVM. VII.

*Centrum circuli circumſcribentis figuram quamcumque regularem, eſt intra ipſius aream.*

Nam diuiſis eius duobus angulis immediatè ſequentibus, bifariàm per propoſition. 9. libr. 1. concurrent duæ rectæ lineæ ipſos diuidentes, intra ipſam figuram, per corollarium noſtrum tertium quodque punctum erit centrum circuli figuram datam circumſcribentis iuxta idem coroll. Ergo notum erit iſtud corollar.

## COROLLARIVM NOSTRVM VIII.

*Circuli circumſcribentes figuras planas æquales & ſimiles rectilineas; ſunt æquales.*

Ipſæ enim figuræ, congruent per axioma 9. lib. 1. quare angulorum plurium quàm duorum, puncta plura quàm duo communia habebunt, circuli illas circumſcribentes: igitur congruent iſti circuli & æquales erunt per coroll. noſtrum ad prop. 24. lib. 3.

PRO-

## PROPOSITIO V.

### Circa datum triangulum circulum deſcribere.

Fig. 123 SVppoſitio circa datum triangulum ABC, ſit deſcribendus circulus. Vel quod idem eſt ſit circumſcribendum circulo datum triangulum ABC.

Conſtructio. Elige in triangulo dato maiorem angulum ſiue vnum ex maioribus illius, v.g. ABC: & ad extrema A, & C, laterum efficientium dictum angulum ABC, non concurrentia cum dicto angulo, erige rectas lineas perpendiculares ſingulis lateribus BA, BC, propria; quæ per axioma 13. lib. 1. concurrent in punctum E ad partes oppoſitas dicto angulo electo; (nam recta AC, factos angulos rectos duos diuidit, remanentque ad partes E duo interni anguli partes duorum illorum rectorum, ideoque minores illis.) Tùm ex puncto E ad punctum B, recta EB ducatur, hoc eſt ex puncto E ad angulum electum B: & per prop. 10. lib. 1. biſariàm in D, recta linea BE diuidatur. Dico circumferentiam circuli factam centro D, interuallo DE, vel DB, circumſcripturam triangulum datum ABC.

Demonſtratio. Reſultant enim per conſtructionem duo triangula rectangula EAB, BCE, communem habentia baſim EB, oppoſitam angulis rectis factis: igitur per coroll. noſtrum prop. 33. libr. 3. quandoquidem dicta baſis EB, diuiſa eſt biſariàm in D, circuli facti centro D, interuallo DE; vel DB, circumferentia tranſibit per puncta A B C, AEB; ideoque per definitionem 6. libri huius, circulus factus triangulum datum circumſcribet.

Data opera diximus eligendum eſſe in triangulo dato angulum maiorem vel vnum è maioribus, ad effugiendum vnum caſum qui Tyrones perturbare poſſet: videlicet in triangulo primæ figuræ rectangulo, ſi ab extremis punctis B & C, laterum AB, AC, efficientium angulum BAC acutum, praxim traditam ad vſum reducere vellent; turbarentur dùm duos perpendiculares BC, CG eductas ipſis lateribus proprias, ſe mutuò ſecare in C puncto extremo lateris AC aduerterent; vel vnam ex his perpendicularibus eductam concurrere cum vno ex lateribus dati trianguli, videlicet BC. Nihilominùs conſequemur idem intentum, nam recta ducta AC, ex puncto ſectionis mutuæ perpendicularium BC, CG, ad angulum BAC electum, diuiſa biſariàm in D, centrum D, circuli exhiberet deſcribêdi centro D, interuallo DC, vel DA. Tunc, verò ſignum eſſet triangulum datum eſſe rectangulum, quando vna ex perpendicularibus prædictis concurreret cum vno è lateribus dati trianguli, ex ipſa conſtructione: vel recta ex puncto ſectionis mutuæ perpendicularium ad angulum electum, concurreret cum vno è lateribus angulum electum efficientibus, vt in exemplo figuræ primæ, recta CA quæ concurrit cum latere CA. Quibus conſideratis & animaduerſis, quicumque angulo aſſumpto trianguli dati, praxis noſtra vniuerſalis erit, & demonſtratione allata confirmata. Quod ſi rectangulum triangulum daretur circumſcribendum circulo, tunc ſeruandum erit coroll. cit. noſtrum, propoſ. 33. lib. 3.

#### COROLLARIVM.

*Si circuli centrum incidat in vno latere trianguli dati, angulus huic oppoſitus lateri erit rectus, & triangulum rectangulum. Si verò incidat intra triangulum, ipſum erit acutangulum. Si denique extra triangulum; ipſum erit obtuſangulum.*

HÆc omnia manifeſta ſunt per propoſit. 31. libr. 3. nam angulus in ſemicirculo rectus eſt, & in ſegmento maiore quàm ſemicirculus eſt acutus, & in ſegmento minore obtuſus: quare centrum circuli rectangulum triangulum circumſcribentis, erit in latere illius ſubtenſi angulo recto, acutangulum verò intra ſegmenta illa ideoque intra ſuam aream propriam, obtuſangulum verò intra ipſum triangulum vtpote intra ſegmentum maius cui inſiſtit angulus obtuſus.

## PROPOSITIO VI.

### In dato circulo quadratum deſcribere.

SVppoſitio. In circulo ABCD inſcribendum ſit Quadratum. Fig. 124.

Cōſtructio. Quæratur per prop. 1. lib. 3. eius centrum E, per quod ducatur diameter circuli BED; & per prop. 30. lib. 3. ſinguli ſemicirculi arcus, biſariàm ſecentur, vnus in A, alter in C, & recta linea AC ducatur, punctaque A & C, iungantur cum punctis B & D, rectis lineis AB, AD, CA, CD: Dico quadrilaterum

ABCD, rectilineum inſcriptum in circulo dato iuxta def.3.lib. huius, eſſe quadratum; ideoque inſcriptum in circulo dato.

Demonſtratio. Arcus quatuor BA, AD, DC, CB, ſunt æquales, per axio.7.lib.1. quia ſunt æqualium BAD, BCD, ſemicirculorum ſemiſſes, ergo per prop.29.lib.3. chordæ quatuor AB, AD, DC, CB, illorum erunt æquales: Duo autem anguli BAD, BCD, ſunt in ſemicirculo, ergo recti per propoſ. 31. libr. 3. ſunt verò per propoſ.22. libr. eiuſdem 3. duo alij anguli ABC, ADC, duobus rectis æquales; & quia in triangulis ABC, ADB, latera AB, BC, ſunt oſtenſa æqualia lateribus AD, DC, baſimque habent communem AC, erunt per 8. propoſ.libr. 1. anguli ABC, ADC, æquales inter ſe; ideoque recti quia ſunt oſtenſi æquales duobus rectis. Rectilineum igitur quadrilaterum ABCD in dato circulo inſcriptum erit quadratum per def.29. lib. 1.

## PROPOSITIO VII.

### Circa datum circulum, quadratum deſcribere.

Fig.125. SVppoſitio. Sit deſcribendum quadratum circa circulum ABCD datum.

Conſtructio. Per prop.1. libr.3. quæratur E centrum circuli dati, & per illud ducatur diameter BED, ad cuius extrema B, D, excitentur vtrimque rectæ lineæ perpendiculares FBH, GDI, ipſi diametro BD, per prop.11. lib.1.& per 3.ſecentur ex illis rectæ lineæ BF, BH, DG, DI, æquales ſemidiametro BE; quæ per 1. axioma lib.1. erunt æquales inter ſe, & totæ duæ FBH, GDI, æquales per 2. axioma lib.1. addendo æqualibus æquales; quæque erunt parallelæ per propoſ.28.lib.1.ob angulos rectos in B & D: quare ſi ducantur rectæ FG, HI, ipſæ etiam erunt æquales & parallelæ per propoſ.33.lib.1. efficientque cum aliis duabus quadrilaterum FGIH, rectilineum quod aſſero eſſe quadratum circumſcribens datum circulum.

Demonſtratio. Rectæ BF, DG ſunt æquales & parallelæ per conſtructionem, ergo rectæ FG, BD, erunt æquales & parallelæ per propoſ.33. lib.1. ideoque per 34. lib.eiuſdem anguli in F & G erunt recti, vti alij in B & D; & per eandem propoſ.34. anguli etiam in H & I, erunt recti, ſicut in F & G: tùm per eandem propoſ.34. latera FG, BD, æqualia erunt, & etiam HI, ideoque per 1. axioma libr. 1. quia quatuor latera quadrilateri facti, ſunt æqualia diametro BED, erunt æqualia inter ſe, ergo per defin. 29.lib.1. erit quadratum FGIH. Probandum denique illud ſuis lateribus quatuor circulum contingere, vt eum circumſcribat. Ex centro E circuli, educatur recta linea hinc & inde parallela lateri HF, ſitque CEA, producenda ſi opus ſit donec ſecet & circuli circumferentiam, & latera FG, HI: reſultabunt rectangula HE, BA, per 2. noſtrum lemm. præmiſſum lib. 2. quare per 34. propoſ. lib.1. rectæ BF, AE, erunt æquales, tùm BH, EC. Iam peto an recta FG circulum tangat in A, vel ipſum ſecet, aut extrema circulum tranſeat: Non tertium, nec ſecundum, nam cùm BF ſit poſita æqualis ſemidiametro EA, & BF, BK ſint æquales per 34. propoſ. cit.lib.1. eſſent pars & totum EA, EK æquales rectæ per 1. axioma lib.1. contra 8.ax. lib.eiuſdem. Primum ergo erit quod volumus. Eodem modo oſtendemus rectam HI, contingere circulum datum: & alia duo ipſum contingunt per conſtructionem & corollarium prop.16.li.3. ergo per 4.defin.lib. huius, quadratum deſcriptum circumſcribet circulum datum.

## PROPOSITIO VIII.

### In dato quadrato circulum deſcribere.

SVppoſitio. In dato quadrato FGIH, ſit circulus inſcribendus. Fig.125.

Conſtructio. Quadrati latera duo HF, HI, bifariàm ſecentur in B & C, per propoſ. 10. lib. 1. & per propoſ. 31. lib. eiuſdem ducantur rectæ parallelæ, CA ipſi HF, & BD ipſi HI, ſe mutuò ſecabunt in E, quia ſi fingatur recta ducta BC, diuidet angulos rectos in B & C, in alios acutos, quorum duo erunt ad partes E centri circuli, quare per axioma 13. lib. 1. coibunt rectæ prædictæ in E; & exurgent quadrata BA, EG, HE, CD, per lem.2. libr.2. æqualia ob rectas HC, HB, æquales, cùm ſint æqualium ſemiſſes. Dico autem circulum deſcriptum ex E centro, interuallo cuiuſlibet rectæ EA, EB, EC, ED, quadrati latera dati tangere, ideoque inſcriptum eſſe in dato quadrato, iuxta def.3.lib.huius.

Demonſtratio. quandoquidem quadrata BA, EG, HE, CD, ſunt æqualia oſtenſa, erunt per 4.coroll.noſtrum prop.46. libr.1. rectæ lineæ EA, EB, EC, ED, æquales, ideoque per 25.ax. libr.1. circumferentia circuli deſcripti ex E centro, interuallo rectæ EA, tranſibit per extrema reliquarum EB, EC, ED: ſed ob

rectos

rectos angulos in A, B, C, D, latera quadrati dati tangent circulum per coroll. propoſ.16. lib.3. ergo circulus AB CD factus tanget latera quadrati dati, ergo per def.5. libr. huius inſcripſerimus in dato quadrato circulum.

## PROPOSITIO IX.

### Circa datum quadratum, circulum deſcribere.

Fig.124. Svppoſitio. Circa datum quadratum ABCD, propoſitionis ſextæ ſit circulus deſcribendus.

Conſtructio. Ducantur in quadrato duæ diagonales rectæ AC, BD, ſe mutuò ſecantes in E. Dico circulum deſcriptum centro E, interuallo EA, vel EB, vel EC, vel ED, quadratum datum circumſcribere.

Demonſtratio. Per 5. noſtrum coroll. prop. 32. lib.1. diagonalis recta AC, diuidit angulos A & C, in duos ſemirectos æquales; tùm etiam recta BD, angulos B & D. Anguli in D & C & B & A, ſunt æquales, vtpote ſemirecti oſtenſi; ergo per prop.6. lib.1. Et axioma 1. rectæ EA, EB, EC, ED, erunt æquales, & per axioma 25. circuli circumferentia deſcripta centro E, interuallo EA, tranſibit per angulos quatuor A, B, C, D, ideoque per defin. 6. libri huius, circumſcribet datum quadratum A B C D, quod erat faciendum & oſtendendum.

## PROPOSITIO X.

### Iſoſceles triangulum conſtituere, quod habeat vtrumque eorum qui ad baſim ſunt angulorum, duplum reliqui.

Fig.126. Constructio. Recta linea AB eligatur ſecanda in D per 11. propoſ. libr. 2. ita vt rectangulum ſub AB, tota, & BD, minore ſegmento ſit æquale quadrato AD maioris ſegmenti: Tum per prop.22. lib.1. ex tribus rectis iſtis AB, AB æqualibus, & AD, fiat triangulum BAC, quod erit iſoſceles, & ducatur recta DC: & triangulum ADC circumſcribatur circulo ADC, per prop.5. lib. huius. Dico triangulum iſoſceles BAC, habere quemlibet angulorum ſuorum ad baſim BC, duplum reliqui anguli A.

Demonſtratio. Quia rectangulum ſub AB, BD, æquale eſt quadrato rectæ BC, ipſa BC tanget circulum ABC in C, per prop. 37. lib. 3. & per 32. angulus DAC æqualis erit angulo BCD: ſed per prop. 32. lib. 1. angulus BDC æqualis angulis A & DCA; ergo per 1. axioma libr. 1. erit idem angulus BDC æqualis angulis BCD, DCA, & breuius toti angulo BCA; ſed per propoſ. 5. libr. 1. eidem angulo BCA, æqualis eſt angulus CBA; ergo duo anguli B & CDB, erunt æquales per 1. axioma lib. 1. ideoque per 6. propoſ. libr. eiuſdem duo latera BC, DC erunt æqualia: ſed BC poſitum eſt æquale ipſi DA; ergo per 1. axioma citat. erunt duo latera AD, DC æqualia, & per prop. 5. lib. 1. anguli A & DCA, æquales. Oſtendimus autem angulum BDC eſſe æqualem duobus angulis A & DCA, ergo erit duplus anguli A, ideoque etiam per 1. axioma citat. angulus B duplus anguli A, & etiam angulus ACB, duplus eiuſdem anguli A. Oſtendimus ergo & fecimus imperatum.

### COROLLARIVM.

*Trianguli huius tres anguli ſunt æquales quinque quintis duorum rectorum; & angulus minor, vna eſt quinta duorum rectorum; & quilibet ad baſim, duæ quintæ duorum rectorum.*

Svnt enim per 32. prop. libr. 1. tres anguli ſimul æquales duobus rectis: ergo quia iuxta hanc propoſitionem debet eſſe quilibet angulorum ad baſim duplus reliqui: diuidendi erunt duo anguli recti in quinque partes, quarum vnam angulus A minor, & quilibet ad baſim continebit duas quintas.

## PROPOSITIO XI.

### In dato circulo quinquelaterum æquiangulum & æquilaterum inſcribere.

Constructio. Per 1. propoſ. lib. 3. reperi centrum F circuli: & ducta ſemidiametro FA illius, fac per propoſ. 23. lib. 1. ad punctum F, ſemidiametri AF, angulum AFB æqualem angulo ad baſim trianguli iſoſcelis habentis ad baſim ſingulos angulos duplos reliqui ad verticem, conſtruendi per prop. 10. præcedentem: tùm idem punctum F rectæ BF, fac per eandem prop. 23. alium angulum BFC, æqualem eidem angulo prædicto; & ſic deinceps fac numero quinque angulos æquales prædicto angulo in puncto ſeu centro F: circumferentia circuli dati diuiſa erit in quinque arcus æquales quibus inſiſtût Fig.127.

prædicti

prædicti anguli quinque ęquales,iuxta corollarium noſtrum propoſ. 26. libr. 3. & quia omnes anguli in puncto vno ſunt æquales quatuor rectis, per corollarium 2. propoſ. 15. lib. 1. & per corollarium propoſ. præcedentis 10. quilibet angulorum ad baſim eſt $\frac{3}{5}$ duorum rectorum; quinque anguli facti erunt $\frac{10}{5}$ duorum rectorum, hoc eſt quatuor recti diuiſi in quinque angulos æquales. his verò quinque arcubus æqualibus circuli dati, reſpondebunt ducendæ chordæ, quæ quinquelaterum æquilaterum conſtituent. Dico autem illud etiam eſſe æquiangulum & æquilaterum & in dato circulo inſcriptum.

Demonſtratio. eius omnes angulos radit circumferentia circuli dati, ergo erit per definit. 3. huius libri in circulo dato inſcripti: ſed iam æqualiterum oſtendetur: Æqualibus arcubus oſtenſis quinque AB, BC, CD, DE, EA, reſpondebunt chordæ quinque illud efficientes æquales per corollarium noſtrum propoſitionis 29. libr. 3. ergo æquilaterum erit: Sed & per 5. propoſition. libr. 1. anguli ad baſes ſingulorum quinque, in centro circuli verticem habentium communem, æquales erunt: Præterea illa triangula cùm latera habeant æqualia ab centro F circuli ad circumferentiam eius, contineantque angulos æquales per conſtructionem, anguli ad baſes eorum ſeu latera quinquelateri facti, æquales erunt relatiuè, qui in triangulis ſingulis oſtenſi ſunt æquales; per 1. ergo axioma libr. 1. erunt omnes æquales inter ſe ad baſes omnium: duo ergo ſimul ſumentes viciniores, efficient quinque totales æquales facti quinquelateri, quod ideo æquiangulum erit.

### COROLLARIVM.

*Quilibet angulus quinquelateri æquilateri & æquianguli continet tres quintas duorum rectorum.*

Fig. 127 CVm enim in vno è triangulis baſes habentibus latera quinquelateri dicti in circulo inſcripti, & verticem in centro circuli, angulus in centro per conſtructionem contineat duas quintas duorum rectorum, & alij ad baſim ſint æquales anguli oſtenſi, quilibet illorum æquiualebit ſeſquialteræ parti duorum rectorum, quandoquidem per 32. propoſ. libr. 1. anguli tres cuiuſlibet trianguli ſint æquales duobus rectis. Similiter in alio triangulo huiuſmodi philoſophandum erit: ergo duo huiuſmodi anguli, videlicet FAB, FBE, efficientes angulum BAE quinquelateri dicti, continebunt tres quintas duorum rectorum, nam bis ſeſquialtera pars duorum rectorum, ſunt tres quintæ eorundem.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si in quinquelatero circulo inſcripto, æquiangulo & æquilatero, ſemidiametri circuli ducantur ab centro circuli ad angulos dicti quinquelateri, fient anguli ad baſes ſeu latera prædictæ figuræ, omnes æquales.*

HOc in fine demonſtratum fuit.

## PROPOSITIO XII.

### Circa datum circulum, quinquelaterum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

SVppoſitio. Sit circumſcribendus quinquelatero æquilatero & æquiangulo circulus ABCDE. Fig. 127.

Conſtructio. Quæratur F centrum circuli dati per propoſ. 1. libr. 3. & per præcedentem propoſitionem inſcribatur in eo quinquelaterum ABCDE æquilaterum & æquiangulum: ductiſque in eo ſemidiametris circuli ad angulos illius quinque, videlicet rectis FA, FB, FC, FD, FE, æqualibus ex natura circuli, excitentur ad extremitates harum quinque ſemidiametrorum, rectæ lineæ hinc & inde perpendiculares illis per prop. 11. lib. 1. harũ duæ viciniores ſemper concurrent per ax. 13. lib. 1. quia ad partes exteriores circuli efficiunt cũ lateribus quinquelateri inſcripti, duos angulos acutos ſeu partes rectorum angulorum factorum: v. g. perpendicularis GEL, & KDL, efficient angulos duos DEL, EDL, minores duobus rectis FEL, FDL. Et quia ſunt numero quinque, efficiẽt quinquelaterum GHIKL: Quod dico eſſe circumſcriptum circulo dato æquilaterum & æquiangulum.

Demonſtratio. Imprimis, quia quinque latera GH, HI, IK, KL, LG, quinquelateri facti ſunt perpendicularia ſuis propris ſemidiametris circuli dati, per ipſam conſtructionem; tangent circulum per coroll. prop. 16. lib. 3. & ſic erit quinquelaterum circumſcribens circulum datum iuxta def. 4. lib. huius. Et quia anguli omnes ad baſes quæ ſunt latera quinquelateri inſcripti in circulo per prop. præcedentem

dentem ſunt æquales inter ſe facti ab illis baſibus, & ſemidiametris circuli, per coroll. noſtrum ad prop. præced. ſi eos angulos demamus ab rectis angulis in A, B, C, D, E, factis, relinquentur per 3. ax. lib. 1. anguli omnes æquales facti ab lateri bus quinquelateri inſcripti, & circũſcripti. Quare in ſingulis triangulis quinque AGE, ELD, DKC, CIB, BHA, latera erãt circa angulos reliquos æqualia per 6. prop. lib. 1. & quia in eiſdem omnibus triangulis duo sũt anguli prædicti æquales, vterque vtrique, & baſes prædictæ æquales videlicet latera quinquelateri inſcripti in circulo, erunt per prop. 26. lib. 1. latera reliqua æqualia omnia, & reliqui anguli in G, H, I, K, L, æquales; vnde æquiangulum erit quinquelaterum circumſcribens circulum datum. Denique ſi coniũgamus duo latera circa angulos rectos in A, B, C, D, E, oſtenſa æqualia, v.g. AG, AH ſimul; & alia duo EG, EL, & ſic de aliis; fient per 2. axio. lib. 1. prædicta latera quinque GH, HI, IK, KL, quinquelateri prædicti æqualia, vnde erit æquilaterum. Fecimus ergo & oſtendimus propoſitum.

### COROLLARIVM.

*Si in circulo quæcumque figura æquilatera & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares; hæ conſtituent aliam figuram totidem laterum & angulorum æqualium circulo circumſcriptam.*

EOdem artificio proportionali demonſtrabitur, quo in quinquelatero æquilatero & æquiangulo propoſitionis huius, circulum datum circumſcribente factum eſt, in omnibus aliis figuris æquilateris & æquiangulis.

## PROPOSITIO XIII.

### In dato quinquelatero æquilatero & æquiangulo, circulum inſcribere.

Fig. 127. SVppoſitio. In quinquelatero æquilatero & æquiangulo H I K L G, ſit inſcribendus circulus.

Conſtructio. Duo anguli IHG, HGL, bifariàm ſecentur per prop. 9. lib. 1. per rectas GF, HF, quæ per axioma 13. lib. 1. concurrent in F ad partes intra figuram datam; per coroll. 6. noſtrum ad prop. 4. lib. huius. Iam verò ex puncto F, demittantur ad latera quinquelateri dati per prop. 12. lib. 1. ſuæ propriæ perpendiculares FA, FB, FC, FD, FE, quæ cadent ſemper intra triangula quinquelateri dati reſoluti in triangula quinque ductis rectis ab F ad eius angulos ſingulos, per coroll. noſtrum 1. ad prop. 32. lib. 1. Has verò quinque perpendiculares probo eſſe æquales. Nam in triangulis GAF, GEF, quia latus habent commune GF, & angulos rectos in A & E æquales, & angulos circa G æquales per conſtructionem, erunt perpendiculares duæ FA, FE, æquales, tùm latera GA, GE, æqualia, per prop. 26. lib. 1. ideoque ſi ab æqualibus lateribus GH, GL, demamus æquales partes, GA, GE, relinquentur AH, EL, æquales. Sed etiam in triangulis duobus HAF, HBF, habemus latus commune HF, & angulos in A & B rectos, & alios circa H æquales per conſtructionem, ſimili ratione, rectæ perpẽdiculares FA, FB, æquales, tùm etiã latera HA, HB, per cit. prop. 26. lib. 1. Et quia in triangulis HAF, LEF, oſtendimus latera HA, AF, eſſe æqualia lateribus relatiuè LE, EF, anguloſque rectos continere æquales, ideo per 4. prop. lib. 1. anguli ELF, AHF, erunt æquales; ſed iſte eſt per conſtructionem ſemiſſis anguli figuræ datæ, ergo alter erit ſemiſſis anguli ELK figuræ, reliquus ergo angulus DLF, erit ſemiſſis eiuſdem angulis, & æqualis alteri ELF per 7. ax. lib. 1. Cùm ergo in triangulis FEL, FDL, latus ſit FL commune, & anguli in E & D æquales, tùm anguli circa L, erunt per cit. 26. prop. lib. 1. perpendiculares rectæ FE, FD æquales, & latera EL, LD æqualia: ablatis ergo his æqualibus lateribus EL, LD, ab æqualibus GL, LK, relinquentur æquales rectæ EG, DK, per 3. ax. lib. 1. Et quia in triangulis FDK, FEG, habemus duo latera FE, EG, æqualia relatiuè lateribus FD, DK, anguloſque continent æquales, erunt per 4. prop. lib. 1. anguli EGF, DKF, æquales, ideoque tam iſte IKL, quam ille HGL, diuiſus erit bifariàm per rectam FK. Denique quia in triangulis FDK, FCK, vnum latus eſt commune, & anguli in C & D recti, & alij duo circa K æquales, erunt per prop. 26. lib. 1. rectæ lineæ perpendiculares FD, FC, æquales; ideoque omnes per 1. ax. lib. 1. æquales inter ſe prædictæ perpendiculares: Dico autem circulum factum centro F, interuallo cuiuſlibet ex dictis perpendicularibus rectis, puta FA, inſcriptum eſſe in dato quinquelatero.

Demonſtratio. Circulus factus centro F, interuallo rectæ FA, tranſibit per axioma 25. lib. 1. per A, B, C, D, E, extrema rectarum æqualium oſtenſarum FA, FB, FC, FD, FE; & quia ſunt illæ ſemidiametri circuli facti, & ad eas ſunt perpendicularia latera quinquelateri dati,

dati, per conſtructionem, in earum extremitatibus, latera iſta quinque figuræ datæ circulum deſcriptum tangent, per coroll. propr. prop. 16. lib. 3. ergo per def. 5 lib. huius, circulus in dato quinquelatero æquilatero & æquiangulo inſcriptus erit.

## COROLLARIVM NOSTRVM

*Si figuræ rectilineæ æquilateræ & æquiangulæ duo anguli bifariàm diuidantur per rectas lineas non confluentes in vnam, & ex puncto concurſus illarum demittantur rectæ lineæ perpendiculares ad latera figuræ erunt æquales inter ſe.*

Demonſtratio huius corollarij manifeſta, eſt ſi in omnibus figuris æquilateris & æquiangulis diſcurſus factus applicetur. Quo ad vltimam partem attinet, facilè explicabitur: nam in triangulis omnibus rectangulis, perpendiculares rectæ ſint oſtenſæ æquales deductæ ex puncto concurſus prædicto ad latera;& portiones laterum, ſimul cum prædictis perpendicularibus, angulos rectos continentibus, etiã æquales oſtenſæ; erunt per prop. 4. lib. 1. rectæ lineæ ex illo cõcurſu ductæ ad angulos figuræ datæ, æquales inter ſe.

## PROPOSITIO XIV.

### Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum, circulum deſcribere.

Fig. 127. Sυppoſitio. Sit circa pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE, circulus deſcribendus.

Conſtructio. Duo eius quilibet anguli ABC, BAE, bifariàm iuxta prop. 9. lib. 1. diuidantur per rectas FA, FB, concurrentes in puncto F, per coroll. 6. noſtrum ad prop. 4. Dico circulum factum centro F, & interuallo FA, vel FB, circũſcripturum figuram datam.

Demonſtratio. Si concipiantur ductæ rectæ ex puncto F, ad reliquos angulos quinquelateri, erunt per prop. præcedentis corollarium noſtrum, æquales inter ſe omnes, & ductis FA, FB: ergo per ax. 25. lib. 1. circulus deſcriptus centro F, interuallo cuiuſlibet FA, vel FB, circumferentia illius incedet per extrema reliquarum æqualium, videlicet B, E, D, C, quæ ſunt etiam cum A, anguli datæ figuræ quinquelateræ: ergo per def. 6. lib. huius, circulus factus circumſcribet figuram ipſam datam.

## PROPOSITIO XV.

### In dato circulo ſexilaterum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

Constructio. Circuli dati quæratur per prop. 1. lib. 3. centrum G, ex quo ad circumferentiam circuli ducatur ſemidiameter eius GA, & in puncto G huius ſemidiametri fiant per prop. 23. lib. 1. ſex conſequentes anguli æquales vni angulo cuiuſcumque trianguli æquilateri: continebuntur autem tot anguli circa centrum G; nam per coroll. 3. prop. 32. lib. 1. quilibet angulus trianguli æquilateri eſt vna tertia pars duorum rectorum; & omnes anguli circa vnum punctum æquiualent quatuor rectis, per coroll. 2 prop. 15. lib. 1. ergo ſex huiuſmodi tertiæ partes duorum rectorum, efficient quatuor rectos. Porrò producantur latera efficientia illos ſex angulos æquales vſque ad circuli dati circũferentiam. Dico chordas ſex ductas iſtorum ſex arcuum quibus inſiſtunt dicti anguli ſex æquales in centro G circuli dati, efficere ſexilaterum æquilaterum & æquiangulum in circulo dato inſcriptum. Fig. 128.

Demonſtratio. Imprimis illud ſexilaterum in circulo inſcriptum erit per def. 3. libri huius, quia eius ſex anguli in circuli circumferentia exiſtunt. Et quia anguli ſex in centro G, per conſtructionem ſunt æquales, ſex arcus totius circuli quibus inſiſtunt, æquales erunt per coroll. noſtrum prop. 26. lib. 3. ideoque per coroll. noſtrum prop. 29. lib. eiuſdem, chordæ ſex illis arcubus ſubtenſæ æquales erunt; vnde ſexilaterum erit æquilaterum. Et quia ſemidiametri ductæ ab centro G ad circumferentiam circuli ſunt ex natura illius æquales, efficientes triangula ſex, baſes habentia chordas dictas æquales, ipſa erunt triangula iſoſcelia, quare eorum anguli ad baſes ſeu chordas in ſingulis triãgulis erunt æquales per prop. 5. libr. 1. Inſuper quia per prop. 32. libr. 1. tres anguli cuiuſcumque trianguli ſunt æquales duobus rectis, & in ſingulis dictis triangulis ſex, angulum in centro poſuimus vnam tertiam duorum rectorum; reliqui duo anguli æquales in ſingulis illis triangulis ſex, erunt etiam vna tertia duorum rectorum ſinguli: Si duos ergo viciniores angulos æquales coniungamus, fient totales anguli ſex ſexilateri ſcripti & æquilateri oſtenſi, æquales videlicet ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB; ideoque etiam æquiangulum erit ſexilaterum inſcriptum.

COROL-

## COROLLARIVM.

*Sexilateri æquilateri & æquianguli latus eſt æquale ſemidiametro circuli circumſcribentis illud ſexilaterum.*

OStendimus enim ſex triangula angulos oppoſitos lateribus ſexilateri dicti in centro circuli habentia, in quæ reſoluitur ſexilaterum illi circulo inſcriptum, habere ſingulos angulos tàm in vertice quam baſes, æquiualētes vni tertiæ parti duorum rectorum, proptereaque æquales erunt in ſingulis triangulis illis anguli: ergo per coroll. prop. 6. lib. 1. ſingula illa triangula erunt æquilatera: horum verò duo latera ſunt ſemidiametri circuli, ergo reliqua hoc eſt latera dicti ſexilateri, erunt etiam æqualia ſemidiametro circuli, quod erat deducendum ex demonſtratione huius propoſitionis.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Semidiameter circuli ſexies conſecutiuè accomodata in circulo, efficit ſexilaterum æquilaterum & æquiangulum in eo inſcriptum.*

SI enim talem figuram non efficerent, rueret demonſtratio allata propoſitionis præſentis, quod abſurdum eſt. efficietur igitur ex poſitis in hoc corollario, propoſitum.

## COROLLARIVM NOSTRVM. I I.

*Sexilaterum æquilaterum & æquiangulum, reſoluitur in ſex triangula æquilatera & æqualia, ductis ab centro eius rectis ad angulos illius.*

*Et reliquæ omnes figuræ regulares ſimili modo in triangula iſoſcelia æqualia & æquiangula tot numero diuiduntur, quot latera obtinent ipſæ figuræ, per rectas ab centris earum ad angulos earum ductas, quæ ipſos angulos biſariàm diuidunt; & prædictorum triangulorum anguli omnes in centris ſunt æquales inter ſe.*

NAm per deſ. 9. libri huius rectæ lineæ ductæ ab centro cuiuſlibet figuræ regularis ad angulos eius, ſunt æquales; triangula igitur reſultantia habentia baſes latera ipſius figuræ regularis erunt iſoſcelia; totque erunt dicta triangula, quod baſes diuerſæ, ergo tot numero, quod baſes ſeu latera figuræ cuiuſlibet datæ regularis. Inſuper quia omnia dicta triangula cuiuſcumque figuræ regularis duo latera obtinent æqualia, nempè rectas ab eius centro ad eius angulos, baſeſque habent æquales, videlicet latera æqualia ipſius figuræ regularis, erunt anguli omnes illorum triangulorum in centro figuræ, æquales per prop. 8. libr. 1. & per eius coroll. tota æqualia inter ſe, & anguli ad latera æquales inter ſe per 5. prop. libr. 1. & reſpectiuè æquales etiam inter ſe, per cit. corollar. quare ipſa dicta triangula erunt æqualia inter ſe, & æquiangula, ductæque ipſæ rectæ ab centro ad angulos figuræ, eos diuident biſariàm. Verum in ſexilatero regulari cùm omnes anguli ſint æquales, & æquiualentes octo angulis rectis per corollar. noſttum 7. ad propoſ. 32. libr. 1. vnus eorum æquiualebit vni recto & tertiæ parti, quique diuiſus biſariàm, erit $\frac{2}{3}$ vnius recti: Iam verò conſiderando vnum è triangulis ſexilateri regularis in quæ reſoluitur modo prædicto, duos angulos habebit æquales ad latus, quodlibet ipſius ſexilateri ex dictis, qui ſimul erunt $\frac{4}{3}$ vnius recti, ſeu vnus rectus & $\frac{1}{3}$ recti; demendo autem duos ſimul angulos ab duobus rectis quibus ſunt per prop. 32. libr. 1. æquales tres anguli cuiuſcumque trianguli, relinquentur pro angulo in centro $\frac{2}{3}$ vnius recti; & ſic tres anguli cuiuſcumque trianguli in quæ reſoluitur ſexilaterum regulare modo prædicto, erunt æquales inter ſe, hoc eſt ſinguli erunt $\frac{2}{3}$ vnius recti; dicta igitur triangula cùm ſint æquiangula, & ſingula obtineant ſuos angulos æquales, erunt per coroll. propoſ. 6. libr. 1. æquilatera. probauimus ergo hoc corollarium.

## PROPOSITIO XVI.

### In dato circulo quindecimlaterum & æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

COnſtructio. In circulo dato inſcribatur per prop. 11. lib. huius, quinquelaterum æquilaterum & æquiangulum ABCDE: & per prop. 15. ab puncto A, inſcribatur etiam in eodem circulo ſexilaterum AFGHIK: Dico chordam arcus CG, repetitam quindecies accomodatam ſubinde in circulo dato, efficere propoſitum. Fig. 128.

Demonſtratio. Ponamus enim totam circuli dati circumferentiam diuiſam eſſe in quindecim arcus æquales, talium quinque comprehendent duo arcus AF, FG, æquales per 28. prop. lib. 3. ablatos ab chordis æquali-

bus duabus AF, FG, ſexilateri inſcripti per conſtructionem, tùm etiam talium ſex continebunt arcus duo continui AB, BC, æquales per citat. propoſ. 28. ablatos ab chordis æqualibus duabus AB, BC, quinquelateri inſcripti per conſtructionem: Ergo ſicuti differentia inter ſex & quinque, eſt vnitas; ita etiam ſex arcus AB, BC, æquales, & quinque AF, EG, æquales ex æqualibus quindecim, erit vnus arcus è quindecim, videlicet GC: Eius ergo chorda GC accõmodata in circulo dato quindecies ſubinde, quindecim illis arcubus æqualibus in quos tota circumferentia diſtributa ſuppoſita eſt, quindecimlateram figuram in dato circulo inſcriptam repræſentabit per def. 3. libr. huius. Et quia arcus illi quindecim ſunt æquales, latera huius quindecimlateri erunt æqualia per propoſ. 29. libr. 3. Denique quia anguli figuræ huius exiſtunt in ſegmentis duorum arcuum & illis quindecim æqualibus compoſito, ipſa ſegmenta erunt per 2. axioma lib. 1. æqualia ratione arcuum; quare anguli omnes figuræ prædictæ per propoſ. 27. lib. 3. erunt æquales. Inſcripſimus ergo in circulo dato figuram quindecimlateram æquilateram & æquiangulam.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I.

*Ex data circuli circumferentia, & dato in ea puncto; abſcindere arcum æqualem dato arcui in eiuſdem circuli circumferentia.*

Centro vno extremò dati arcus, interuallo vſque ad aliud extremum, fiat circulus vel arcus: & puncto dato in circumferentia circuli dati, interuallo eodem prædicto, fiat alterius circuli circumferentia vel arcus ſecans dati circuli circumferentiam. Dico hunc arcum circuli dati acceptum ab puncto dato in eius circumferentia inter hoc punctum & ſectionis circulorum factæ, eſſe arcum æqualem dato. Nam per def. 1. libr. 3. circuli facti erunt æquales, ideoque eorum ſemidiametri æquales, videlicet chordæ factorum circulorum, quæ ideo per propoſ. 28. lib. 3. ſubſternentur æqualibus arcubus, dato & facto, fecimus ergo imperatum.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I I.

*Ex dati circuli circumferentia, & dato in ea puncto abſcindere arcum æqualem dato arcui in alterius circuli dati circumferentia æqualis alteri iam dato.*

Centro vno extremo dati arcus, & interuallo vſque ad aliud extremum eius, fiat circulus: & eodem interuallo fiat circulus centro puncto dato in alterius circũferentiam circuli dati ſecans eandem circũferẽitam in alio puncto. Dico arcum interceptum inter punctum datum & ſectionem factam, eſſe æqualem dato arcui in alterius circuli illi æqualis circumferentia: Nam per def. 1. lib. 3. circuli facti erunt æquales, ideoque chordæ arcuum dati, & facti, æquales, quia eorum ſunt ſemidiametri, quæ per prop. 28. lib. 3. auferent arcus æquales in circulis datis æqualibus. Arcum ergo fecimus æqualem dato.

COM-

# COMMENTARIVS
## IN
# LIBRVM QVINTVM EVDOXI
## ET
# EVCLIDIS,
## ELEMENTORVM GEOMETRICORVM.

# DEFINITIONES.

QVIA Eudoxus & Euclides huius libri Authores, ex ipſis definitionum & propoſitionum terminis de magnitudinibus agunt, quas augeri ac minui in ratione data poſſe ſupponunt axiomate vnico, licet modum id præſtandi in ſingulis magnitudinum generibus ſubordinatis non tradiderint, ſed ſolum quædam præmiſerit Euclides de lineis rectis in primo libro, petitione prima, & propoſitione tertia; ideò Commentarores omnes vſi ſunt in exemplis, ſolis lineis rectis, non autem aliis etiam lineis curuis v. g; imo multò minùs ſuperficiebus & corporibus, quia nulla hactenus fundaměta huiuſmodi magnitudines augendi ac minuendi præmiſſa ſunt: Quin etiam cenſeo, ſi talia principia eorum omnium generum ac ſpecierum iacta fuiſſent, eos facilitatis maioris gratia Tyrones erudiendi, vſuros fuiſſe potiùs in exemplis linearum rectarum ductibus, quàm curuarum, vel ſuperficierum corporumve delineationibus.

Nemo igitur miretur ſi conſultò propter hunc eundem finem vtar in exemplis variis numerorum characteribus cõſultis; non quod propterea in hoc libro de numeris præcipuè agi cenſeam: Sed quia faciliùs proponuntur quam rectam lineæ diuerſæ longiores ac breuiores; præmonens me intelligere in numeris vel ipſos, vel magnitudines quaſcumque comparabiles multiplicatas, vel toties repetitas, quot ſunt vnitates in numeris propoſitis. Et licet ſciam inter magnitudines comparabiles innumeras eſſe, quarum reſpectus ad inuicem nullo numero exprimi poſſit, vel communi menſura commenſurari; & propoſitiones multas huius libri communes eſſe illis magnitudinibus incommẽſurabilibus, & aliis commenſurabilibus communi aliqua parte minore tanquam menſura, quæ numero aliquo deſignari poſſit, & relatio inter illas: nihilominùs adhuc in illis propoſitionibus data opera numerorum paradigmatibus vtar facilitatis ac breuitatis propoſitæ gratia; quia ſaltem adaptari poſſunt vni generi magnitudinum commẽſurabilium, licet alteri incommenſurabilium conuenire nequeant: Verùm rationes proferendæ inter demonſtrandum, vtrique generi commẽſurabilium & incommenſurabilium magnitudinum competent; quod neceſſarium eſt ad propoſitionis vniuerſalis demonſtrationem, non autem exemplum, in quo vti prouerbium receptum eſt, non neceſſariò requiritur omnimoda veritas. Quare ſi quis error ſit corrigendus præmonitus ab Magiſtro, vitio ei verti non debet. Præpoſiti autem characteres alphabetici numeris ipſis indicant terminos vniuerſales, quibus

adiungi poſſunt quilibet alij numeri pro exemplis. Quod ſi in multis exemplis vtamur ſolum illis notis alphabeticis ſine numeris, ſignum eſſe volumus nos abſtrahere ab magnitudinibus & numeris, tùm magnitudinibus commenſurabilibus & incommenſurabilibus. his præmonitis ad explicationem definitionum Authorum huius libri,& noſtras deſcendo, quas ad intelligentiam huius libri & aliorum iudicaui neceſſarias. Et ne confuſio oriatur inter eas, ſub duplici titulo noſtras proponam, primarum, & ſecundarum in duabus digreſſionibus ſuo loco proprio interiectis: Authorum verò definitiones conſequentibus numeris dabimus, licet illis duabus noſtris digreſſionibus interrumpantur. Sit igitur Authorum huius libri Definitio

I.

*Pars, eſt magnitudo magnitudinis minor maioris, cùm minor metitur maiorem.*

QVandoquidem pars alicuius totius eſt pars, dicit relationem ex ſua natura ad ſuum totum: Ergo quia de magnitudinibus tractatur in hoc libro, Pars alicuius magnitudinis totalis definitur per relationem ad magnitudinem cuius pars eſt. Et quia totum maius eſt ſua parte per axioma vniuerſale 8. libr. 1. ideò in hac definitione inuoluitur tota magnitudo ſub nomine maioris; & ſub nomine minoris, pars, quæ eſt etiam magnitudo, licet minor reſpectu maioris cuius eſt pars. Particulæ autem, cùm minor metitur maiorem, deſignant differentiam eſſentialem partis, quæ debet maiorem magnitudinē, cuius eſt pars metiri, intelligendo adæquatè & perfectè; ita vt nihil ſuperſit in maiore magnitudine quod non metiatur perfectè, & cui non adæquatur. Quod ſi aliquid ſupereſſet cui non reſpōderet iſta pars veluti menſura; minor iſta magnitudo reſpectu maioris dimenſæ, nō diceretur pars, ſed partes vti explicabimus in definitione tertia definitionum noſtrarum primarum in prima digreſſione. Porrò pars pluries debet metiri ſuum totum, nec ſufficit ſi illam ſemel metiatur adæquatè; ſic etenim pars non erit, ſed magnitudo æqualis dimenſæ. Præterea cùm pars ex def. cit. 8. lib. 1. ſit minor toto ſuo, quis æqualem magnitudinem alteri concipere poterit partem illius? Confirmatur ex primis particulis definitionis allatæ, Pars eſt magnitudo magnitudinis, minor maioris: ergo cùm pars debeat eſſe minor magnitudo reſpectu maioris, nemo æqualem magnitudinem alteri magnitudini, partem eius vocare poterit: Pars igitur ex dictis debet pluries quàm ſemel ſuam maiorem magnitudinem metiri, & adæquatè & perfectè.

I I.

*Multiplex autem, eſt maior minoris, cùm minor metitur maiorem.*

HÆc eſt definitio maioris magnitudinis reſpectu ſuæ partis minoris eam metientis, quæ ideò debet eſſe minoris multiplex, vt intelligatur eſſe de natura multiplicis ſeu maioris magnitudinis relatæ ad minorē tanquam ad partem ſuam, menſurari ab minore tanquam parte multoties; ſi enim menſuraretur ſemel ab illa minore vt parte adæquatè, non eſſet illius multiplex ſed æqualis: Et quia maior magnitudo tanquam totum refertur ad minorem veluti ad partem ſuam; ideò in definitione ponitur, & totum & pars, ſub illis particulis, maior minoris. Denique quia pars metitur ſuum totum, vti explicauimus in definitione præcedente, proptereà in definitione apponitur, cùm minor metitur maiorem; vt excludatur ab nomine multiplicis magnitudo maior reſpectu minoris, ſi minor iſta non metiatur maiorem ſuam ad quam refertur, perfectè. Quomodo autem appellabitur illa magnitudo maior reſpectu minoris non metientis pluries adæquatè ſuam maiorem, dicemus in definitionibus noſtris primis, digreſſione prima.

Exemplum vnum proferemus Partis & Multiplicis definitorum. Concipiatur aliqua magnitudo tripedalis, & alia pedalis; hæc illius erit pars, quia minor metitur maiorē tripedalem ter adæquatè: illa verò erit multiplex ſiue tripla, quia pedalis illam metitur ter perfectè. Similiter octupedalis erit multiplex bipedalis, quia hæc minor maiorem quater metitur, ideoq; hæc bipedalis erit pars illius.

Colligitur ex his duabus definitionibus. Indiuiſibile non poſſe eſſe partem magnitudinis, quia non eſt magnitudo vt ſic, quod eſt de natura partis. Similiter aggregatum indiuiſibilium, præſcindendo ab conceptu vnico illorum per intellectum, non poſſe eſſe multiplex indiuiſibilis vnius, quia hoc indiuiſibile non eſt magnitudo, nec aggregatum illud indiuiſibilium: & licet hoc aggregatum eſſet quid magnum continuum, nihilominùs indiuiſibile illud metiens pluries adæquatè, pars illius non erit, quia de natura partis eſt vt ſit magnitudo. Hic eſt ſenſus Geometrarum, quorum obiectum proprium eſt magnitudo ſeu quantitas continua ſecundùm ſe ipſam denudata ab omni ſenſibili, & prout eſt finita.

### I I I.

***Ratio, eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis mutua quædam ſecundùm quantitatem habitudo.***

QVia omnis habitudo ſeu cõparatio ſeu relatio ſeu reſpectus vnius ad aliud ſit actus comparantis intellectus & ratiocinantis; ideò Eudoxus & Euclides habitudines mutuas magnitudinum eiuſdem generis ſecundùm quantitatem, vno verbo appellarunt Rationes. Et quia omnis comparatio duo ſaltem requirit, vnum comparandum cum altero; ideò in hac definitione dicitur duarũ magnitudinum habitudo; mutua quidem, hoc eſt ſi vna refertur ad aliam, etiam hæc alia ad illam. Prætereà quia magnitudines affici poſſunt multis accidentibus ſecundùm quæ referri poſſunt inter ſe, determinatur hic reſpectus in Geometria, his terminis, ſecundùm quantitatem, ad excludendum omnes alias comparationes aliorum accidẽtium quæ non conſiderat Geometra, in ſola quantitate occupatus. Quid verò intelligendum per illam particulam eiuſdem generis, paucis expediemus, dicendo intelligi quodcumque genus intra quantitatem, modo vnum quantũ quod comparatur cum alio, & hoc cum illo, multiplicatum poſſit aliud excedere, vt expreſſius docebit definitio quinta.

Itaque ad rationem requiruntur iſta quatuor, Primum duæ magnitudines ſeu duo termini fundantes reſpectum ſeu relationem. Alterum vt ſit mutua relatio vnius magnitudinis ad aliam. Tertium vt magnitudines duæ comparatæ ſi multiplicentur, vna aliam excedat, & alia illã item ſi multiplicetur. Quartum, vt hæc mutua habitudo inter quantitates ſit ſecundùm quantitatem, non autem ſecundùm alia infinita accidentia.

Quod ſi aliqua componantur ad inuicem ac referantur in phyſicis, vt motus, ac tempus, ac relationes ipſæ inter quantitates in ratione maioris ac minoris; id fit analogicè ad quantitatem quæ propriè refertur ad aliam; illa enim maiora & minora dicuntur ratione ſubiectorum quantorum.

### I V.

***Proportio verò, eſt Rationum ſimilitudo.***

PRoportionem vocant Authores huius libri, & Geometræ omnes, rationum ſimilitudinem, hoc eſt relationum fundatarum in quantitate reſpectum: non enim ſolum conſiderant quantitates inter ſe relatas, ſed etiam relationes mutuas earum; & ſicut in quantitatibus ſimilitudinem & comparationem mutuam ineſſe aduerterunt, ita etiam in ipſis earum reſpectibus fundamentum aliarum comparationum eſſe aduerterunt. Exempli gratia, In duabus magnitudinibus bipedalibus, aduerterunt relationem mutuam æqualitatis: & in duabus quantitatibus aliis ſingulis ſeſquipedalibus agnouerunt aliam relationem mutuam æqualitatis: tùm inter duas alias quarum vna eſſet ſexipedalis & alia tripedalis notarunt eſſe reſpectum dupli maioris ad minorem, ſubdupli verò maioris ad maiorẽ. Conſiderando autem reſpectus illos duos æqualitatis, primum inter duas quantitates bipedales, alterum inter quantitates duas ſeſquipedales, inuenerunt ſimilitudinem mutuã aliam fundatam in primis illis reſpectibus, quam vocarunt identitatis, non numericæ quidem, quia duæ ſunt diſtinctæ vnius ad aliam, ſed ſpecificæ: vnde dicunt ſicut eſt quantitas prima bipedalis ad ſecundam bipedalem, ita eſt ſeſquipedalis tertia ad ſeſquipedalẽ quartam; vel quæ ratio eſt inter quantitates duas bipedales, ea eſt inter quantitates duas ſeſquipedales, videlicet æqualitatis. Speculando verò reſpectũ inter primam quãtitatem ſexipedalem & aliam tripedalem ſecundam ex vna parte; & ex alia relationem inter bipedalẽ tertiam, & bipedalem quartã, ac referendo iſtos reſpectus alia relatione, fundamentum habuerunt aſſerendi maiorem eſſe rationem ſeu reſpectum primæ ſexipedalis ad ſecundam tripedalem, quàm tertiæ bipedalis ad quartam bipedalem; vel minorem eſſe hunc illo. Vides igitur quomodò reſpectus illi primi fundẽt alios ſecundos cum fundamento in re. Vnde ſicut illi primi denominant quantitates in quibus fundantur, vel æquales, vel inæquales, maioremque vnam, minorem verò aliam; ita etiam iſti ſecundi denominent primos in quibus radicantur, eoſdem ſeu æquales, vel inæquales, vel vnum maiorem, alterúmve minorem.

Etſi Eudoxus & Euclides rationem & proportionem diſtinguant vti videre eſt in hiſce duabus poſtremis definitionibus tamen Geometræ recentiores, & antiquorum nonnulli Rationem proportionem vocant, & Proportionem proportionalitatem vocitant; quod etiam vſurpabimus. Diſtinguentur verò ex diſcurſu: ſi enim referantur quantitates inter ſe, ratio & proportio idem erunt: ſi referantur earum rationes, proportio Euclidis erit proportionalitas aliorum.

## V.

*Rationem autem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſeſe mutuò ſuperare.*

HÆc definitio litem diſſoluit inter quantitates comparabiles, cuius generis eſſe debeant. poſiti in definitione tertia. Cuiuſcumque enim generis ſint quantitatiui ſi multiplicentur ambæ ſeſeque mutuò ſuperare poſſint, comparabiles inter ſe erunt: & ſi multiplicatæ ſeſe mutuò excedere nequeant incõparabiles erunt ſaltem propriè loquẽdo.

Ex his ſequitur inter finitam & infinitam actu quantitatem ſi daretur nullam eſſe comparationem; quia quantumuis finita multiplicetur ſeu augeatur, nunquam infinitã actu excedet. Tùm inter punctum indiuiſibile & lineam quamcumque finitam & reliquas quantitatis ſpecies aut genera, nullam eſſe proportionem; quia indiuiſibile punctũ multiplicatum nedum excedere, ſed neque efficere magnitudinem diuiſibilem poteſt. Sic etiam linea componi cum ſuperficiebus & corporibus minimè poterit; quia multiplicata quomodocumque neque ſuperare, neque efficere illa poteſt. Eodem modo ſuperficies comparari cum corpore nequit, quia illa multiplicata neque attingere neque excedere neque efficere corpus poteſt.

## V I.

*In eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe; Prima ad ſecundam, & tertia ad quartam: cùm prima & tertia æquemultiplicia à ſecunda & quarta æquemultiplicibus, qualiſcumq; ſit hæc multiplicatio, vtrumq; ab vtroq; vel vnà deficiunt, vel vnà æqualia ſunt, vel vnà excedunt: ſi ea ſumantur quæ inter ſe reſpondent.*

HÆc definitio & ſequẽs octaua magnam ſemper peperit vitis ſummo ingenio præditis, ſed Geometriæ penitioris imperitis, & multò magis Tyronibus eius, admirationem. Cur nimirum, vt in eadem ratione magnitudines vel quantitates dicantur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam: vel prima ad ſecundam habere maiorẽ rationem, quàm tertia ad quartam, (vt in octaua definitione dicetur) aſſumantur æquemultiplicia primæ & tertiæ, & æquemultiplicia ſecundæ & quartæ: eiſque collatis ad inuicem ſuo modo proprio; conſtituatur in iſta definitione prima ad ſecundam eandem habere rationem, quàm tertia ad quartam; & in octaua, prima ad ſecundam maiorem habere rationem, quàm tertia ad quartam. Iudicarũt enim nõnulli critici aſſumpta illa æquemultiplicia maiorem confuſionem parere definito, quàm eius naturam manifeſtiorem reddere; præſertim cùm in iſta definitione aſſumi debeant ſecundùm quelcumque multiplicationem, & in octaua ſecundùm aliquam aſſumantur. Arbitrati ſunt autem ſe magnam lucem attuliſſe dicendo primam habere eandem rationem ad ſecundã & tertiam ad quartam, quando prima æquè contineret ſecundam, vt tertia quartam; vel ſecunda primam, vt quarta tertiam; Maiorem autem habere rationem primam ad ſecundam, quàm tertiam ad quartam, quando conferendo maiores cum minoribus, prima pluries ſecundam, vel ſupra ſemel plus de illa contineret, quàm tertia quartam vel de illa: conferendo verò minores cum maioribus, maiorem habere rationem primam cum ſecundã ſi minus contineatur in illa, quàm tertiam cum quarta ſi pluries contineatur in illa vel plus de illa ſupra ſemel contineatur: ſic etenim ignotius per notius explicatur. Hæc etſi vera ſint in vna ſpecie quantitatis, non ſunt vniuerſalia reſpectu omnis quantitatis cuius proportiones in vniuerſum definire voluerunt noſtri Authores Eudoxus & Euclides Geometriæ Soles. Cùm enim duæ ſpecies quantitatis ſeu magnitudinis ſint, videlicet commenſurabilis & incommenſurabilis, vel vnius cuius proportiones numeris exprimi poſſunt, alterius verò numeris inexplicabiles; non debuerunt ad explicandam naturam in vniuerſum proportionem aſſumere prædicta ſoli commenſurabili quantitati propria, vel cuius proportiones numeris exprimi poſſunt; ſicuti fecerũt nonnulli Critici, qui ad pauca reſpicientes hallucinati ſunt. Cùm igitur nihil ſit commune omnibus quantitatibus in vniuerſum ſiue commenſurabilibus ſiue incommenſurabilibus, vt prima dicatur ad ſecundam habere eandem rationem, quàm tertia ad quartam: Vel vt prima ad ſecundã dicatur maiorem habere rationem quàm tertia ad quartã; præter prædicta æquemultiplicia primæ & tertiæ, tùm ſecundæ & quartæ: ideo ſapienter definierunt in hac definitione, quid ſit quantitates eſſe in eadem ratione prima ad ſecundam, & tertia ad quartam; & in octaua, quid ſit prima maiorem habere rationem ad ſecundam, quàm tertia ad quartam: per aliquid vniuerſalius & notius definito; quis enim negabit ſumi poſſe maiorem & maiorem magnitudinem quacumque data, ex petitione 5. libr. 1. tùm aliam æquemultiplicem alterius minoris, reſpectu maioris aſſumptæ alterius ſeu repetitæ toties quoties libitum fuit.

His

His poſitis, explicemus conditiones omnes huius definitionis ſextæ. Prima eſt, vt ſumantur æquemultiplices magnitudines ſeu æquemultiplicia primæ ac tertiæ è magnitudinibus datis ita vt prima ad ſecundam eandem rationem habere dicatur quàm tertia ad quartam. Secunda vt ſumantur etiam æquemultiplicia ſecundæ & quartæ. Tertia vt in vtraque illa aſſumptione æquemultiplicium, ſumantur ſecundùm quamlibet multiplicationem. Quarta, vt ſi multiplex primæ excedat multiplicem ſecundæ, etiam multiplex tertiæ excedat multiplicem quartæ: vel ſi multiplex primæ deficiat ab multiplici ſecundæ, etiam multiplex tertiæ deficiet ab multiplici quartæ: vel ſi multiplex primæ æqualis ſit multiplici ſecundæ, etiam multiplex tertiæ ſit æqualis multiplici quartæ: hoc enim eſt æquemultiplicia primæ ac tertiæ vnà excedere, vel deficere, vel æqualia eſſe, reſpectu æquemultiplicium ſecundæ & quartæ; & ea ſumi æquemultiplicia, quæ inter ſe reſpondent, quæ ſunt particulæ appoſitæ in definitione. Tunc enim neceſſariò prima ad ſecundam habebit eandem rationem, quàm tertia ad quartam. Etſi prima ad ſecundam eandem rationem habuerit quam tertia ad quartam; æquemultiplicia primæ ac tertiæ ſecundùm quamcumque multiplicationem, vnà excedent vel deficient vel æqualia erunt reſpectu æquemultiplicium ſecundæ ac tertiæ ſecundùm quamcumque multiplicationem.

| | | |
|---|---|---|
| M 12. H 8. E 20. | A 4. ad B 2. | G 20. K 6. O 14. |
| N 18. I 12. F 30. | C 6. ad D 3. | H 30. L 9. P 21. |

Exemplum proferamus A 4, ad B 2, prima ad ſecundam, habebit eãdem rationem, quam tertia C 6, ad D 3 quartam: quia ſumptis æquemultiplicibus E 20. F 30. primæ & tertiæ eodem ordine, hoc eſt E 20, ipſius A 4 primæ; & F 30, ipſius C 6, tertiæ: tùm æquemultiplicibus G 20, H 30, ſecundæ & quartæ eodem ordine, vnâ æqualia ſunt; hoc eſt multiplex E 20, primæ A 4, æquale eſt multiplici G 20, ſecundæ B 2; & multiplex F 30, tertiæ C 6, æquale eſt multiplici H 30, quartæ D 3: Et ſumptis aliis æquemultiplicibus H 8, I 12, primæ ac tertiæ; tùm aliis æquemultiplicibus K 6, L 9, ſecũdæ & quartæ; illa excedunt iſta: Et ſumptis aliis multiplicibus M 12, N 18, primæ & tertiæ; tùm aliis æquemultiplicibus O 14, P 21, ſecũdæ & quartæ; illa deficiunt ab iſtis: & ſic ſecundùm quamcumque multiplicationem, ſemper æquemultiplicia primæ ac tertiæ, excedunt, vel deficiunt, vel æqualia ſunt vnâ, reſpectu æquemultiplicium ſecundæ & quartæ. Et ſi probentur iſta æquemultiplicia ita ſe habere ſecundùm quamcumque multiplicationem, Prima ad ſecundam habebit eãdem rationem quam tertia ad quartam.

Ex dictis in huius definitionis explicatione concedet Criticus rectè aſſumi commune quid quantitatibus commenſurabilibus & incommenſurabilibus quæ comparari inter ſe poſſunt, vt definiatur prima ad ſecundam & tertia ad quartam habere eandem rationem; & ſapiẽter reſpui illud quod eſt ſolum proprium quantitatibus commenſurabilibus. Verùm quæret cur primò in iſta definitione aſſumantur æquemultiplicia primæ ac tertiæ ſecundùm quamuis multiplicationem, & æquemultiplicia ſecundæ & quartæ, ſecundùm quamcumque multiplicationem: ſecundò cur ſumantur vnâ deficere vel excedere vel æqualia eſſe illa primæ ac tertiæ, reſpectu illorum ſecundæ & quartæ. Prætereà inquiret primò cur in definitione octaua ad explicãdum primam habere maiorem rationem ad ſecundam, quàm tertia ad quartam, aſſumantur æquemultiplicia primæ ac tertiæ, tùm æquemultiplicia ſecundæ & quartæ, ſecundùm aliquam multiplicationem tantummodò: ſecundò cur multiplex primæ excedere multiplex ſecundæ aſſumatur; & multiplex tertiæ non excedere debere aliud multiplex quartæ.

Reſpondeo à ſimili. Cur Phyſici admittunt hanc propoſitionem, omnis ignis eſt calidus? quia hactenus experimento compertum eſt per inductionem ignem quemcumque calefacere naturaliter, nullumque ignem repertum qui non calefaceret; atque adhuc propter hoc experimentum admiſiſſe omnes Phyſicos iſtam propoſitionem vniuerſalem, omnis ignis eſt calidus. Probant verò ſic per inductionem, hic & hic ignis eſt calidus, & ſic de omnibus aliis ignibus: quod ſi comperiretur ignis aliquis qui non calefaceret, rueret propoſitio illa vniuerſalis, ac diceretur ſolùm multi ignes ſunt calidi, non omnis ignis eſt calidus: manent tamen in poſſeſſione illius vniuerſalis, donec proferatur aliquis ignis qui non calefaciat. Applico hoc reſponſum ad noſtram materiam, Geometræ aduerterunt inductione facta, inter quantitates eandem habere rationem, primam ad ſecundam, quàm tertia ad quartam, quando æquemultiplicia primæ ac tertiæ ſecundùm quamcumque multiplicationem, vel vnà excedunt, vel deficiunt, vel æqualia ſunt, reſpectu æquemultiplicium ſe-

cundæ & quartæ ſecundùm quamcumque multiplicationem: Vel quando prima ad ſecundam habet eandem rationem, quam tertia ad quartam, hæc ita ſe habere circa æquemultiplicia illarum ſumpta & collata modo prædicto: & nullum vnquam obuium habuerunt exemplum in quo prædicta omnia vel aliquid illorum abeſſet, ſtatuerunt iure optimo definitionem iſtam ſextam, & in eius poſſeſſione iure optimo conſtantes ſunt. Eodem modo, quia aduerterunt in quantitatibus relatis primam maiorem habere rationem ad ſecũdam, quam tertia ad quartam; quando ſecundùm aliquam obuiam multiplicationem ſumptis æquemultiplicibus primæ ac tertiæ, tùm ſecundùm aliquam multiplicationem ſumptis æquemultiplicibus ſecundæ & quartæ, multiplex primæ excedit multiplicem ſecundæ, & multiplex tertiæ non excedit multiplicem quartæ; licet ſecundùm multas multiplicationes hæc non accidant; ſtatuerunt etiam iure octauam definitionem, & in eius poſſeſſione perſiſtunt.

## VII.

*Eandem autem habentes rationem, Proportionales vocentur.*

Explicatur in hac definitione, quid ſit magnitudines vel quantitates eſſe proportionales. Quando enim multæ eandem habebunt inter ſe rationem, illæ Proportionales erunt & dicentur.

## VIII.

*Cùm verò æquemultiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; at verò multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ: tunc prima ad ſecundam, maiorem habebit rationem, quàm tertia ad quartam.*

Expoſitio huius definitionis dependet ab dictis in explicatione ſextæ definitionis: nam dubia quæ ſuboriri poſſunt circa iſtam, ſoluta iam ſunt in prædicta. Differentia ſolùm aduertenda eſt huius octauæ & ſextæ definitionis: nam in ſexta ſumenda ſunt æquemultiplicia ſecundùm quamcumque multiplicationem, tàm primæ & tertiæ; tùm æquemultiplicia ſecundæ & quartæ ſecundùm quamcumque multiplicationem: in quibus ſemper vnâ excedent, vel deficient, vel æqualia erunt æquemultiplicia primæ & tertiæ, reſpectu æquemultiplicum ſecundæ & quartæ: at verò in iſta octaua, non ita ſe habebunt illa æquemultiplicia reſpectu iſtorum, ſumpta ſecundùm quamcumque multiplicationem; ſed occurret aliqua in qua multiplex primæ ſuperabit multiplex ſecundæ, & multiplex tertiæ non ſuperabit multiplex quartæ, ſed vel erunt æqualia, vel multiplex tertiæ erit minus multiplice quartæ.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | O 40. | | | |
| I 24. | E 16. | A 8. | B 2. | G 10. | L 12. |
| K 18. | F 12. | C 6. | D 3. | H 15. | M 18. |
| | | P 30. | | | |

Exemplum proferamus. Sit A 8, ad B 2, & C 6 ad D 3; Prima ad ſecundam, & tertia ad quartam. Sumptiſque E 16, F 12, æquemultiplicibus primæ A, tertiæque C; hoc eſt E 16, ipſius A 8 primæ, & F 12 ipſius C 6; tùm æquemultiplicibus G 10, H 15, ſecundæ B 2 & quartæ D 3, eodem ordine: Quia E 16 multiplex A 8 primæ, excedit G 10, multiplicem B 2, ſecundæ; & F 12 multiplex tertiæ G 6, non excedit H 15 multiplicem quartæ D 3, nam iſto minus eſt; ideo A 8 prima ad B 2 ſecundam, maiorem habebit rationem, quàm C 6 tertia ad quartam D 3. Quod ſi ſumantur I 24, K 18, æquemultiplicia primæ A 8, & tertiæ C 6; item æquemultiplicia L 12, M 18, ſecundæ B 2, & quartæ D 3: quia I 24 multiplex primæ excedit L 12 multiplex ſecundæ; & K 18 multiplex tertiæ C 6, non excedit multiplex M 18, quartæ: nam ſunt æqualia: ideo prima ad ſecundam maiorem habebit rationem, quàm tertia ad quartam in eodem exemplo allato. Vides igitur multiplex tertiæ poſſe eſſe minus multiplice quartæ, vel æquale illi: vnde in definitione rectè ponitur in vniuerſum, multiplex tertiæ non excedens multiplex quartæ. Nihil autem refert quod ſecundũ infinitas alias multiplicationes ſumptis æquemultiplicibus primæ ac tertiæ, vt O 40. P 36; tùm ſumptis aliis æquemultiplicibus ſecundæ & quartæ, v.g. G 10, H 15, vel L 12, M 18; multiplex O 40 primæ excedat G vel L, multiplex ſecundæ; & etiam P 30, multiplex tertiæ excedat multiplex L, vel M, quartæ; nam ſufficit quod non ſecundùm omnem multiplicationem, vel quamcumque, id non accidat; quod idem eſt ac dicere, ſi ſecundùm aliquam multiplicationem accidant quæ præferuntur in hac definitione octaua; prima magnitudo ad ſecundam maiorem habebit rationem, quàm tertia ad quartam.

IX Pro-

### I X.

*Proportio autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.*

CVm enim proportio ſeu proportionalitas ſit rationum ſimilitudo per defin. 4. & omnis ratio per def. 3. ſit mutua duarum quantitatum eiuſdem generis ſecũdùm quantitatem habitudo: & omnis relatio duos terminos diſtinctos requirit ex natura ſua: & poſſit vna quantitas terminare habitudinem primæ alterius, & referri iterum ad aliam tertiam; ideò in hac ſimilitudine rationum ſaltem requiruntur tres termini ſeu tres quantitates, quarum media fungitur vice duarum terminantis relationem primæ, & relatæ ad tertiam. Quare cùm propter duas relationes diſtinctas numero, duo & duo termini requirantur hoc eſt quatuor, ſiue realiter ſiue formaliter diſtincti; mediuſque poſſit fungi officio ac vice duorum; ideò ſaltem in proportione ſiue proportionalitate requirũt Authores noſtri ad minus tres terminos diſtinctos.

Si quis attentè expendat iſta, fatebitur non eſſe definitionem ſed propoſitionem explicatam, inſertam inter definitiones.

## DIGRESSIO PRIMA.

### Complectens noſtras definitiones primas neceſſarias ad intelligendam materiam quantitatum relatarum.

### I.

*Antecedens in quantitatibus comparabilibus, eſt quantitas quæ primo loco ponitur in comparatione, quando refertur ad aliam.*

### I I.

*Conſequens, vel ſubſequens in eiſdem, eſt quantitas quæ ſecundo loco ponitur, quando alia refertur ad illam.*

QVia in omni comparatione duo ſaltem requiruntur, Vnum quod cõfertur cum alio, & aliud ad quod refertur. Primum in recto ponitur & primo loco; & hoc eſt Antecedens definitum. Aliud verò quod ponitur in obliquo & ſecundo loco: & hoc eſt Conſequens definitum. Nec refert quod Antecedens ſit maius vel minus Conſequente; vel è contrario.

Seuerinus Boëtius in ſuis Arithmeticorum libris, Antecedẽtem vocat Ducem; Conſequentem verò Comitem: quòd Antecedens præeat veluti Dux, & Conſequẽs ſequatur vt Comes. Sed hæc ſunt florida metaphorica.

### I I I.

*Partes, eſt magnitudo magnitudinis, minor maioris; cùm minor non metitur maiorem.*

EX dictis in explicatione definitionis primæ Eudoxi & Euclidis, intelligitur iſta definitio partium in magnitudinibus. quare ne longiores ſimus exemplum proferam. A 2, erit partes B 3: nam eſt magnitudo magnitudinis minor maioris, & A 2 minor non metitur maiorem B 3; & ſi enim maiorem metiatur ſemel, tamen ſupereſt vnitas, quam non metitur; atque ita non poteſt dici A 2 pars maioris B 3, ſed tantum partes: continet enim duas partes maioris: Simili modo C 3 erit partes D 7, quia non metitur hanc maiorem, & ſolum continet huius maioris tres partes, hoc eſt tres vnitates, cùm vnitas ſit illius maioris pars, illam metiens adæquatè & perfectè.

Notandum eſt Interpretes Ariſtotelis vocare partem definitam, in prima definitione, partem aliquotam; partes verò hoc loco definitas, vocare partem aliquantam.

### I V.

*Submultiplex, eſt magnitudo magnitudinis, minor maioris, cùm minor metitur maiorem.*

MAgnitudo minor ſi comparetur cum maiore multiplici illius, vocatur ſubmultiplex ab Geometris; eſtque pars illius maioris, vnde definitur vt pars. Atque ita omnis pars in quantitate eſt ſubmultiplex reſpectu ſuæ multiplicis: & quantitas omnis ſubmultiplex eſt pars ſuæ multiplicis. Quod ſi comparetur magnitudo minor cum maiore quam metiatur, vocatur propriè pars: Atque ita licet idem ſint pars & ſubmultiplex, tamen ſecundùm reſpectus illos diſtinguntur, pars enim eſt reſpectu maioris quam metitur; ſubmultiplex verò reſpectu ſuæ multiplicis quam metitur. Quare exemplum in definitione prima Authorum noſtrorum, partis allatum, inſeruire poterit pro exemplo ſubmultiplicis.

V. Non

V.

*Non multiplex, Eſt magnitudo magnitudinis, maior minoris, cùm minor non metitur maiorem.*

INtellecta explicatione multiplicis Authorum huius libri, intelligetur iſta definitio non multiplicis magnitudinis. In illa enim multiplex erat magnitudo magnitudinis maior minoris, cùm minor metitur maiorem: hæc verò definitio eadem eſt quoad primas particulas quæ loco generis ſunt; poſtremæ verò particulæ ſunt differentia eius ab illa, cùm minor non metitur maiorem. Atque ita A 3 erit non multiplex B 2, quia minor B 2 non metitur maiorem A 3. Sic etiam C 7 erit non multiplex D 3, quia hæc minor non metitur maiorem C 7.

VI.

*Non ſubmultiplex, Eſt magnitudo magnitudinis, minor maioris; cùm minor non metitur maiorem.*

EXplicatio non multiplicis, & ſubmultiplicis iuuabit ad intelligentiam huius definitionis. Eſt enim non ſubmultiplex minor magnitudo comparata cum non multiplici, ſicuti ſubmultiplex comparata cum multiplici ſua; ideoque eſt minor magnitudo maioris non multiplicis, debetque iſta minor non metiri maiorem, ac propterea eſt partes illius: Et quando minor magnitudo reſpectu maioris eſt partes, eſt etiam eiuſdem maioris non ſubmultiplex. Ex quo fit vt partes ſint non multiplex maioris; & non multiplex ſit partes maioris non multiplicis ſuæ. Exemplum B 2, eſt non ſubmultiplex A 3 maioris. Et D 3 non ſubmultiplex C 7 maioris ſuæ, illius non multiplicis.

VII.

*Multiplices magnitudines ſunt, maiores minorum ſuarum propriarum; quando minores metiuntur ſuas proprias maiores.*

QVia ſæpenumero multæ magnitudines maiores comparantur cum ſuis propriis minoribus à quibus menſurantur; ideo quemadmodum vna magnitudo maior continens vnam minorem pluries adæquatè, & à qua menſurabatur pluries perfectè, dicta eſt multiplex, reſpectu illius minoris tanquam partis, vel ſubmultiplicis; ita etiam multæ magnitudines maiores reſpectu minorum ſuarum propriarum à quibus pluries menſurantur, dictæ ſunt ab Geometris multiplices. Itaque multiplices dicunt duos reſpectus, primum ad alias maiores quæ ſint ſuarum propriarum multiplices; alterum ad ſuas proprias minores. Exemplum ſit A 3, reſpectu B 1; & C 8, reſpectu D 2. Duæ maiores antecedentes A 3, C 8, dicentur multiplices, plures enim ſunt maiores; & A 3 menſuratur ab ſua minore B 1; & C 8, menſuratur ab ſua minore D 2.

VIII.

*Submultiplices magnitudines ſunt, minores maiorum ſuarum propriarum; quando minores metiuntur ſuas proprias maiores.*

SI ſint multæ magnitudines maiores, neceſſariò dicũt relationem ad ſuas proprias minores ex natura ſua, & ad alias maiores; quæ ſi fuerint multiplices ſuarum minorum, etiam iſtæ minores comparabuntur & cum aliis minoribus & cum ſuis maioribus propriis multiplicibus, propter mutuum reſpectum inter quantitates eiuſdem generis explicatum definitione 5. Authorum noſtrorum. Verùm minores iſtæ debent metiri ſuas proprias maiores. Sic idem exemplum ſuperiùs allatum euerſum inſeruiet. Sint minores magnitudines B 1, D 2, reſpectu ſuarum maiorum A 3, C 8, prima primæ, ſecunda ſecundæ: illæ minores erunt ſubmultiplices maiorum ſuarum; quia B 1 metitur ſuam maiorem A 3; & D 2 metitur ſuam maiorem C 8.

IX.

*Æquemultiplex. Eſt magnitudo maior reſpectu alterius maioris magnitudinis, vel aliarum maiorum magnitudinum; quando ſingulæ maiores æquemenſurantur ab ſuis propriis minoribus magnitudinibus.*

QVandoquidem æquemultiplex magnitudo eſt etiam multiplex, ideò ex natura multiplicis debet comparari cum ſua minore magnitudine tanquam parte, ab qua menſuretur: Et quia illi multiplici præponitur particula æquè, quæ non poteſt amplius dicere relationem ad minorem illam, ſed ad aliam maiorem cum qua conueniat, & ſit tam multiplex ſuæ alterius minoris, quàm alia maior ſuæ propriæ minoris, in ratione mẽſurationis ab ſua minore propria; ideò rectè æquemultiplex definitur per reſpectũ ad aliam maiorem, vel ad alias maiores; modò tamen quia

quia ſunt multiplices ſuarum minorum propriarũ,ſingulę ab ſuis illis propriis minoribus æqualiter menſurentur. Sic in exemplo A 12 maior reſpectu C 6 maioris etiam, erit æquemultiplex, ſi A 12 maior reſpectu ſuæ minoris B 4, æquemenſuretur, vt C 6 alia maior ab ſua minore D 2 propria.

X.

*Subæquemultiplex, eſt magnitudo minor reſpectu alterius minoris,vel aliarum minorũ;quando ſingulæ minores æquemetiuntur ſuas proprias maiores.*

DVos includit reſpectus magnitudo ſub æquemultiplex quæ ſemper eſt minor, vnum ad ſuam maiorem, quam metiri debet, quia eſt ſubmultiplex illius: alterum ad aliam minorem, vel alias minores, quæ toties vel æquemetiantur ſuas alias proprias maiores, quoties ſeu æquemetitur illa ſuam maiorem propriam: qui duo reſpectus includuntur in definitione allata; ſicuti in definitione præcedente includebantur alij duo huiuſmodi reſpectus ad alias maiores, & ad ſuas proprias minores. Quare in exemplo ſuperioris definitionis B 4, D 2, erunt ſub æquemultiplex ſingulæ, ſuarum maiorum A 12, C 6, prima primæ, ſecunda ſecundæ.

X I.

*Æquemultiplices, ſunt magnitudines maiores, reſpectu ſuarum propriarum minorum; quando iſtæ minores æquemetiuntur ſuas proprias maiores.*

X I I.

*Subæquemultiplices, ſunt magnitudines minores, reſpectu ſuarum propriarum maiorum; quando iſtæ minores æquemetiuntur ſuas proprias maiores magnitudines.*

EX dictis in ſuperioribus definitionibus æquemultiplicis & ſub æquemultiplicis magnitudinum, facilè intelligentur iſtæ duæ definitiones: nam in illis conferebatur vna magnitudo cum duabus, maior cum maiore altera vel aliis maioribus, & cum ſua minore; vel vna magnitudo minor cum alia minore vel aliis minoribus, & cum ſua maiore; ita tamen vt ſingulæ minores æquemenſurarent. In hiſce verò definitionibus, vel ſumuntur omnes maiores, vel omnes minores; comparatæ cum ſuis maioribus & minoribus; ita tamen vt ſingulæ minores æquemenſurent ſuas proprias maiores: vnde maiores huiuſmodi vocantur æquemultiplices, & minores ſubæquemultiplices. Iuxta iſtas definitiones erunt æquemultiplices A 15, C 30, E 18, reſpectu minorum ſuarum propriarum B 5, D 10, F 6, eodem ordine appoſitarum, tùm etiam reſpectu ſumpto ad inuicem, ſingulæ enim minores ſuas proprias maiores æquemetiuntur, videlicet ter, B 5 quidem ipſam A 15; & D 10, ipſam C 30; & F 6, ipſam E 18. Et minores eædem erunt ſubæquemultiplices earundum ſuarum maiorum propriarum. & ſic de aliis.

X I I I.

*Non multiplices, ſunt magnitudines magnitudinum, maiores minorum ſuarum propriarum; quando minores ſuas proprias maiores non metiuntur.*

PErcepta definitione non multiplicis magnitudinis, quæ numero eſt quinta inter has noſtras, nullo negotio intelligetur iſta non multiplicium: in illa enim comparabatur vna magnitudo maior cum ſua minore, ita vt illa minor nõ metiretur ſuam maiorem; in hac verò cõparantur duæ vel plures maiores cum ſuis propriis minoribus, ita tamen vt neutra iſtarum minorum ſuas proprias maiores metiatur. Exemplum eſto in hiſce magnitudinibus maioribus A 8, D 10, reſpectu ſuarum minorum C 3, E 4, eodem ordine appoſitarum, A quidem ipſius C, D verò ipſius E: nam C non metitur A, & E non metitur D, quare A & D, ſunt non multiplices reſpectu C & E.

X I V.

*Non ſubmultiplices, ſunt magnitudines magnitudinum, minores maiorum ſuarum propriarum; quando minores non metiuntur ſuas proprias maiores.*

EX dictis in definitione 6. noſtra huius digreſſionis, & præcedente 13, ſine vlla difficultate percipietur ſenſus huius: Quare exemplum ſolummodo proferam harum magnitudinum non ſubmultiplicium, C 3, E 4, reſpectu ſuarum propriarum maiorum A 8, D 10, C quidem ipſius A, & E ipſius D; nam C 3 non metitur A 8, neque E 4 metitur D 10; quare C 3, E 4, erunt non ſubmultiplices ipſarum A 8, D 10: vel non erunt ſubmultiplices earundem A, D.

X V.

## X V.

*Inæquemultiplex, vel non æquemultiplex, eſt magnitudo maior reſpectu alterius maioris vel aliarum maiorum; quando ſingula maiores non æquè menſurautur à ſuis proprijs minoribus.*

EXempli gratia A 12, C 9, maiores, & minores B 6, D 3, ita vt A 12 referatur ad B minorem ſuam 6, & C 9 referatur ad minorem ſuam D 3: ſi conferantur illæ maiores A 12, C 9, ad inuicem, & ad ſuas minores proprias B 6, D 3; A 12 erit inæquemultiplex ſuæ minoris B 6, reſpectu alterius maioris C 9, quam metitur inæqualiter minor D 3 ſua propria, videlicet ter; & alia B 6, ſuam maiorem A 12, bis tantummodo.

## X V I.

*Subinæquemultiplex, vel non æquèſubmultiplex, eſt magnitudo minor reſpectu alterius minoris, vel aliarum minorum; quando ſingulæ minores non æquè metiuntur ſuas proprias maiores.*

IN eodem exemplo ſuperiore perſiſtendo B 6, & D 3, reſpectu ſuarum maiorum A 12, C 9; B 6 non erit æqueſubmultiplex, vel erit ſubinæquemultiplex ſuæ maioris A 12; reſpectu alterius D 3 minoris ad ſuam maiorem C 9; quia minores iſtæ non æquemetiuntur ſuas maiores; nam B 6 metitur bis ſuam maiorem A 12, & D 3 metitur ter ſuam maiorem C 9.

## X V I I.

*Inæquemultiplices, ſeu non Æquemultiplices, ſunt maiores magnitudines reſpectu ſuarum propriarum minorum; quando minores non æquè metiuntur ſuas proprias maiores.*

IN exemplo definitionis 15, huius digreſſionis videre eſt Inæquemultiplices A 12, & C 9, maiores magnitudines reſpectu ſuarum minorum propriarum B 6, D 3; B quidem ipſius A, D verò ipſius C: quia B 6 non æquemetitur ſuam maiorem A 12, ſicut D 3 minor ſuam maiorem propriam C 9.

## X V I I I.

*Subinæquemultiplices, vel non ſubæquemultiplices, ſunt magnitudines minores, reſpectu ſuarum propriarum maiorum; quando minores non æquemetiuntur ſuas proprias maiores.*

SIc in exemplo definitionis 16, huius digreſſionis B 6, D 3, erunt ſubinæquemultiplices reſpectu ſuarum propriarum maiorum magnitudinum A 12, C 9; A quidem ipſius B, & C ipſius D: quia B 6 non æquemenſurat ſuam maiorem A 12, ſicut D 3 ſuam maiorem C 9.

## X I X.

*Multiplex alicuius magnitudinis minoris proximè maior tertia magnitudine, eſt quando detractâ minore ex ſua multiplici, relinquitur magnitudo non maior tertia alia data.*

EXempli gratia, ſit data magnitudo minor D 5, & data tertia alia G 24: I 25 erit multiplex ipſius D 5, proximè maior, reſpectu tertiæ datæ G 24. Nam detracta ipſa D 5 minor, ab ſua multiplici iſta I 25, relinquetur K 20, non maior tertia data G 24.

Sic etiam eadem D 5 minore, & tertia alia data G 20; I 25 erit multiplex ipſius D 5 minoris datæ maior proximè reſpectu G 20 tertiæ datæ; quia ſublata D 5 minore data ab ſua I 25 multiplice, relinquetur K 20 non maior tertia data magnitudine G 20.

## X X.

*Multiplex alicuius magnitudinis minoris non proximè maior tertia magnitudine, eſt quando detracta minore ex ſua multiplici, relinquitur magnitudo maior tertia alia data.*

EXempli gratia, ſit data magnitudo D 5 minor, & data alia tertia G 24, vel 20: I 30 erit multiplex ipſius D 5, non proximè maior reſpectu tertiæ datæ G 24, vel 20; quia ſi detrahatur D 5 minor ab ſua multiplici I 30, relinquetur K 25, maior tertia data magnitudine G 24, vel 20. Et ſic de alijs.

Ex his definitionibus noſtris & ſecunda Authorum huius libri. Colligitur Primò magnitudinem multiplicem vnam ſolùm relationem inferre ad ſuam minorem: Et ſubmultiplicem tantummodò inuoluere aliam vnicam relationem ad ſuam maiorem, tanquam partis ad totum ſuum; illam verò tanquam totius ad ſuam partem.

Colligi-

Colligitur ſecundò Magnitudinem non multiplicem, vnam ſolùm relationem dicere ad ſuam minorem, tanquam totius ad partes ſuas aliquas: Et non ſub multiplicem aliam ſolùm relationem ad ſuam minorem, tanquam partium aliquarum ad ſuum totum.

Colligitur tertiò Particulam ſub, præpoſitam generibus & ſpeciebus proportionum, ſemper inferre minorem magnitudinem comparatam cum maiore conſequente, ita vt minor ſit Antecedens.

Colligitur quartò in materia proportionum, Genera & ſpecies expreſſæ ſine particula ſub præpoſita; ſemper indicare maiorem magnitudinem antecedentem collatam cum minore conſequente. Quæ duo poſtrema collecta inſeruient etiam in ijs quæ dicemus in digreſſione ſequente.

Colligitur quintò Magnitudinem Æquemultiplicem vel ſubæquemultiplicem; vel Inæquemultiplicem, vel ſubinæquemultiplicem: ſemper includere ad minimum quatuor magnitudines, propter comparationem duarum antecedentiū ad ſuas conſequentes in ratione æquemultiplicitatis vel ſubæquemultiplicitatis, vel inæquemultiplicitatis aut ſubinæquemultiplicitatis.

Colligitur ſextò magnitudines multiplices vel ſubmultiplices, vel æquemultiplices vel ſubæquemultiplices, vel non multiplices vel ſubnonmultiplices, vel inæquemultiplices, vel ſubinæquemultiplices; inferre ad minimum quatuor magnitudines, duas Antecedentes & duas conſequentes propter comparationem prædictam in collectione præcedente quinta.

## DIGRESSIO II.

### Complectens diuiſionem Generis ſummi Proportionum in ſua genera ſubalterna, & horum in ſuas ſpecies, cum definitionibus ac denominatoribus eorum omnium.

*Ratio ſeu Proportio diuiditur in duo prima genera, in Rationalem & Irrationalem.*

HÆc eſt prima diuiſio generis ſummi Rationum in duo illa prima capita è quibus enaſcuntur alia genera & ſpecies, ſed longè plures è primo quàm è ſecundo, quod infœcundum nonnulli dictitant.

I.

*Rationalis proportio, Eſt qua numeris exhiberi poteſt: vel vt alij volunt, quæ eſt inter Quantitates commenſurabiles.*

HÆc eſt prima definitio huius digreſſionis noſtræ, primi capitis Rationis ex ſummo genere Rationis definito in definitione tertia Authorum noſtrorum procedentis. Exempli gratia, ſi fuerit vna quantitas A 20 pedum, & alia B 10, proportio intercedens inter iſtas duas quantitates erit Rationalis, quia numeris exhiberi poteſt 20 & 10. Vel quia communis menſura illas metiri poteſt, videlicet vel vnus pes, vel duo, vel quinque: nam prima metietur A 20, vigeſies, & B 10, decies; ſecunda decies A 20, & quinquies B 10; Tertia denique metietur A 20 quater, & bis B 10. Quæ menſura enim numeris exprimi poteſt prædictis.

II.

*Irrationalis verò Proportio, Eſt quæ numeris exhiberi nequit: Vel quæ eſt inter Quantitates incommenſurabiles; hoc eſt quarum nulla communis menſura reperiri & excogitari poteſt.*

LIbro decimo horum Elementorum Geometricorum multæ exhibentur magnitudines incommenſurabiles, vt latus Quadrati & eius diameter; quarum nulla communis menſura intellectus excogitare poteſt; ideoque proportio inter illas numeris exhiberi nequit.

*Hoc genus Irrationalis proportionis diuiditur in duas ſpecies infimas, maioris inæqualitatis & minoris inæqualitatis.*

*Irrationalis proportio maioris inæqualitatis, Eſt quando comparatur maior quantitas incommenſurabilis cum ſua minore.*

*Irrationalis proportio minoris inæqualitatis, Eſt quando comparatur minor quantitas incommenſurabilis cum ſua maiore conſequente.*

EXempli gratia ſi comparetur diameter quadrati cum ſuo latere conſequente, erit proportio irrationalis maioris inæqualitatis. Si verò comparetur latus quadrati cum ſua diametro conſequente, erit proportio irrationalis minoris inæqualitatis. Sunt verò irrationales ambę iſtæ proportiones, quia ſunt inter quantitates incommenſurabiles.

L Sin-

Singulæ iſtarum ſpecierum duarum non habent diuerſa inferiora ſpecie differentia, ſed ſolùm numero ſeu indiuiduo differentia: ita vt omnes proportiones maioris inæqualitatis inter quantitates incommenſurabiles ſint eiuſdem ſpeciej: & omnes aliæ proportiones minoris inæqualitatis inter quantitates incommenſurabiles, ſint eiuſdem ſpeciej. Illæ verò ab iſtis ſpecie differunt, & conueniuntin ſolo genere proportionalis irrationalis ſubiecto ſummo genere Proportionis.

Aliqui Proportionem irrationalem ita ſterilem conſiderant, vt ne quidem ſpecies iſtas duas maioris & minoris inæqualitatis commemoratas progeneraſſe putent. Sed reuerà ei tribuendas eſſe cenſeo; alia enim eſt proportio irrationalis dum maior quantitas vt antecedens cum minore comparatur; & alia dum minor quantitas vt Antecedens cum maiore confertur, licet ambæ ſint incommenſurabiles: quemadmodum ſequenti generi Rationalis proportionis tribuunt duas illas ſpecies diuerſas licet ſubalternas & genericas.

Verum quia irrationalis proportio alias ſpecies non recipit, ideo duas illas definitas particularibus numeris in ſerie iſtarum definitionum non deſignauimus, ſed ſolùm ſub numero generis irrationalis comprehendere noluimus.

*Proportio autem rationalis diuiditur primò in Proportionem Æqualitatis, & Inæqualitatis.*

HÆc ſunt duo prima capita proportionis Rationalis, quorum primum ſpecies eſt & non Genus, nulla enim inferiora habet præter indiuidua. Alterum verò Genus eſt ſubdiuiſum in alia plura genera, vt mox videbimus.

III.

*Æqualitatis Proportio, Eſt quæ reperitur inter æquales quantitates.*

EXempli gratia inter A palmarem, & B palmarem. Vel inter C bipedalem, & D bipalmarē. Vel inter E 20, & F 20, &c. neque vllam patitur aliam ſubdiuiſionem in alias ſpecies.

IV.

*Inæqualitatis Proportio Rationalis, Eſt quæ reperitur inter quantitates inæquales, communi aliqua menſura commenſurabiles.*

EXempli gratia inter A decempedalem, & B quadrupedalem, inæquales quantitates. Vel inter C 10, & D 4. Addidi particulas vltimas, communi aliqua menſura commenſurabiles, ad excludendam proportionem inæqualitatis irrationalem, cui non competit menſura aliqua communis inter quantitates inæquales ſuas, v. g. inter latus ac diametrum eiuſdem quadrati. Quanquam ſi inæqualitatis proportio intelligatur definita ſubdita generi proportionis Rationalis, non ſint neceſſariæ illæ particulæ additæ: verùm illas addidi ad maiorem diſtinctionem & claritatem, tum ad ſoluendam dubitationem quæ Tyronibus faſtidium aliquod parere poſſet.

Porrò communis menſura quantitatum allatarum in exemplo, erit binarius, qui quinquies metietur maiorem quantitatem 10, & minorem 4, bis. Vel ſaltem erit vnitas quæ metietur decies maiorem, & quater minorem.

*Inæqualitatis Rationalis hoc genus, ſecatur in alia inferiora genera ſubdiuidenda ſingula in alia quinque genera diuerſa. Primum verò huius biſſectionis eſt Maioris inæqualitatis, Alterum verò minoris Inæqualitatis, ſupponentia genus inæqualitatis rationalis definitum præcedente definitione 4.*

PRopterea quòd comparari poteſt quantitas maior cum minore, vel minor cum maiore: ita vt maior ſit Antecedens, & minor conſequens; vel minor antecedens, & maior conſequens; oriuntur iſta duo diuerſa genera proportionis inæqualitatis rationalis, ſicuti etiam alia oriebantur capita proportionis inæqualitatis irrationalis allata inter declarandum definitionem ſecundam huius digreſſionis ſecundæ.

V.

*Maioris inæqualitatis proportio Rationalis, Eſt quando comparatur maior quantitas Antecedens cum minore conſequente, commenſurabiles inter ſe.*

VI.

*Minoris inæqualitatis proportio Rationalis, Eſt quando comparatur minor quantitas Antecedens cum maiore conſequente, commenſurabiles inter ſe.*

VIdes, quomodo hæ duæ definitiones maioris & minoris inæqualitatis proportionum rationalium diſtinguātur ab alijs duabus definitionibus irrationalis proportionis

tionis maioris ac minoris inæqualitatis: iſtæ enim pertinent ad quantitates relatas inæquales commenſurabiles inter ſe; illæ vero ad quantitates incommenſurabiles.

*Maioris inæqualitatis Proportio Rationalis ſubdiuiditur in quinque alia genera inferiora diuerſa, in multiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem, multiplicem ſuperparticularem, & multiplicem ſuperpartientem.*

*Minoris inæqualitatis Proportio Rationalis etiam ſubdiuiditur in totidem genera inferiora diuerſa, in ſubmultiplicem, ſubſuperparticularem, ſubſuperpartientem, ſubmultiplicem ſubſuperparticularem, ſubmultiplicem ſubſuperpartientem.*

HÆc genera quinque tàm proportionis maioris quàm minoris inæqualitatis rationalis non ampliùs in genera alia ſecantur, ſed ſingula in ſpecies ſyncathegorematicè infinitas, & ſingulæ iſtæ ſpecies in indiuidua etiam ſyncathegorematicè infinita. Hæc porrò genera poſtmodùm definiemus.

Confirmatur quod in collectionibus noſtris tertia & quarta diximus in fine digreſſionis noſtræ primæ, Particulam ſub præpoſitam nominibus proportionum genericis & ſpecificis, indicare proportionem minoris inæqualitatis & quidem rationalis inter quantitates commenſurabiles tantum: nomina vero huiuſmodi abſoluta illa particula ſub, denotare proportionem maioris inæqualitatis inter quantitates cōmenſurabiles. Ratio verò cur idem non ſit in proportionibus maioris & minoris inæqualitatis irrationalis, eſt, quia illa non ſunt genera ſed ſpecies: & quia proportio inter iſtas quantitates incommenſurabiles numeris exprimi non poteſt. Porrò in prædictis collectionibus ſermo tantum erat de multiplicibus & æquemultiplicibus & inæquemultiplicibus, tùm de ſubmultiplicibus & ſubæquemultiplicibus, & ſubinæquemultiplicibus, in quibus omnibus obſeruationes adnotatæ veræ erant.

Non diſſimulanda videtur alia aliorum Diuiſio ac ſubdiuiſio ſummi generis proportionum. Primò in proportionem Æqualitatis & Inæqualitatis. Æqualitatis in Rationalem tantum. Inæqualitatis in Rationalem & Irrationalem. Rationalis in proportionem maioris inæqualitatis & minoris inæqualitatis. Irrationalis in proportionem maioris item inæqualitatis & minoris inæqualitatis; & hæ duæ poſtremæ amplius non ſubdiuiduntur: aliæ vero duæ ad rationalem pertinentes ſingulæ in quinque enumerata à nobis genere multiplicis, ſuperparticularis, ſuperpartientis mutiplicis ſuperparticularis, multiplicis ſuperpartientis, ſub genere proportionis maioris inæqualitatis rationalis: & ſubmultiplicis, ſubſuperparticularis, ſubſuperpartientis, ſubmultiplicis ſubſuperparticularis, ſubmultiplicis ſubſuperpartientis, ſub genere minoris inæqualitatis rationalis coordinatæ. Hæc vero ſingula genera quinque in infinitas ſpecies.

Nobis arridet magis prima diuiſio allata, Qui voluerit hanc ſecundam amplecti, per me liceat.

Notandum eſt quinque genera poſtrema tam maioris quam minoris Inæqualitatis rationalis, ita eſſe vt tria prima ſimplicia dici poſſint, duo vero poſtrema compoſita; hoc eſt multiplicis ſuperparticularis, & multiplicis ſuperpartientis, ex multiplici & ſuperparticulari vel ſuperpartiente: Tum ſubmultiplicis ſubſuperparticularis, & ſubmultiplicis ſubſuperpartientis, & ex ſubmultiplici & ſuperparticulari vel ſubſuperpartiente.

Iam verò quia deinceps erit ſermo frequens de denominatoribus proportionum rationalium maioris inæqualitatis & minoris inæqualitatis; tùm etiam æqualitatis; definiendum cenſeo denominatorem huiuſmodi, antequam definiamus illa poſtrema genera recenſita, & earum ſpecies aliquas ex innumeris ad quarum exempla reliquæ numero infinitæ definiri poſſint.

## VII.

*Denominator Proportionis ſpecificæ Rationalis, Eſt numerus fractus redactus ad minimos terminos; vel duo numeri fracti, vel vnus numerus fractus ad quem reducti ſint illi duo fracti ſub minimis terminis: ita vt eorum numeratores ac denominatores facilius indicent genus ac ſpeciem inter duas quantitates commenſurabiles datas.*

QVia ex natura Proportiones ſpecificæ Rationalis, numeri explicant proportiones inter quantitates comparabiles commenſurabiles; & omnis ratio ſeu proportio inter duas quantitates eiuſdem generis comparabiles exiſtat per def. 3. Authorum huius libri: neceſſario denominator proportionum rationalium indicare debens genus ac ſpeciem inter iſtas quantitates duas, requirit duos numeros quorum vnus ſit loco vnius quantitatis antecedentis, & alter loco alterius quantitatis conſequentis; ſic etenim apparebit in illis duobus numeris ſpecies & genus proportionis ſecundum quam referuntur duę illæ quantitates commenſurabiles. Quia vero numerus fractus neceſſariò poſtulat duos numeros,

meros, vnum inſra alium intermedia rectalineola, ideo vti diximus debet denominator eſſe fractus numerus vel duo fracti, vel vnus fractus continens duos fractos numeros; tùm quia vt diſtingueretur à duobus numeris vnum poſt alium poſitis more ordinario, ad tollendam omnem dubitationem, ſic etenim numerator huius fracti numeri erit loco vnius quantitatis, & denominator loco alterius. Et quia inter genera illa enumerata ſuperius, & ſpecies eorum explicandas, quædam ſunt proportionum ſimplicium, vt tria prima, quædam vero proportionum compoſitarum; ideo denominatores ſimplicium vnicum ſolum numerum fractum pro denominatore exigunt, duos vero fractos compoſitarum. Et quia duo numeri fracti reduci poſſunt ad vnicum ſolum, propterea nonnulli volunt denominatores quarumcumque proportionum huiuſmodi etiam compoſitarum eſſe vnicum fractum numerum. Porro quia faciliùs intellectus percipit rationem quam habent minimi numeri ſeu termini, quàm maiores & maiores, ideo poſuimus in definitione fractos illos numeros qui debent eſſe denominatores proportionum prædictarum, redactos ad minimos terminos, vt breuius ac facilius exprimant genus ac ſpeciem proportionis. Et ſic manet explicata definitio denominatorum proportionum in genere, quorum exempla poſtmodùm proferemus.

Notandum primò aliquos Authores vocare denominatores proportionum prædictarum, quantitates earum; hoc ſenſu, ita vt explicent & exprimant valorem illarum, ſeu quantum valeant, quod videtur valde metaphoricum.

Notandum ſecundò. Alios definire denominatores huiuſmodi proportionum hac ratione, ſunt minimi termini ſeu numeri proportionis propoſitæ: quæ definitio accedit ad generalem noſtram, nam numerus fractus redactus ad minimos terminos; ſeu duo numeri fracti redacti ad vnum ſub minimis terminis, eſt minimus terminus proportionis propoſitæ. Verum non videtur hæc definitio explicare finem & officium denominatoris, ſicuti noſtra allata; illaque propterea cenſenda eſt proprietas denominatoris.

## VIII.

*Proportio multiplicis, Eſt Proportio maioris quantitatis ad minorem, quando minor metitur maiorem.*

## IX.

*Proportio ſubmultiplicis, Eſt proportio minoris quantitatis ad maiorem, quando minor metitur maiorem.*

OCtaua definitio diſtinguitur ab ſecunda Eudoxi & Euclidis; nam in illa ſecunda deſinita eſt quantitas multiplex, in iſta vero octaua definitur proportio multiplicis.

Simili ratione nona iſta definitio diuerſa eſt ab definitione quarta primæ digreſſionis noſtræ, in qua deſcribebatur quantitas ſubmultiplex; in hac vero nona definitur proportio ſubmultiplicis.

Vno verbo in definitione ſecunda Euclidis & quarta digreſſionis noſtræ primæ, definiebantur ſubiecta rationum ſeu proportionum; in his vero octaua & nona, ipſæ proportionis ſeu relationes ſeu reſpectus multiplicis & ſubmultiplicis deſcribuntur.

Octaua etiam definitio deſcribit proportionem maioris inæqualitatis rationalis, & nona minoris inæqualitatis rationalis.

Species harum proportionum multiplicis & ſubmultiplicis ſunt infinitæ Syncathegorematicè, quia minor quantitas poteſt metiri maiorem aut bis, aut ter, aut quater, & ſic infinities procedendo per ſingulos numeros vnitate ſe mutuò continuò ſuperantes Syncathegorematicè infinitos. Vnde orientur denominatores denominantes ſpecies diuerſas harum proportionum duplæ, triplæ, quadruplæ, quintuplæ &c. ſi comparetur maior quantitas vt antecedens cum minore conſequente: ſubduplæ vero, ſubtriplæ, ſubquadruplæ &c. ſi comparetur minor quantitas vt antecedens cum maiore conſequente: & denominatores indicantes proportionum illarum ſpecies erunt huiuſmodi $\frac{2}{1}\ \frac{3}{1}\ \frac{4}{1}$, vel $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$. Et ſic de reliquis: illius quidem numerus integer habens vnitatem ſubiectam intermedia recta; huius vero vnitas habens integrum numerum ſubditum intermedia recta. ambo vero fracti numeri.

Quæ omnes ſpecies definiri poterunt ad inſtar iſtarum duarum, quas exempli gratia definiemus.

*Proportio dupla, eſt Proportio multiplicis maioris quantitatis ad minorem, quando minor metitur maiorem bis.*

*Proportio ſubdupla, eſt Proportio ſubmultiplicis minoris quantitatis, ad maiorem, quando minor metitur maiorem bis.*

EXEMPLA

## *EXEMPLA SPECIERVM ALIQVARVM PROprotionis multiplicis & ſubmultiplicis.*

| Denominatores | Superiores referuntur ad inferiores. | | | | | | Denominationes |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{1}$ | 2<br>1 | 4<br>2 | 6<br>3 | 8<br>4 | 10<br>5 | 12<br>6 | Duplæ |
| $\frac{1}{2}$ | 1<br>2 | 2<br>4 | 3<br>6 | 4<br>8 | 5<br>10 | 6<br>12 | Subduplæ |
| $\frac{3}{1}$ | 3<br>1 | 6<br>2 | 9<br>3 | 12<br>4 | 15<br>5 | 18<br>6 | Triplæ |
| $\frac{1}{3}$ | 1<br>3 | 2<br>6 | 3<br>9 | 4<br>12 | 5<br>15 | 6<br>18 | Subtriplæ |

X.

*Proportio ſuperparticularis, Eſt proportio maioris inæqualitatis rationalis, quando minor metitur maiorem ſemel, & ſupereſt aliquid maioris quod eſt pars minoris metientis.*

X I.

*Proportio ſubſuperparticularis, Eſt proportio minoris inæqualitatis rationalis, quando minor metitur maiorem ſemel, & ſupereſt aliquid maioris quod eſt pars minoris metientis.*

HArũ proportionũ ſunt ſpecies infinitæ, pro varietate infinita partis maioris quãtitatis, quæ pars nõ menſuratur à minore, ſed illius eſt etiam pars aliqua, ſemiſſis videlicet, aut tertia, aut quarta pars, & ſic de cęteris.

Denominator cuiuſuis harum ſpecierum vel duplex eſt fractus numerus, vel vnus tantum æquiualens illis duobus. Quando duplex eſt fractus, primus ſemper eſt vnitas ſuperpoſita vnitati intermedia recta linea, vt indicetur maior quantitas ſemel menſurari à minore, vt vnitas ſemel vnitatem metitur; alter verò fractus habet vnitatem ſuperpoſitam numero alteri integro intermedia recta, ad indicandam partem minoris non menſuratam ab minore quantitate, reſiduam in maiore: atque ſecundam hanc partem relatam ad minorem quantitatem oritur omnis diuerſitas ſpecifica in hiſce proportionibus. Exempla aliquot proferamus: Ponatur minor quantitas 2, metiri maiorem 3, ſemel; hæc menſuratio ſignificabitur numero iſto fracto $\frac{1}{1}$; vt enim vnitas ſuperpoſita menſuratur ſemel ab ſuppoſita, linea intermedia recta, ita etiam minor quantitas 2 metitur maiorem 3 ſemel: Et quia ſupereſt vnitas de maiore 3 quam vnitatem non metitur minor data 2, ſed eſt eius pars dimidia, vel ex eius partibus duabus æqualibus altera; ideo alio fracto numero iſto $\frac{1}{2}$ exprimitur; atque adeò tota ſpecies proportionis exprimitur iſtis duobus fractis numeris diſtinctis $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$: & ſic de alijs, ſiue comparetur maior quantitas vt antecedens cum minore conſequente; ſiue minor vt antecedens cum maiore conſequente Quia verò illi duo numeri fracti, & quicumque alii duo huiuſmodi reduci poſſunt ad vnicum fractum: v.g. illi duo $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ ad iſtum $\frac{3}{2}$ æquipollentem illis; ideo etiam vti diximus def. 7. huius digreſſionis ſecundæ denominatores huiuſmodi proportionem exponi poſſunt vno fracto, ita vt breuiſſimè indicet proportionem maioris quantitatis ad minorem ſi ſit redactus ad minimos terminos vti voluimus def. cit. 7. nam numerus ſuperior maior 3 ſupra rectam lineam ſicut menſuratur ſemel ab minore 2 inferiore & ſupereſt vnitas quæ eſt pars dimidia minoris metientis 2, ſeu altera ex duabus ſuis partibus æqualibus; ita etiam indicabit quantitatem inæqualium duarum denominatarum ab hoc fracto numero, maiorem ſemel menſurari ab minore, & ſupereſſe vnam ſemiſſem minoris de maiore. Quod ſi comparetur minor quantitas vt antecedens cum maiore conſequente, huiuſmodi fractus numerus æquiualens illis duobus ita diſponetur, vt minor numerus ſupra rectam lineam ſit, & maior infra eandem rectam, ad indicandum

fieri comparationem minoris antecedentis ad maiorem conſequentem ſeu ſuppoſitam, eritque in exemplo prædicto $\frac{2}{3}$; & ſicut minor 2 numerus metitur ſemel 3 maiorem, ita etiam ſignum erit minorem quantitatem ſemel metiri maiorem, & ſupereſſe de maiore aliquid quod ſit ſemiſſis minoris.

Denominationes harum ſpecierum exprimuntur per particulas ſeſqui, vel ſubſeſqui; tùm per alias, altera, tertia, quarta, & ſic in infinitum Particula, ſeſqui, exprimit maiorem quantitatem comparari vt Antecedens cum minore quantitate, & minorem ſemel menſurare maiorem: Particula alia ſubſeſqui, ſignificat minorem quantitatem conferri cum maiore conſequente, ob præpoſitam particulam ſub, de qua priùs dixeramus in collectione 3, ad finem digreſſionis noſtræ primæ, & propter eandem aliam particulam ſeſqui, indicium eſt minorem quantitatem ſemel maiorem metiri. Quod ſi addatur particula altera, ſignum eſt ſupereſſe aliquid de maiore quantitate, quod ſit pars minoris metientis altera è duabus ſuis æqualibus, vel ſemiſſis eius vt iam dictum eſt: Si verò addatur particula, tertia, indicium eſt ſupereſſe de maiore quantitate aliquid, quod ſit tertia pars minoris metientis. Si quarta, indicatur id quod ſupereſt de maiore eſſe quartam partem minoris metientis. Et ſic de aliis in infinitum.

Age verò definiamus duas ſpecies harum proportionum, vt ad inſtar illarum reliquæ poſſint deſcribi.

***Proportio ſeſquialtera, Eſt proportio ſuperparticularis, quando minor metitur maiorem ſemel, & ſupereſt aliquid de maiore quod eſt pars minoris dimidia, ſeu ex duabus æqualibus minoris partibus altera.***

***Proportio ſubſeſquialtera, Eſt proportio ſubſuperparticularis quando minor metitur maiorem ſemel, & ſupereſt aliquid de maiore quod eſt pars minoris dimidia, ſeu ex duabus eius partibus æqualibus altera.***

Diſtinguntur iſtæ duæ definitiones per particulas ſuperparticularis, & ſubſuperparticularis; illa enim indicat proportionem maioris inæqualitatis, hæc minoris inæqualitatis, vt diximus in definitionibus 10. & 11.

## *EXEMPLA SPECIERVM ALIQVARVM PROportionis ſuperparticularis & ſubſuperparticularis.*

| Denominatores | Superiores referuntur ad inferiores | | | | | | Denominationes |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}$ vel $\frac{3}{2}$ | 3<br>2 | 6<br>4 | 9<br>6 | 12<br>8 | 15<br>10 | 18<br>12 | Seſquialteræ |
| $\frac{1}{1}\,\frac{1}{2}$ vel $\frac{2}{3}$ | 2<br>3 | 4<br>6 | 6<br>9 | 8<br>12 | 10<br>15 | 12<br>18 | Subſeſquialteræ |
| $\frac{1}{1}\,\frac{1}{3}$ vel $\frac{4}{3}$ | 4<br>3 | 8<br>6 | 12<br>9 | 16<br>12 | 20<br>15 | 24<br>18 | Seſquitertiæ |
| $\frac{1}{1}\,\frac{1}{3}$ vel $\frac{3}{4}$ | 3<br>4 | 6<br>8 | 9<br>12 | 12<br>16 | 15<br>20 | 18<br>24 | Subſeſquitertiæ |

XII.

***Proportio ſuperpartientis, Eſt proportio maioris inæqualitatis rationalis, quando minor quantitas metitur maiorem ſemel, & ſupereſt aliquid maioris quod eſt partes minoris metientis.***

XIII.

***Proportio ſubſuperpartientis, Eſt proportio minoris inæqualitatis rationalis, quando minor quantitas metitur maiorem ſemel, & ſupereſt aliquid maioris quod eſt partes minoris metientis.***

Propter

PRopter illud aliquid quod ſupereſt de maiore quantitate menſurata à minore ſemel, & eſt partes diuerſæ metientis minoris quantitatis etiam diuerſæ, oriuntur innumeræ ſpecies harum proportionum ſuperpartientis & ſubſuperpartictis definitarum: nam poteſt eſſe duæ partes trium, vel duæ partes è quinque, vel duæ partes è ſeptem, & ſic in infinitum aliarum quantitatum duæ partes. Poteſt etiam illud reſiduum maioris eſſe tres partes è quatuor, vel tres è quinque, vel tres è ſeptem, & ſic in infinitum aliarum quantitatum tres partes. Et ſic ex duobus capitibus exoriuntur ſpecies diuerſæ horum generum.

Denominator ſpecierum iſtarum erit duplex numerus fractus, vel vnus fractus æquiualens his duobus, redactus tamen ad minimos terminos. Primus fractus è duobus erit huiuſmodi $\frac{1}{1}$ vnitas ſuperpoſita alteri vnitati intermedia recta linea, indicans minorem quantitatem ſemel metiri maiorem, ſicut vnitas metitur aliam vnitatem ſemel: Alter verò fractus indicabit ſuo numeratore reſiduum maioris, quod ſit partes minoris metientis; & ſic numerator ſignificabit ſuis vnitatibus partes minoris quantitatis expreſſæ per vnitates denominatoris huius fracti numeri: hoc eſt ſi ſupererant de maiore duæ vnitates, & minor metiens erat binarius, ſic deſignabitur iſte denominator $\frac{2}{3}$, videlicet duæ partes ternarij metientis. Quod ſi ſupererunt quinque vnitates de maiore, & minor metiēs erat ſenarius, ſic deſignabitur iſte denominator ſecundus $\frac{5}{6}$. Et ſic de aliis proportione ſeruata dicendum erit. Et quia duo quilibet numeri fracti reduci poſſunt ad vnum ſimplicem fractum: v.g. duo iſti $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{3}$ ad iſtum vnum $\frac{5}{3}$ æquiualentem illis duobus, ideo etiam iſte fractus vnius poteſt denominator vnius ſpeciei proportionis ſuperpartientis.

Notandum eſt quod ſi comparetur maior quantitas cum minore conſequente & velimus vti denominatore vnico æquiualente prædictis duobus, tunc oportebit maiorem numerum eſſe numeratorem fracti, & minorem eſſe denominatorem locum tenentem minoris quantitatis cōſequentis vel ſubditæ, vt in exemplo $\frac{5}{3}$ allato. Quod ſi conferatur minor quantitas vt antecedens cum maiore conſequente, oportebit numeratorem fractionis conſtituere minorem numerum referentem minorem quantitatem metientem, & denominatorem conſtituere maiorem numerum, v.g. in eodem exemplo $\frac{3}{5}$. Quod ſi vtamur pro denominatore ſpecierum horum generum, duobus fractis, eodem modo conſtituentur tam pro ſpeciebus ſuperpartientis, quàm ſubſuperpartientis.

Denominationes erunt huiuſmodi, primus fractus numerus $\frac{1}{1}$ è duobus, exprimetur per particulam ſuper, quando comparabitur maior quantitas vt antecedens cum minore: quando verò conferetur minor vt antecedens cum maiore conſequente, exprimetur particula ſubſuper, & in duobus his caſibus indicabit minorem quantitatem ſemel metiri maiorem. Præterea ad exprimendum in hoc negotio ſpecifico harum proportionum, ſecundum numerum fractum, componendum erit participium ex numero numeratoris & verbo partior, poſt quod in accuſatiuo ponendus erit numerus denominatoris huius fracti numeri, & quidem vt ſolent in fœminino genere. Exemplum ſit idem quod prius $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{3}$. Dicemus ſuperbipartientem tertias, vel ſubſuperbipartientem tertias, illud pro ſpeciei ſuperpartientis, iſtud pro ſpecio ſubſuperpartientis. Denominatio verò ab vnico fracto $\frac{5}{3}$ æquiualente illis duobus, ſumenda erit, præuidendo quotnam partes minoris ſuperſint de maiore ad formanda participia, & ponendo in accuſatiuo fœminino minorem numerum; præponendo particulam ſub toti nomini denominationis ſi comparetur minor quantitas vt antecedens cum maiore conſequente. Et in reducendis illis duobus fractis ad vnicum pro denominatore ſpecificæ proportionis ſubſuperpartientis illi duo aſſumenda tanquam ſi eſſent proportionis ſpecificæ ſuperpartientis, ſed oportebit minorem numerum ſuperponere rectæ lineæ, & maiorem ſupponere eidem rectæ.

Definiamus duas iſtas ſpecies proportionis ſuperbipartientis tertias, & ſubſuperbipartientis tertias; vt ad inſtar illarum reliquę deſcribi poſſint.

*Proportio ſuperbipartientis tertias, Eſt proportio ſuperpartientis, quando minor ſemel metitur maiorem, & id quod ſupereſt de maiore, eſt duæ tertiæ partes minoris.*

*Proportio ſubſuperbipartientis tertias, Eſt proportio ſubſuperpartientis, quando minor ſemel metitur maiorem, & id quod ſupereſt de maiore, eſt duæ tertiæ partes minoris.*

# *EXEMPLA SPECIERVM ALIQVARVM PROportionis ſuperpartientis & ſubſuperpartientis.*

| Denominatores | Superiores referuntur ad inferiores | | | | | Denominationes |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}\frac{2}{3}$ vel $\frac{5}{3}$ | 5<br>3 | 10<br>6 | 15<br>9 | 20<br>12 | 25<br>15 | Superbipartientis tertias |
| $\frac{1}{1}\frac{2}{3}$ vel $\frac{3}{5}$ | 3<br>5 | 6<br>10 | 9<br>55 | 12<br>20 | 15<br>25 | Subſuperbipartientis tertias |
| $\frac{1}{1}\frac{5}{7}$ vel $\frac{12}{7}$ | 12<br>7 | 24<br>14 | 36<br>25 | 48<br>28 | 60<br>35 | Superquintupartientis ſeptimas. |
| $\frac{1}{1}\frac{5}{7}$ vel $\frac{7}{12}$ | 7<br>52 | 14<br>24 | 21<br>36 | 28<br>48 | 35<br>60 | Subſuperquintupartientis ſeptimas. |

XIV.

***Proportio multiplicis ſuperparticularis, Eſt proportio maioris inæqualitatis, quando minor quantitas metitur maiorem pluries, & ſupereſt aliquid maioris, quod eſt pars minoris metientis.***

XV.

***Proportio ſubmultiplicis ſubſuperparticularis, Eſt proportio minoris inæqualitatis, quando minor quantitas metitur maiorem pluries, & ſupereſt aliquid maioris, quod eſt pars minoris metientis.***

ORiuntur ex his generibus infinitæ ſpecies duas ob cauſas, Prima eſt ob infinitas multiplicitates, vel ſubmultiplicitates, de quibus diximus in definitionibus 8. & 9. huius digreſſionis ſecundæ. Altera eſt ob infinitam varietatem partis diuerſæ exuperantis in maiore quantitate comparatæ cum minore metiente, de qua mentio facta eſt in definitionibus 10. & 11. huius digreſſionis ſecundæ. Vnde proportiones huiuſmodi dictæ ſunt compoſitæ ex multiplici & ſuperparticulari, vel ex multiplici & ſubſuperparticulari. In quibus notandum eſt iſtud peculiare, vt manente eadem multiplicitate, varientur ſpecies ob diuerſitatem innumeram partis prædictæ; vel manente eadem parte, ob infinitam varietatem multiplicitatis. Exempla profero, Quantitas vt 10, comparata cum quantitate vt 4, dupla erit ſeſquialtera; quia maior multiplex eſt minoris, nam 4 bis metitur maiorem, & ſupereſt binarius maioris qui eſt ſemiſſis minoris quatuor. Præterea quantitas vt 7 comparata cum quantitate vt 3, dupla erit ſeſquitertia; quia maior multiplex eſt minoris, nam 3 bis metitur maiorem 7, & vnitas ſuperflua in hac maiore eſt pars tertia minoris metientis. Atque in his duobus exemplis vides manente eadem multiplicitate dupli, variari ſpecies, propter diuerſitatem partis alteræ vel tertiæ. Quod ſi aſſumamus quantitatem vt 14, & aliam vt 4, maior ad minorem obtinebit proportionem triplam ſeſquialteram, quia maior eſt multiplex minoris, nam minor 4 metitur ter maiorem 14, & binarius excedens in maiore eſt ſemiſſis minoris metientis: Ad hæc ſi comparetur quantitas vt 58 ad quantitatem vt 4, erit quadrupla ſeſquialtera illius; quia maior 18 eſt multiplex minoris 4, nam minor metitur quater maiorem, & binarius ſuperfluus in maiore eſt pars altera è duabus æqualibus minoris metientis: atque ita manifeſtum fit variari ſpecies manente eadem parte altera minoris, ob diuerſas multiplicitates tripli & quadrupli.

Hinc fit propterea vt duo ſint numeri fracti pro denominatore harum proportionum; primus qui indicet multiplicitatem ſpecificam, vti in ſpeciebus multiplicis proportionis, vel ſubmultiplicitatem ſpecificam, vti in ſpeciebus ſubmultiplicatis: Alter verò qui denotet ſpeciem ſuperparticularis vel ſubſuperparticularis. Et quia illi duo reduci poſſunt ad ſimplicem fractum numerum, propterea vti diximus in definitione 7, denominatoris, denominatores proportionum ſpecificarum horum generum, poſſunt eſſe ſimplices fracti numeri.

Agedum, definiamus ſpeciem vnam horum generum, vt ad inſtar illarum reliquæ innumeræ deſcribi poſſint.

Propor-

***Proportio dupla ſeſquialtera, Eſt proportio multiplicis ſuperparticularis, quando minor metitur maiorem bis, & ſupereſt aliquid de maiore, quod eſt pars altera ſeu ſemiſſis minoris metientis.***

***Proportio ſubdupla ſubſeſquialtera, Eſt proportio ſubmultiplicis ſubſuperparticularis, quando minor metitur maiorem bis, & ſupereſt aliquid de maiore quod eſt minoris metientis pars altera ſeu ſemiſſis.***

DEnominationes harum ſpecierum exprimuntur per denominationes tàm multiplicium quàm ſuperparticularium proportionum; vel per denominationes iàm ſubmultiplicium, quàm ſubſuperparticularium proportionum; de quibus egimus in definitionibus 8. 9. 10. 11. digreſſionis huius ſecundæ.

## *EXEMPLA ALIQVOT SPECIERVM PROportionum multiplicis ſuperparticularis, & ſubmultiplicis ſubſuperparticularis.*

| Denominatores | Superiores referuntur ad inferiores | | | | | Denominationes |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{1}\ \frac{1}{2}$ vel $\frac{5}{2}$ | 5<br>2 | 10<br>4 | 15<br>6 | 20<br>8 | 25<br>10 | Dupla Seſquialtera |
| $\frac{1}{2}\ \frac{2}{1}$ vel $\frac{2}{5}$ | 2<br>5 | 4<br>10 | 6<br>15 | 8<br>20 | 10<br>25 | Subdupla Subſeſquialtera |
| $\frac{5}{1}\ \frac{1}{3}$ vel $\frac{16}{3}$ | 16<br>3 | 32<br>6 | 48<br>9 | 64<br>12 | 80<br>15 | Quintupla Seſquitertia |
| $\frac{1}{5}\ \frac{3}{1}$ vel $\frac{3}{16}$ | 3<br>16 | 6<br>32 | 9<br>48 | 12<br>64 | 15<br>80 | Subquintupla Subſeſquitertia |

### XVI.

***Proportio multiplicis ſuperpartientis, Eſt proportio maioris inæqualitatis, quando minor quantitas metitur maiorem pluries, & ſupereſt aliquid maioris, quod eſt partes minoris metientis.***

### XVII.

***Proportio ſubmultiplicis ſubſuperpartientis, Eſt proportio minoris inæqualitatis, quando minor quantitas metitur maiorem pluries, & ſupereſt aliquid maioris, quod eſt partes minoris metientis.***

EX hiſce generibus procedunt infinitæ ſpecies duplici ex capite. Primum eſt ob innumeram diuerſitatem multiplicitatis. ſecundum ob infinitam varietatem partiū minoris quantitatis quæ ſuperfluæ ſunt in maiore quantitate dimenſâ ab minore. Poſſuntque oriri infinitæ ſpecies manente eadem multiplicitate, ob varietatē partium dictarum: vel manentibus hiſce partibus eiſdem, ob multiplicitatem variam. Exempla nonnulla producam, Quantitas vt 8 comparata cum quantitate vt 3, eſt dupla ſuperbipartiens tertias; quia maior illa 8, eſt multiplex minoris 3, hæc enim illam metitur bis, & ſuperſunt duæ tertiæ reſpectu minoris 3: Præterea alia quantitas vt 11 comparata cum minore 4. erit dupla ſupertripartiens quartas, quia maior 11 eſt dupla minoris 4, nam hæc illam metitur bis; ſed propter tres vnitates ſuperfluas quæ ſunt tres quartæ minoris variatur ſpecies. Iam vero aſſumendo aliam quantitatem vt 11, comparatam cum 3, erit tripla ſuperbipartiens tertias, quia illa maior multiplex eſt minoris, nam 3 metitur maiorem 11, ter, & duæ vnitates exuperantes cōparatæ cum minore 3, ſunt duæ tertiæ illius: Inſuper aſſumendo aliam quantitatem vt 14, collatam cum eadem minore

nore 3, erit illius quadrupla ſuperbipartiens tertiam, quia maior eſt minoris multiplex, nam hæc minor metitur quater maiorem illam, & duæ vnitates reſiduæ de maiore ſunt duæ tertiæ minoris. Vides igitur variari ſpecies multiplicitatis manentibus eiſdem partibus minoris: & variari ſpecies ob varias partes minoris manente eadem multiplicitate.

Denominator cuiuſlibet ſpeciei horum generum eſt duplex numerus fractus, quorum primus indicat ſpeciem multiplicis vel ſubmultiplicis vti in ſpeciebus multiplicis vel ſubmultiplicis proportionis; alter verò denotat ſpeciem ſuperpartientis vel ſubſuperpartientis: ex quibus duabus ſpeciebus componuntur iſtæ proportiones. Exempli gratia denominatores proportionis duplæ ſuperbipartientis tertias erunt iſti duo numeri fracti $\frac{2}{1}$ $\frac{2}{3}$, & ſubduplæ ſubſuperbipartientis tertias, erunt iſti alij duo numeri fracti $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$. Quod ſi duo primi reducãtur ad vnum ſimplicem denominatorem, erit huiuſmodi $\frac{8}{3}$ qui æquiualebit illis duobus $\frac{2}{1}$ $\frac{2}{3}$, atque ita poterit exhiberi denominator huius proportionis in vno numero fracto. Quod ſi duo alij fracti numeri poſtremi $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ qui ſunt denominatores proportionis ſubduplæ ſubſuperbipartientis tertias, debeant reduci ad vnum ſimplicem fractum qui ſit denominator vnicus huius proportionis datæ; oportebit primum accipere tanquam ſi eſſet proportionis duplæ, vel ambos accipere tanquã ſi eſſent denominatores huius ſpeciei datę in genere maioris inæqualitatis, eoſque reducere ad vnum; ſed oportebit minorem numerum ſuperponere rectæ lineæ, & maiorem ſupponere, hac ratione $\frac{3}{8}$ in exemplo hoc.

Denominationes harum ſpecierum ſumentur ab denominatoribus, efferendo primo loco multiplicitatem vel ſubmultiplicitatem, & ſecundo loco ſuperpartientis ſpeciem vel ſubſuperpartientis, illam primus numerus fractus indicat, hanc ſecundus. Quando verò vnus eſt ſolum denominator redactus ad minimos terminos, oportebit præuidere proportionem maioris ad minorem, vel contra, & eam efferre, vt in exemplis ſupra allatis videre eſt.

Definiemus duas ſpecies huiuſmodi, v.g. Duplæ ſuperbipartientis tertias, & ſubduplæ ſubſuperbipartientis tertias; vt ad exemplar illarum poſſint definiri quæcumque datæ ſub his generibus.

*Proportio dupla ſuperbipartiens tertias, Eſt proportio multiplicis ſuperpartientis, quando minor metitur maiorem bis, & ſupereſt aliquid de maiore, quod eſt duæ tertiæ partes minoris.*

*Proportio ſubdupla ſubſuperbipartiens tertias. Eſt proportio ſubmultiplicis ſubſuperpartientis, quando minor metitur maiorem bis, & supereſt aliquid de maiore, quod eſt duæ tertiæ partes minoris.*

## *EXEMPLA ALIQVOT SPECIERVM MVLTIplicis ſuperpartientis & ſubmultiplicis ſubſuperpartientis.*

| Denominatores | Superiores referuntur ad inferiores | | | | Denominationes |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{1}$ $\frac{2}{3}$ vel $\frac{8}{3}$ | 8<br>3 | 16<br>6 | 24<br>9 | 32<br>12 | Dupla Superbipartiens tertias |
| $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ vel $\frac{3}{8}$ | 3<br>8 | 6<br>16 | 9<br>24 | 12<br>32 | Subdupla Subſuperbipartiens tertias |
| $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{4}$ vel $\frac{11}{4}$ | 11<br>4 | 22<br>8 | 44<br>16 | 88<br>32 | Dupla Supertripartiens quartas |
| $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ vel $\frac{4}{11}$ | 4<br>11 | 8<br>22 | 16<br>44 | 32<br>88 | Subdupla Subſupertripartiens quartas. |

HÆc de diuiſione Proportionum ac definitionibus earum, tùm denominatoribus & denominationibus ſint ſatis, ſupereſt hoc vt etiam loco definitiones proportionalitatis

litatis geometricæ, ac medietatum arithmeticarum & muſicarum proferamus, ad intelligendos Authores Geometricos antiquos & præcipuè Pappum Alexãdrinum, quos commentarijs nouis explicatos deinceps poſt iſta elementa publico dabimus. Sit ergo inter definitiones huius digreſſionis ſecundæ, ſequens

## X V I I I.

*Proportionalitas Geometrica, Eſt quando eſt idem reſpectus inter quantitates comparatas ad inuicem.*

HÆc definitio ferè conuenit cum duabus Authorum huius libri, videlicet 4, & 7. nam in quarta Proportio ſeu proportionalitas definita eſt, rationum ſimilitudo, quæ plures quàm duas quantitates exigit; ſi enim duæ ſolùm quantitates exhiberentur, inter eas vnica ratio exurgeret: quare vt ſit rationum ſimilitudo, tres ad minimum quantitates requiruntur, vti in def. 9. Authorum dictum eſt, vel quatuor; vt ſit ſimilitudo inter rationem primæ ad ſecundam, & rationem ſecundæ ad tertiam, vel tertiæ ad quartam. In ſeptima autem definitione vocantur proportionales quantitates quæ eandem ſeruant rationem inter ſe. Quare ex his duabus hæc definitio allata coaleſcit, vt ſit Proportionalitas Geometrica, quando eſt idem reſpectus inter quantitates comparatas ad inuicem; hoc eſt prima ad ſecundam obtinet eandem rationem, quàm ſecunda vt tertia ad tertiam vt quartam, vel vt tertia alia diuerſa à ſecunda ad quartam. Dicitur autem Geometrica iſta Proportionalitas, non quod ſoli Geometriæ propria ſit, nam in numeris etiam reperitur; ſed quod eam præcipuè excolant & contemplentur Geometræ.

*Diuiditur hæc proportionalitas Geometrica, in duas alias, continuam & diſcretam.*

## X I X.

*Proportionalitas Geometrica continua, Eſt quando reſpectus prima quantitatis ad ſecundam, eſt eiuſdem ſpeciei cum reſpectu ſecunda ad tertiam, & tertia ad quartam, & ſic deinceps; ita vt vna & eadem è datis, excepta prima & vltima ſit antecedens & conſequens eiuſdem ſpeciei relationis vel reſpectus.*

## X X.

*Proportionalitas Geometrica diſcreta, vel interrupta, Eſt quando reſpectus prima quantitatis ad ſecundam, eſt eiuſdem ſpeciei cum reſpectu tertia diuerſa ab ſecunda ad quartam; & ſic de alijs.*

HÆ duæ proportionalitatum Geometricarum ſpecies, ita non ſunt propriè Geometricæ quin eas conſideret Arithmeticus; ſed quia vt genus excolitur præcipuè à Geometris, ita etiam hæ ſpecies; vnde quia genus Geometricum appellatum eſt, ita etiam ſpecies Geometricæ dictæ ſunt. Diſcretæ exempla habes in tabulis appoſitis in definitionibus proportionum ſpecificarum maioris & minoris inæqualitatis rationalis. Continuæ erunt huiuſmodi, exempli gratia in ratione dupli. 32. 16. 8. 4. 2. 1. Nam vt 32 ad 16, ita 16 ad 8, & 8 ad 4, & 4 ad 2, & 2 ad 1.

## X X I.

*Continuè proportionales quantitates ſunt, quando prima ad ſecundam eandem habet rationem, quàm ſecunda ad tertiam, & tertia ad quartam, & ſic ſubinde: ita vt, vna & eadem è datis ſit Antecedens & conſequens eiuſdem ſpeciei reſpectus, excepta prima & vltima.*

## X X I I.

*Diſcretè vel interruptè, vel non continuè proportionales quantitates ſunt, quando prima ad ſecundam eandem habet rationem quàm tertia diuerſa ab ſecunda ad quartam, & ſic de alijs.*

EXempla omnia allata ſpecierum proportionum in tabulis ſunt diſcretè proportionalium quantitatum, ſi ſumantur in eadem ſerie, & ſumantur numeri relati ſuperiores ad inferiores, tanquam magnitudines, vel vt numeri. Exempla aut cõtinuè proportionalium quantitatum, ſunt eadem quæ attulimus continuæ proportionalitatis geometricæ, ad finem explicationis 19. ac 20. definitionum huius digreſſionis.

## X X I I I.

*Arithmetica medietas, quam alij impropriè proportionalitatem arithmeticam vocant, Eſt quando tres vel plures quantitates per eandem differentiam progrediuntur.*

DIcitur hæc medietas arithmetica quia in numeris ab vnitate progredientibus ſerie & ordine naturali, quos Arithmetica cõſiderat, reperitur huiuſmodi medietas; cuiuſmodi ſunt 1. 2. 3. 4. 5. &c. nam inter hos numeros ſe mutuò conſequentes eadem differẽtia vnitatis interiacet quaſi media, vnde dicitur medietas; Et non poteſt dici propria proportionalitas ſeu analogia, quam definiere noſtri Authores, rationum ſimilitudinem, quia inter illos numeros, & alios huiuſmodi ſunt differentes rationes & reſpectus.

*Hæc*

*Hac medietas Arithmetica diuiditur in continuam & diſcretam.*

XXIV.

*Medietas Arithmetica continua, Eſt quando eſt eadem differentia inter primam & ſecundam quantitatem qua eſt inter ſecundam ac tertiam, & inter tertiam & quartam, & ſic deinceps; ita vt omnes quantitates data exceptis extremis differant eadem quantitate ab immediatè vicinis.*

XXV.

*Medietas Arithmetica non continua ſiue diſcreta, eſt quando non eſt eadem differentia inter quantitates datas medias ab ſuis immediatè vicinis, ſed tantùm inter binas & binas.*

IN exemplis explicabuntur iſtæ definitiones. Sint quantitates datæ vt 3. 9. 12. 15. 18. quia inter iſtas omnes intermedias conſecutiuè mediat eadem differentia trium vnitatum, tùm etiam intet primam & immediatè ſequentem, tùm etiam inter vltimam & immediatè præcedentem: vel quod idem eſt, quia omnes extremis exceptis differunt eiſdem tribus vnitatibus ab immediatè vicinis. Erit medietas arithmetica continua.

Quod ſi dentur iſtæ aliæ quantitates vt 3 & 9, tùm vt 15 & 18, quia binæ primæ differunt tribus vnitatibus, vt duæ aliæ 3 & 9; verùm 9 & 15, immediatè vicinæ ex intermedijs non differunt eiſdem tribus vnitatibus: ideo erit medietas arithmetica non continua ſeu diſcreta.

XXVI.

*Continua quantitates ſecundùm medietatem Arithmeticam, ſunt quando omnes intermedia eadem quantitate differunt ad immediatè vicinis.*

XXVII.

*Non continua quantitates ſecundùm medietatem Arithmeticam, ſunt quando data quantitates non differunt eadem quantitate ab ſuis immediatè vicinis, ſed ſolum bina & bina.*

EXempli gratia quantitates iſtæ numeris iſtis expreſſæ 1. 4. 7. 10. 13. erunt continuæ ſecundùm medietatem arithmeticam; quia omnes intermediæ eadem quantitate vt 3, differunt ab immediatè vicinis.

At verò iſtæ 9. 12. 20. 23. non erunt continuæ ſecundùm medietatem arithmeticam; quia licet inter 9 & 12, tùm etiam inter 20 & 23, eadem ſit differentia ternarij, tamen quia inter vicinas 12 & 20, non eſt eadem differentia ternarij, ideo dicuntur non continuæ.

XXVIII.

*Muſica ſeu harmonica medietas, quam alij impropriè proportionalitatem muſicam vocant, Eſt quando tres quantitates ita diſponuntur, vt eadem ſit proportio maximi ad minimum, qua differentia inter maiores duas ad differentiam inter duas minores; ita vt nec eadem ſit differentia inter illas, ſicut in arithmetica medietate, nec eadem proportio vt in Geometrica proportionalitate.*

EXempli gratia, ſint tres quantitates vt iſti tres numeri 3. 4. 6. Differentia inter duas maiores 4 & 6, erit 2, & differentia inter duas minores 3 4. erit 1. Iam verò quia ratio maximæ 6 ad minimam 3, eſt dupla; ſicut differentiæ 2, inter duas maiores, ad 1 differentiam inter duas minores: ideo dicentur illæ tres quantitates ſecundùm medietatem muſicam vel harmonicam. Præterea inter illas non mediat eadem differentia, nec eadem ratio vt conſideranti patet.

Dicitur hæc medietas Muſica, quia huiuſmodi quantitates vel numeri ſic diſpoſiti obtinent proportiones in quibus conſonantiæ Muſicæ reperiuntur. Vt in eodem exemplo allato, inter duas maiores quantitates 6 & 4, eſt proportio ſeſquialtera, conſonantiam muſicam efficiens quia diapente ſeu quinta à Muſicis appellatur: Itẽ inter duas minores 4 & 3, quia eſt proportio ſeſquitertia, conſonantiam muſicam conſtituens quæ diateſſaron ſeu quarta nuncupatur: Denique inter extremas 6 & 3, proportio eſt dupla, conſonantiam aliam generans quæ diapaſon ſeu octaua celebratur.

Obiter parergi loco explicemus quomodo prædictæ proportiones conſonantias illas efficiant. Parentur in inſtrumento muſico duæ chordæ eiuſdem materiei & craſſitudinis, quæ extendantur ſecundùm longitudinem æqualem vna iuxta aliam modico interiecto ſpatio, & æqualiter tendantur, ita vt ſint vniſonæ dum ſimul verberantur: Præterea longitudo vnius bifariàm ſecetur, & in puncto ſectionis digito cõprimatur ſupra ſubiectum iſta ſola, ſimulque pulſentur iſtæ duæ chordæ, octauam ſeu diapaſon auribus repræſentabũt. Quod ſi vnius ex illis longitudo trifariàm diuidatur, & in extremo primæ ex his diuiſionibus fiat depreſſio eius vſque ad ſubiectum, ſimulque ambæ chordæ pulſentur, duo ſoni earum efficient conſonantiam quam muſici

vocant

vocant quintā ſeu diapente. Denique ſi vnius chordæ longitudo ſecetur in quatuor æquas partes, & in extremo primæ ex his diuiſionibus deprimatur iſtæ chorda vſq; ad ſubiectū, ſimulq; ambæ chordæ pulſetur, reſultabit ex ſonis earū conſonantia muſica diateſſaron ſeu quarta dicta. Porrò in pulſibus aut verberationibus harum chordarum pro conſonantiis quinta vel quarta, debet aduerti vt fiat in partibus earum verſus maiorem partem ſeu longiorem depreſſæ. Notādum etiam eſt per tranſennam eò eſſe auribus ſuauiores conſonātias huiuſmodi quò magis verſus medium digreſſio vnius chordæ modo prædicto fit; & inſuauiores quò magis verſus extremum fit illa depreſſio. Si quarta ingratior eſt quinta aut octaua, & quinta minus ſuauis octaua, & octaua excellentior quinta vel octaua, & quinta amœnior quarta.

Proportionalitas Geometrica, & Medietates definitæ Arithmetica & Muſica inſignes planè & admirabiles habet proprietates, de quibus agere in elementis hiſce non eſt proprium, ſed ſolum definitiones earum proferre neceſſarias ad intelligendos Authores Geometras qui de his aliquando agunt ac ſupponunt definitiones iſtas.

Et quia rationes eædem inter quantitates geometricas proportionales, poſsūt dici mediæ inter illas, ideo etiam medietas geometrica dici poteſt, ratio illa eadem ſeu eiuſdem ſpeciei inter illas quantitates. Ergò ab hac medietate, & illa Arithmetica & Muſica prędictis abſtrahere poſſumus medietatem in genere quam ſic definiemus.

### XXIX.

***Medietas eſt aliquid medium comparabile inter quantitates diuerſas.***

Dico aliquid medium cōparabile, vt excludatur ratio vnica quæ mediat inter duas quantitates quæ vt ſic non comparatur cum alio. Hæc verò definitio cōuenit medietati ſeu proportionalitati geometricæ, quæ eſt rationum ſimilitudo ex definit. 4. Authorum noſtrorum, rationes enim comparantur in ratione ſimilitudinis. Conuenit etiam medietati Arithmeticæ, nam differentia media inter duas prima quantitates debet eſſe eadem inter alias duas ſaltem vltimas, & ſic differentiæ illæ eædem comparantur. Conuenit etiā medietati Muſicæ, in qua ratio extremarum debet eſſe eadem cum ratione differentiæ duarum maiorum, & duarum minorum, vnde hæ duæ mediæ rationes comparantur.

Quæret aliquis cur in definitionibus allatis in hiſce duabus noſtris digreſſionibus, ſemper vtamur hiſce particulis vt plurimum, quando minor quantitas metitur maiorem; non autem aliis quibus nonnulli geometræ vtuntur, quando maior continet maiorem, ſemel, aut pluries, & inſuper aliquam partem aut partes minoris. Reſpondeo me vſum eſſe illis particulis potius quàm iſtis, vt magis conformes eſſent iſtæ definitiones aliis Authorum Eudoxi & Euclidis quos ſequimur, qui in definitionibus propriis præmiſſis comparando quantitates inæquales, illis formulis vtuntur, vti videre eſt in prima & ſecunda definitionibus, partis, & multiplicis. Sed non ideo cōdemnamus alias Authorum aliorum definitiones, quæ in eaſdem noſtras allatas recidunt: ſi enim vna minor quantitas metitur maiorem bis exempli gratia, & ſupereſt aliquid de maiore quod ſit pars altera minoris; etiam maior continebit minorem bis & inſuper eius dimidium: & contra ſi maior continet bis minorem & adhuc eius dimidium; etiam minor metietur maiorē bis, & quod in maiore exuperabit, erit pars altera minoris.

Iam verò quia multa ſparſim diximus ad proportionum ſpecies & genera ſpectantia, tùm etiam ad earum denominatores ac denominationes, colligenda illa duximus, & referenda in propoſitionibus ſequentibus enucleatius & vniuerſalius demonſtrandis, incluſis in hac eadem digreſſione. Sit igitur

## PROPOSITIO I.

**In definitionibus allatis in hàc digreſsione, ſpecierum infimarum proportionum, ſemper intelligenda erit definitio generum ſuperiorum, licet non apponatur, modo afferatur aliquid in definitione quod illam includat.**

Hæc propoſitio communis eſt omni definitioni ſpecificæ quæ multa ſupra ſe genera ſibi vendicat ſuperiora & ſuperiora ſubalterna & ſummum. Exempli gratia in definitione ſpeciei proportionis ſeſquialteræ, dùm dicimus eſſe proportionem ſuperparticularem, quando minor metitur maiorem ſemel, & ſupereſt aliquid de maiore quod ſit pars altera minoris: ſubintelligendum erit genus proportionis maioris inæqualitatis rationalis, quod eſt ſuperius generi proportionis ſuperparticularis, per quod definitum eſt def. 10. huius digreſſionis: nam dum affertur genus proportionis ſuperparticularis, intelligitur id omne quod de illo prædicatur, videlicet

licet ſuperius genus proportionis maioris inæqualitatis rationalis, ſub quo eſt genus proportionis ſuperparticularis. Quemadmodum dum dicitur homo, intelligitur animal, videlicet ſuperius quid homine ſub quo reponitur. Ergo in definitionibus allatis ſpecierum infimarum proportionum, ſemper intelligenda erit definitio generum ſuperiorum; licet non apponatur, modo afferatur aliquid in definitione quod illam includat.

## PROPOSITIO II.

Sub ſummo genere proportionis vel Rationis inter quantitates comparabiles, non ſunt alia genera ſubalterna ab enumeratis in hac digreſsione ſecũda.

NAm ratio quæ reperitur inter quantitates comparabiles: vel numeris exprimi nequit, vel numeris deſignari poteſt; hoc eſt, vel eſt inter quantitates incommenſurabiles, aut commenſurabiles aliqua communi menſura. Si numeris exprimi nequeat, vel eſt inter quantitates incommenſurabiles, conſtituitur genus rationis Irrationalis: ſi numeris deſignari poſſit, vel ſit inter quantitates commenſurabiles aliqua communi menſura, fit genus Rationis Rationalis.

Præterea quia quantitates incommenſurabiles comparabiles ſunt inæquales, (ſi enim eſſent æquales, commenſurabiles eſſent:) dum comparantur inter ſe, vel comparatur maior vt antecedens cum minore conſequente: vel minor vt antecedẽs cum maiore conſequente. Ex primo capite oritur genus infimum rationis irrationalis maioris inęqualitatis. Ex ſecundo verò capite, procedit genus aliud infimum rationis irrationalis minoris inæqualitatis. Et hæc duo infima genera nõ amplius ſubdiuiduntur, neque in alias ſpecies; ſuntque in vno genere illæ rationes numero tantum diuerſæ; tùm etiam in alio.

Et quia Rationalis proportio, eſt inter quantitates commenſurabiles; quæ vel ſunt æquales inter ſe, aut inæquales: ideo diſpeſcitur hoc genus Rationalis proportionis, in duo alia immediata genera, quorum primum eſt Rationis æqualitatis quod vlteriorẽ non patitur diuiſionẽ, imo neque in ſpecies alias, ſed ſemper eſt idem inter omnes quaſcumque quantitates æquales, vt inter 2 & 2. inter 100 & 100, &c. Alterum vero genus eſt Rationis Rationalis inæqualitatis, quod reperitur inter quantitates commenſurabiles inæquales.

Rurſus quia proportio inæqualitatis rationalis, vel eſt inter quantitatem maiorem antecedentem, & minorem conſequentem, commenſurabiles inter ſe; vel eſt inter quantitatem minorem antecedentem, & maiorẽ conſequentem, commẽſurabiles inter ſe: ideo ex primo fonte emanat genus rationis maioris inæqualitatis rationalis; & ex ſecundo, genus rationis minoris inęqualitatis rationalis.

Inſuper quantitas comparata maior cum minore, commenſurabilibus inter ſe: vel minor metitur maiorem pluries quàm ſemel, & nihil redũdat: vel ſolùm ſemel, & relinquitur aliquid de maiore, quod eſt pars aliqua minoris metientis: vel ſolùm etiam ſemel, & remanet aliquid de maiore, quod eſt partes aliquæ minoris metientis: vel minor metitur maiorem pluries quàm ſemel, & aliquid exuperat de maiore quod eſt pars aliqua minoris metientis: vel denique minor metitur maiorem pluries quàm ſemel, & aliquid ſupereſt de maiore, quod eſt partes aliquæ minoris metiẽtis. Aliud autem excogitari nequit: ideo ſub iſto genere proportionis Rationalis maioris inæqualitatis, reponũtur iſta quinque genera diuerſa immediata eodem ordine, quo comparatione prædictæ quinque. Primum multiplicis ex prima: Alterum ſuperparticularis ex ſecunda: Tertium ſuperpartientis ex tertia: Quartum multiplicis ex quarta: Quintum multiplicis ſuperpartiẽtis ex quinta & vltima.

Denique ſi comparetur minor vt antecedens cum maiore conſequente comparabilibus inter ſe: eodem modo vel minor metitur maiorem pluries, & nihil ſupereſt: vel minor metitur maiorem ſemel tantum, & remanet aliquid dè maiore, quod eſt pars aliqua minoris: vel minor metitur maiorem etiam ſemel tantum, & redundat aliquid in maiore, quod eſt partes aliquæ minoris metiẽtis: vel minor metitur maiorem pluries, & relinquitur aliquid de maiore, quod eſt pars aliqua minoris menſurantis: vel denique minor metitur maiorem pluries, & exuperat aliquid in maiore, quod eſt partes aliquæ minoris metientis: & nihil aliud præter iſta fingi poteſt in cõparatione minoris cum maiore: ideo quinque alia genera conſtituantur ſub illo minoris inæqualitatis rationalis, eodem ordine. Primum proportionis minoris inæqualitatis rationalis ſubmultiplicis: Alterũ ſubſuperparticularis: Tertium ſubſuperpartientis: Quartum ſubmultiplicis ſubſuperparticularis: Quintum & vltimum ſubmultiplicis ſubſuperpartientis.

Cùm autem nullæ amplius comparationes inter quantitates incommẽſurabiles cõmenſurabiles, in vniuersũ fingi ab intellectu poſſint

ſint: ideo non erunt alia genera ſubalterna ab enumeratis ſubordinata ſummo generi proportionum ſeu rationum.

## PROPOSITIO III.

**Species proportionum infinitę diuerſæ conſtitutæ ſub ſingulis quinque generibus poſtremis maioris vel minoris inæqualitatis Rationalis; inter quantitates commenſurabiles; ſunt numero infinitæ.**

NAm multiplicis, aut eſt dupla, aut tripla, aut quadrupla; & ſic in infinitum continuò procedendo. Similiter ſubmultiplicis, aut eſt ſubdupla, vel ſubtripla, vel ſub quadrupla; & ſic in infinitum. quæ ſunt ſpecies omnino diuerſæ infinitæ.

Ad hæc proportio ſuperparticularis, aut eſt ſeſquialtera, aut ſeſquitertia, aut ſeſquiquarta; & ſic in infinitum procedendo. Simili modo proportio ſubſuperparticularis, aut eſt ſubſeſquialtera, aut ſubſeſquitertia, aut ſubſeſquiquarta; & ſic in infinitum abeundo. quæ ſunt ſpecies omnino diuerſæ infinitæ.

Inſuper proportio ſuperpartiens, aut eſt ſuperbipartiens tertias, aut ſupertripartiens quartas, aut ſuperbipartiens quintas, aut ſupertripartiens quintas; & ſic in infinitũ multis modis variando partes diuerſas minoris quantitatis conſequentis. quæ ſunt ſpecies omnino diuerſæ infinitæ. Pari ratione proportio ſubſuperpartiens, aut eſt ſubſuperbipartiens ſeptimas, aut ſubſupertripartiens ſeptimas, aut ſubſuperquadrupartiens ſeptimas, aut ſubſuperquintupartiens ſeptimas, aut ſubſuperſextupartiẽs ſeptimas, aut ſubſuperbipartiens nonas, aut ſubſupertripartiens octauas; & ſic in infinitum variis modis accipiendo partes minoris quantitatis antecedentis. quæ ſunt ſpecies variæ infinitæ.

Præterea proportio multiplex ſuperparticularis, aut eſt dupla ſeſquialtera, aut tripla ſeſquialtera, aut quadrupla ſeſquialtera; & ſic in infinitum ſumendo multiplices manente eadem ſuperparticulari: vel dupla ſeſquitertia, vel dupla ſeſquiquarta, vel dupla ſeſquiquinta; & ſic infinities accipiendo partem minoris conſequentis diuerſam, manente eadem multiplicitate. Pari arte proportio ſubmultiplicis ſubſuperparticularis, aut eſt ſubdupla ſeſquialtera, vel ſubdupla ſeſquitertia, & ſic innumeris vicibus accipio partem diuerſam minoris antecedentis, manente eadem ſubmultiplicate: vel ſubdupla ſubſeſquiquarta, vel ſubtripla ſubſeſquiquarta, vel ſubquadrupla ſubſeſquiquarta, variando infinities ſubmultiplicitatem, manente eadem ſpecie ſubſuperparticularis, quæ ſunt ſpecies variis modis infinitæ.

Deniq; e proportio multiplex ſuperpartiens, aut eſt dupla ſuperbipartiens tertias, vel dupla ſupertripartiens quartas, vel dupla ſuperbipartiens quintas, vel dupla ſupertripartiens quintas, vel dupla ſuperquadrupartiens quintas; & ſic infinitas varias partes aſſumendo minoris, manente eadem multiplicitate: vel dupla ſuperbipartiens tertias, vel tripla ſuperbipartiens tertias; & ſic innumeras aſſumendo multiplicitates, manente eadem ſpecie ſuperpartientis. Conſimili methodo Proportio ſubmultiplex ſubſuperpartiẽs, aut eſt ſubdupla ſubſuperbipartiens tertias, aut ſubtripla ſubſuperbipartiens tertias; & ſic in infinitum procedendo in variatione ſubmultiplicitatis, manente eadem proportione ſubſuperpartientis: vel ſubdupla ſubſubipartiente ſeptimas, vel ſubdupla ſubſuperquintupartiente octauas, vel ſubdupla ſubſuperquintupartiente nonas; & ſic manente eadem ſubmultiplicitate, variando in infinitum ſpecies ſubſuperpartientis. quæ ſpecies ſunt multis modis infinitæ ac diuerſæ. Probauimus ergo intentum.

## PROPOSITIO IV.

**Denominator proportionis Irrationalis nullus eſt in numeris: & particula nomenve Irrationalis illam denominat in genere, ac ſeparat ab aliis.**

SI enim denominator eius numeris exprimeretur, ſe haberent quantitates proportionem irrationalem habentes inter ſe, vt numerus ad numerum; denominator enim indicat rationem vnius quantitatis comparabilis ad aliam: atque ita deſtrueretur ratio irrationalis. Verùm cùm denominator proportionis inter quātitates comparabiles illas indicat ac diſtinguat ab aliis, nihilq; aliud fingi poſſit animo quod hanc proportionem denominet ac ſeparet ab aliis præter ipſum nomen Irrationalis: ideo dicimus denominatorem proportionis irrationalis eſſe ipſum nomen Irrationalis, quod eam in genere ſeparet ab aliis omnibus proportionibus.

## PROPOSITIO V.

Denominator ſpecierum duarum proportionis Irrationalis, videlicet maioris & minoris inæqualitatis irrationalis: ſunt ipſa nomina ſpecierum ipſarum cum additamento irrationalis.

NVmeris exprimi non poteſt denominator harum ſpecierum, nam tolleretur ac deſtrueretur genus Irrationalis. Sed neque aliud animo concipi poteſt, quod has ſpecies determinet ac ſeparet ab aliis, præter ipſa nomina maioris inæqualitatis irrationalis, & minoris inæqualitatis irrationalis; cum additamento nominis irrationalis; nam ſi illo ſublato, confunderentur iſtæ ſpecies cum generibus maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis; quæ reperiuntur inter quantitates commenſurabiles; niſi qui dicat debere in illis intelligi irrationalis nomen, in iſtis vero addi nomen aliud rationalis. Sed an non diſtinctius in vtriſque addetur ſuum proprium nomen diſtinctiuum, irrationalis, & rationalis. Explicata ergo manet propoſitio.

## PROPOSITIO VI.

Denominator generis Proportionis Rationalis in genere, eſt ipſum nomen Rationalis, non autem numeri.

SI enim eſſent numeri, indicarent ſpeciem proportionis rationalis, quæ differt à genere, & ſic inepti eſſent iſti numeri pro denominatore proportionis rationalis: ſed neque aliud excogitari poteſt præter ipſum nomen Rationalis: ergo ipſum erit denominator proportionalis rationalis.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si denominator proportionis rationalis non poteſt in numeris repreſentari; multò minus denominator proportionis irrationalis in genere poteſt numeris exhiberi.*

SI enim quantitates comparabiles in ratione rationali numeriſque aſſignabiles, non ſibi vendicant in genere denominatorem proportionis rationalis; multò minus aliæ quæ numeris indicari nequeunt, denominatorem ſibi vendicare nequeunt numeris expreſſum in genere, quos etiam iure poſtularent ſpecies maioris aut minoris inæqualitatis irrationalis, nam prædicantur affectiones ſuperioris de inferiore; & ſic deſtrueretur omnis ratio irrationalis ſpecifica maioris & minoris inæqualitatis rationalis.

## PROPOSITIO VIII.

Summũ genus Rationis ſeu Proportionis nullum denominatorem in numeris obtinere poteſt; ſolumque nomen Rationis vel proportionis, ipſummet denominat.

SI enim numeri aliqui eſſent eius denominator, deberent etiam tribui pro denominatoribus inferiorum ſuorum generum, affectiones enim ſuperioris pertinent ad inferiora: oſtendimus autem numeros minimè eſſe poſſe denominatores generum rationalis & irrationalis, & ſubalternorum rationalis maioris vel minoris æqualitatis; ergo neque ipſi numeri erunt denominator ſummi generis rationis vel proportionis. Supereſt ergo vt nomen ipſummet rationis, hoc genus ſummum denominet.

## PROPOSITIO VII.

Denominatores generum quinque ſubalternorũ proportioni rationali maioris & minoris inæqualitatis, non poſſunt eſſe numeri; ſed ſolum ipſa nomina propria generum iſtorum, multiplicis, ſubmultiplicis; ſuperparticularis, ſubſuperparticularis; ſuperpartientis, ſubſuperpartiẽtis; multiplicis ſuperparticularis: ſubmultiplicis ſubſuperparticularis; multiplicis ſuperpartientis, ſubmultiplicis ſubperpartientis.

SInt ſi fieri poſſit denominatores horũ generũ, numeri; illi indicabũt proportionem inter datas quãtitates commenſurabiles, quæ erit ſpecifica; numeri enim interſe habent rationem ſpecificam non genericam præcisè: genera ergo iſta deſinent eſſe genera, quod eſt abſurdum. Relinquitur ergo vt ſint ipſa nomina generum illorũ, denominatores illorũ; præſertim cùm nihil aliud aſſignari poſſit.

PRO-

## PROPOSITIO IX.

Denominatores omnium proportionum ſpecificarum rationalium ſub generibus quinque exiſtētium, tàm maioris quàm minoris inæqualitatis rationalis; ſunt numeri fracti, vnus vel duo.

PEr definitionem 7. huius digreſſionis ſecundæ, denominator proportionis rationalis ſpecificæ, eſt numerus fractus vnus, vel duo fracti; ergo denominatores omnium proportionum ſpecificarum rationalium ſub generibus quinque exiſtentium, tàm maioris quàm minoris inæqualitatis rationalis, erunt numeri fracti, vnus, vel duo, pro exigentia ſpeciei.

Aliter, cùm omnes proportiones inter quātitates commenſurabiles numeris explicari poſſint, inter quos apparet ſpecifica proportio beneficio alterius fracti numeri qui indicat ipſam ſpecificam proportionem inter illos, ideoque etiam inter quantitates datas commenſurabiles; ſitque hoc natura denominatoris: propterea denominatores ſpecierum proportionum omnium rationalium, erunt tales numeri, qui erunt fracti, vnus vel duo, quorum numerator repreſentabit antecedentem quantitatem, & denominator eius conſequentem; vel numeratores antecedentem, & denominatores eorum conſequentem, ſi ſint duo fracti.

## PROPOSITIO X.

Denominator Proportionis Æqualitatis, eſſe poteſt quilibet numerus ſuperpoſitus lineæ rectæ, & ſuppoſitus idem numerus eidem rectæ; nimirum fractus vnus numerus, cuius denominator & numerator ſint æquales: verùm eſt vnitas ſuppoſita alteri vnitati, rectâ lineâ intermediâ.

PRoportio æqualitatis eſt rationalis, ponitur enim ſub genere rationalis, quia eſt inter quātitates æquales commenſurabiles; & ſpecifica eſt infima, ex dictis in diuiſione proportionis rationalis ante definitionem 3. huius digreſſionis 2. Omnis autem ſpeciei infimę proportionis rationalis denominator eſt numerus fractus per def. 7. huius digreſſionis; ergo proportionis ęqualitatis denominator erit fractus numerus vnus; vnus quidem, quia ſemel tantùm ſe metiuntur inuicem quantitas æquales, nihilque ſupereſt earum, propter æqualitatem inter illas datam. Et quia quilibet numerus aſſumptus ſe ipſum metitur adæquatè, ideo vt fractus ſuperpoſitus lineæ rectę & ſuppoſitus eidem, indicare poterit hāc proportionem æqualitatis, inter quantitates datas æquales, ſicuti numerator huius fracti æqualis eſt ſuo denominatori. Verùm quia in def. 7. cit. diximus denominatorem propoſitionis ſpecificæ rationalis debere exprimi ſub minimis terminis, vt facilius ac breuius indicet proportionem quæſitam vel datam, & vnitas ſuppoſita alteri intermedia recta linea, eſt numerus fractus ſub minimis terminis omnium aliorum numerorum æqualium hoc modo diſpoſitorum intermedia recta linea, tanquam fractorum: ideo denominator omnis proportionis æqualitatis quia ſpecifica eſt, erit numerus fractus, habens vnitatem pro numeratore & aliam vnitatem pro denominatore.

## PROPOSITIO XI.

Denominator ſpecierum proportionis multiplicis, eſt vnus fractus numerus, cuius numerator eſt numerus integer vnitate maior pro ſpecie data, & cuius denominator eſt vnitas.

PEr prop. 9. conſtat denominatorem ſpecierum proportionis rationalis infimarū debere eſſe fractum numerum. Et quia multiplex proportio eſt quando minor quantitas metitur maiorem pluries quàm ſemel, conſequens antecedentem, & nihil aliud ſupereſt, & numerator fracti reponitur loco maioris quātitatis antecedentis, ideo ponēdus erit numerus integer vnitate maior pro numeratore fracti numeri, (qui numerator erit binarius pro ſpecie dupli, ternarius pro ſpecie tripli, & ſic de alijs pro natura ſpecierum huiuſmodi) & vnitas pro denominatore indicans minorem metientem ad quam refertur maior antecedens quantitas. Denique quia hic numerus fractus verbi gratia ½ ad oſtendendam ſpeciem duplæ proportionis ſufficit, eſt-

que ſub minimis terminis: ideo oſtenderimus propoſitum.

## PROPOSITIO XII.

Denominator ſpecierum proportionis ſuperparticularis eſt duplex numerus fractus, quorum primus eſt vnitas ſuppoſita vnitati intermediâ rectâ linea, alter verò vnitas ſuppoſito alio numero indicãte totam minorem quantitatem conſequentem, cuius pars eſt illa vnitas: vel vnus ſolùm numerus fractus æquiualens illis duobus, habẽs maiorem numerum pro numeratore, & minorem pro denomihatore.

PEr prop. 9. huius digreſſionis, conſtat denominatorem ſpecierum proportionis ſuperparticularis debere eſſe fractũ numerum, vnum vel duos: ſed quia in hiſce ſpeciebus minor quantitas ſemel metitur maiorem, ideo iam inter illas eſt proportio æqualitatis, quare vt fractus numerus expreſſus duabus vnitatibus rectâ linea intermedia, eſt denominator proportionis æqualitatis per prop. 10. ideo etiam denominator huius proportionis ſuperparticularis in ſpecie quacumque erit etiam huiuſmodi fractus expreſſus duabus vnitatibus rectâ linea intermedia. Vorùm quia ſupereſt aliquid de maiore quod eſt pars minoris metientis, quæ pars quæcumque ſit comparata cum minore, reducendo illas quantitates ad minimos terminos ſi opus ſit, ſemper eſt vnitas; ideo requiritur ex natura denominatoris ſpeciei proportionis alter numerus fractus, cuius numerator ſit vnitas, & denominator ipſamet quantitas minor numero expreſſa redacto ſi opus ſit ad minimum terminum. vti diximus in def. 7. huius digreſſionis. Et quia quorumcumque duorum numerorum fractorum ſumma colligi poteſt, ideo etiam fractus vnus numerus æquiualens illis duobus erit etiam ex def. 7. cit denominator proportionis ſpecificæ ſuperpartilularis.

Exempli gratia, ſeſquialteræ proportionis denominatores erunt $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ vel $\frac{3}{2}$. Seſquinquintæ iſti duo $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{5}$, vel vnus æquiualens illis $\frac{6}{5}$ & ſic de alijs.

Denique quia hæc proportio eſt maioris inæqualitatis rationalis, & numerator fracti numeri vnius repræſentat maiorem quantitatem antecedentem, & denominator minorem conſequentem; ideo fractus numerus æquiualens duobus dictis fractis, quandoquidem eſt denominator huius proportionis maioris inæqualitatis, numeratorem habebit maiorem numerum, & pro denominatore ſuo minorem.

## PROPOSITIO XIII.

Denominator ſpecierum proportionis ſuperpartientis eſt duplex numerus fractus, quorum primus eſt vnitas ſuppoſita alteri, rectâ linea intermedia, alter verò cuius numerator ſit numerus indicãs partes redundantes in maiore quantitate antecedente comparatæ cum minore conſequente, denominator verò ipſe numerus indicans minorem conſequentem: vel vnus ſolùm numerus fractus æquipollens illis duobus, numeratorem habens maiorem denominatore ſuo.

PEr prop. 9. conſtat denominatorem harum ſpecierum debere eſſe fractum numerum vnum vel duos. Et quia natura harum ſpecierum proportionis ſuperpartientis exigit minorem quantitatem ſemel menſurare maiorem, vnde oritur æqualitas, ideo denominator huius propoſitionis erit denominator proportionis æqualitatis videlicet $\frac{1}{1}$. Sed quia natura harum ſpecierum etiam exigit, vt quod exuperat in maiore ſit partes minoris, ideo requiritur ad totalem denominatorem illarum, alter numerus fractus, cuius numerator ſit numerus partium illarum redundantium in maiore comparatarum cum minore, expreſſo numero maiore denominatoris, nam refertur hic maior quantitas ad minorem, & minor quæcumque ſit ſemper erit loco denominatoris fracti numeri: Et ſic quia nihil aliud eſt in hiſce ſpeciebus exprimendum, ideo illi duo numeri fracti ſufficiunt. Verùm quia hi duo fracti reduci poſſunt ad vnum ſim-

ſimplicem fractum ſub minimis terminis, ideo vti vult def.7.poterit hic fractus eſſe denominator harum ſpecierum.

Exemplum proportionis ſuperbipartientis terrias erunt vel iſti duo fracti numeri $\frac{1}{1}\frac{2}{3}$ vel iſte vnus æquiualens illis duobus $\frac{5}{3}$.

ad vnum ſimplicem $\frac{19}{6}$, hic erit numerus fractus vnus pro denominatore huius proportionis triplæ ſeſquiſextæ, iuxta definitionem 7. cuius numerator 19 eſt loco maioris antecedentis, & denominator 6, loco minoris conſequentis.

## PROPOSITIO XIV.

Denominator ſpecierum proportionis multiplicis ſuperparticularis eſt duplex numerus fractus, quorum primus eſt vt in ſpeciebus proportionis multiplicis, alter verò vt poſtremus ſpecierum ſuperparticularis: vel vnus ſolùm æquiualens iſtis duobus, cuius numerator ſit maior denominatore ſuo.

QVia explicauimus paulò ante finem definitionis 7. huius digreſſionis, genera proportionum multiplicis ſuperparticularis, & multiplicis ſuperpartientis,& ſubmultiplicis ſubſuperparticularis, & ſubmultiplicis ſubſuperpartientis,eſſe compoſita ex alijs ſimplicibus multiplicis vel ſubmultiplicis,& ſuperparticularis vel ſubſuperparticularis,& ſuperpartientis vel ſubſuperpartientis:ideo denominatores iſtarum ſpecierum compoſitarum neceſſariò erunt duo numeri fracti, vel vnus æquiualens illis; ſi duo vt vnus indicet ſpeciem ſimplicem vnam,alius verò aliam, ex quibus componitur iſta totalis proportio. Porrò primus ſpeciei ſuperparticularis aut ſuperpartientis non erit neceſſarius,nam in hiſce ſpeciebus minor quantitas non metitur maiorem ſemel tantùm,ſed pluries quia multiplex datur,abſorbetur enim illa menſura ſemel in illa multiplicitate. Denique quia duo quilibet fracti in vnum redigi poſſunt, ideo primus fractus indicans multiplicitatem, & ſecundus indicans aliam ſimplicem ſpeciem, redacti in vnum ſimplicem fractum,exhibere poterunt in iſto vno ſimplici fracto denominatorem harum ſpecierum.

Exemplum proportionis triplæ ſeſquiſextæ duo denominatores erunt, $\frac{3}{1}\frac{1}{6}$. primus videlicet fractus $\frac{3}{1}$ proportionis triplæ, & alter $\frac{1}{6}$ ſuperparticularis videlicet ſeſquiſextæ, dempto $\frac{1}{1}$ primo ſuo denominatore æqualitatis, qui abſorptus eſt in prædicto $\frac{3}{1}$ proportionis triplæ. Quod ſi reducantur iſti duo $\frac{3}{1}\frac{1}{6}$

## PROPOSITIO XV.

Denominator ſpecierum proportionis multiplicis ſuperpartientis eſt duplex numerus fractus, quorum primus eſt vt in ſpeciebus multiplicis, alter verò vt poſtremus ſpecierum ſuperpartientis: vel vnus ſolùm fractus æquipollēs illis duobus, ita tamen vt numerator eius ſit maior ſuo denominatore.

FVndamentum aſſerendi in hiſce ſpeciebus proportionis multiplicis ſuperpartientis denominatorem eſſe duos numeros fractos, vide in demonſtratione præcedentis propoſitionis, eſt enim vniuerſale ad omnes proportionum ſpecies compoſitas ex duabus, qualis eſt iſta proportionis ſpecificæ multiplicis ſuperpartientis. Similiter cur tantum ſpeciei proportonis ſuperpartientis poſtremus tantum numerus fractus primo neglecto aſſumatur pro ſecundo fracto, ad conſtituendos duos fractos qui ſint denominatores harum ſpecierum. Pari modo vide rationem allatam cur hi duo fracti ad vnum redacti denominatorem dent ſufficientem ſpeciei cuiuſcumque proportionis multiplicis ſuperpartientis. Solummodò ſequens

Exemplum profero proportionis quadruplæ ſupertripartientis ſeptimas cuius denominator erit duplex hic fractus $\frac{4}{1}\frac{3}{7}$, quorum primus indicat multiplicis proportionis ſpeciem quadruplam;alter verò ſpeciem proportionis ſupertripartientis ſeptimas, abſorpto priore ſuo denominatore in multiplicitate prædicta. Quod ſi redigantur illi duo fracti in vnum $\frac{31}{7}$ iſtum, erit denominator eiuſdem proportionis quadruplæ ſupertripartientis ſeptimas,ita vt maior numerus 31 ſit numerator, & minor 7 ſit eiuſdem fracti denominator,quia eſt proportio maioris inæqualitatis & comparatur maior quantitas vt antecedens cum minore conſequente.

## PROPOSITIO XVI.

Denominator proportionis ſpecierum ſubmultiplicis eſt vnus ſolùm fractus numerus, cuius numerator eſt ſola vnitas, & denominator numerus vnitate maior determinans ſpeciem proportionis huiuſmodi datæ ſubmultiplicis.

EOdem modo probabimus primam partem huius propoſitionis, quo probauimus primam partem propoſitionis 11. ſolùm declaranda eſt ſecunda pars, Cùm enim denomitor indicet ſuo numeratore primam quantitatem antecedentem, quæ in hac proportione eſt minoris inæqualitatis; ideo ponenda eſt vnitas pro numeratore & minore quantitate antecedente; & cùm denominator huiuſmodi fracti numeri ſignificet quantitatem conſequentem, quæ in hiſce proportionum ſpeciebus eſt maior quantitas, ideo pro denominatore huius fracti conſtituendus erit maior numerus, indicans ſuis vnitatibus ſpeciem ſubmultiplicitatis.

Exempli gratia, proportionis ſubquintuplæ erit hic denominator $\frac{1}{5}$, ſubdecuplæ $\frac{1}{10}$. & ſic de alijs.

## PROPOSITIO XVII.

Denominator proportionis ſpecierum ſubſuperparticularis, eſt duplex numerus fractus, quorum primus eſt vnitas ſuppoſita vnitati rectâ linea intermedia, alter verò vnitas ſuppoſito alio numero indicante totam minorem quantitatem, cuius pars eſt illa vnitas ſuperpoſita: vel vnus ſolũ numerus fractus æquiualens illis duobus, habens tamen minorem numerum pro numeratore, & maiorem pro ſuo denominatore.

PArs prima declarabitur vt in propoſitione 12. ſolumque reſtat vnum explicandum, cur in his duobus fractis numeris qui ſunt denominatores proportionis minoris inæqualitatis non euertantur numeri vt in denominatore ſubmultiplicis, præſertim in ſecundo, id eſt minor numerus non ſit pro numeratore fracti; & maior pro denominatore ſuo; cùm in vnico æquiualente illis duobus id ponatur. Reſpondeo nullam debere fieri immutationem ſeu euerſionem terminorum in primo fracto numero, quia eſſet inutilis, nam vnitas & vnitas intermediâ rectâ lineâ idem ſignificant: ſed neque in ſecundo fracto, nam perturbaretur ſpecies proportionis, numerus enim maior vnitate ſuperpoſitus vnitati intermedia recta linea, indicat ſpeciem proportionis multiplicis per prop. 11. Quod ſi in vno fracto numero æquiualente iſtis duobus maior numerus ſuperponeretur vnitati intermediâ rectâ, indicaretur ſpecies proportionis ſuperparticularis, vti conſtat prop. 12. Dices per hos duos fractos præciſè numeros non poſſe dignoſci an proportio data ſit ſuperparticularis vel ſubſuperparticularis: id concedo: ſed dico vel cognoſci ex terminis propoſitis, ſi enim comparetur maior quantitas cum minore in aliqua ſpecie huius proportionis, erit ſpecies ſuperparticularis, ſi minor vt antecedens cum maiore conſequente, erit ſubſuperparticularis: vel etiam cognoſci ex particulis ſuperparticularis vel ſubſuperparticularis, illa enim eſt maioris, iſta minoris inæqualitatis: vel dico cognoſci ex denominatore propoſito æquipollente illis duobus; ſi enim maior numerus ſuperponatur minori intermediâ rectâ lineâ, erit ſpecies ſuperparticularis; ſi minor numerus ſuperponatur maiori, erit ſpecies ſubſuperparticularis. Ex quibus colligitur nos fundamentum habuiſſe determinandi naturam denominatoris proportionum ſpecificarum rationalium infimarum, dicendo poſſe eſſe vnum fractum numerum ſimplicem, qui æquiualeat duobus determinantibus etiam ſpecies huiuſmodi.

Exemplum. Proportionis ſubſeſquiſextæ, denominator erit vel duplex fractus $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{6}$, vel vnus hic $\frac{6}{7}$, vt differat ab altero $\frac{7}{6}$ proportionis ſeſquiſextæ.

## PROPOSITIO. XVIII.

Denominator proportionis ſpecierum ſuperpartientis, eſt duplex numerus fractus, quorum primus eſt vnitas ſuppoſita vnitati rectâ lineâ interpoſitâ; alter verò numerus partium relictarum in maiore quantitate, poſtquam ſemel illam menſurauit minor quantitas, ſuppoſito alio numero maiore qui indicat minorem quantitatem metientem: vel vnus ſolùm numerus fractus qui complectatur illos duos fractos, mutando tamen eius numeratorem in denominatorem, ita vt minor numerus ſit numerator, & maior denominator.

DIſcurſus factus in ſuperiore demonſtratione applicandus eſt huic propoſitioni, ſic enim declarabitur, & ſoluentur dubia quæ circa illam occurrere poſſunt, vti ſoluta ſunt in demõſtratione ſuperioris propoſitionis 17. & concedendo incommodum idem in duobus fractis numeris pro denominatore aſſignatis, & ſuccurrendum illi eiſdem rationibus ibi allatis.

Exẽplũ. Proportionis ſubſuperpartiẽtis vndecimas denominator erit duplex hic numerus fractus $\frac{1}{1}$ $\frac{3}{11}$; vel vnus ęquiualens illis duobus hąc ratione poſitus $\frac{11}{14}$ vt differat ab alio $\frac{14}{11}$ proportionis ſupertripartientis vndecimas.

## PROPOSITIO XIX.

Denominator ſpecierum proportionis ſubmultiplicis ſubſuperparticularis eſt duplex numerus fractus, quorum primus eſt vnitas ſuperpoſita numero alicui determinans ſpeciem ſubmultiplicis proportionis; alter verò eſt vnitas etiam ſuperpoſita numero indicante ſpeciem ſubſuperparticularis proportionis: vel vnus ſolum æquipollens illis duobus; verum antequã illi duo reducantur ad vnũ debent conſtitui tanquam ſi eſſent denominatores proportionis ſpecificæ multiplicis ſuperparticularis, & reducti numerator debet inuerti cum denominatore, ita vt minor numerus ſuperponatur maiori interiectâ lineâ rectâ.

QVod debeat eſſe duplex numerus fractus pro denominatore ſpecierum huius proportionis vide fundamentum explicatum in demonſtratione propoſitionis 14. nam cõponuntur iſtę ſpecies ex duabus, videlicet ſubmultiplici, & ſubſuperparticulari, vnde debet aſſumi fractus numerus qui eſt denominator ſubmultiplicis, de quo diximus in prop. 16. tùm etiam fractus numerus poſtremus è duobus proportionis ſubſuperparticularis, de quo egimus in prop. 17. Cur verò negligatur primus fractus ſubſuperparticularis, dedimus rationem vniuerſalem in demonſtratione propoſitionis cit. 14. Quod illi duo fracti numeri reducti ad vnum ſimplicem, dent denominatorem proportionis ſpecificæ, oſtendimus in def. 7. huius digreſſionis 2. Quod verò illi duo fracti antequam reducantur ad vnum ſimplicem debeànt aſſumi tãquam ſi eſſent denominator proportionis ſpecificæ multiplicis ſuperparticularis, ratio hæc eſt in vno exemplo afferẽda, ſic enim applicãda erit omnibus alijs. Proportionis ſubduplę ſubſeſquialteræ denominatorem exhibebũt ex dictis iſti duo fracti numeri $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$, qui ſi reducantur ad vnum ſimplicem vt ſic proponuntur, exurget iſte fractus numerus $\frac{3}{2}$, indicans proportionem in genere maioris inæqualitatis ſeſquialteræ diuerſæ ſpeciei ab ſubdupla ſubſeſquialtera, tũ etiam diuerſi generis, nam eſt maioris inæqualitatis: quare rectè monuimus in propoſitionis vltimis particulis, vt aſſumantur illi duo fracti numeri $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$, tanquam ſi eſſent pro denominatore proportionis ſpecificæ duplæ ſeſquialteræ, hoc eſt $\frac{2}{1}$ $\frac{1}{2}$, prout diximus in explicatione propoſitionis 14. ſic enim aſſumpti reducentur ad hunc vnum fractum $\frac{5}{2}$, qui eſt denominator proportionis duplæ ſeſquialteræ, quia maior numerus ſupra minorem conſtituitur; quare ſi inuertantur eius termini, vti præcepi-

præcepimus in hac propoſitione, habebimus hunc fractum $\frac{2}{5}$, qui indicabit denominatorẽ quæſitũ huius proportionis ſpecificæ ſubduplæ ſubſeſquialteræ; minor enim numerus 2 ſuperpoſitus maiori indicat minorem quantitatem eſſe antecedentem, & maiorem conſequentem, & habet hic numerus minor 2 ad maiorem 5, proportionem ſubduplam ſubſeſquialteram.

Colligitur ex dictis duos illos fractos $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$ & ſic de alijs, confusè indicare hanc proportionem ſubdupli ſubſeſquialteri; nam primo aſpectu videntur indicare duas proportiones ſubduplas. Verum hæc confuſio tolletur, ſi aduertatur quando erit ſermo denominatoris proportionis huiuſmodi compoſitæ, primum fractum indicare proportionem ſubmultiplicis, ſecundum vero ſubſuperparticularis. Quod ſi non eſſet ſermo denominatoris huiuſmodi proportionis compoſitæ, tunc ſinguli illi duo fracti indicarent proportiones ſpecificas ſubmultiplices.

## PROPOSITIO XX.

Denominator ſpecierum proportionis ſubmultiplicis ſubſuperpartientis eſt duplex numerus fractus, quorum primus eſt vnitas ſuperpoſita numero alicui determinanti ſpeciem proportionis ſubmultiplicis; alter vero numerum minorem habet pro numeratore indicãte partes redũdãtes in maiore quantitate, & denominatorem ipſummet numerum minoris quantitatis maiorẽ numeratore: vel ſolum vnus fractus æquiualens illis duobus; verùm antequã illi duo fracti reducãtur ad vnũ ſimplicem, diſponendi erũt tanquam ſi eſſent pro denominatore proportionis multiplicis ſuperpartientis, & huius ſimplicis fracti numeri numerator ponendus loco denominatoris, & denominator loco numeratoris.

Rationes allatæ in ſuperioris propoſitionis 19. demonſtratione applicatæ huic propoſitioni, eam etiam demonſtrabunt, quare contenti erimus propoſitionem hanc in exemplo vno declarare.

Poportionis ſubtriplæ ſubſuperibipartientis tertiæ denominator erit duplex hic numerus $\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}$, in quibus nullum incommodum eſt, vt in ſuperiore propoſitione, quia numerator ſecũdi ſemper eſt numerus maior numeratore primi, nam partes redundantes in maiore ſũt ſemper vnitate maiores, alioqui cum vnitas omnem metiatur numerum, ſitq; eius pars, proportio eſſet ſubſuperparticularis cõtra datum. Verùm vt reducantur ad vnũ ſimplicem fractũ oportebit illos ſic accipere $\frac{3}{1}\,\frac{2}{3}$ tanquam ſi eſſent pro denominatore proportione triplæ ſuperbipartientis tertias de qua egimus in prop. 15. ex his enim fiet hic ſimplex fractus $\frac{11}{3}$, cuius termini euerſi vti præcepimus in propoſitione, exurget hic conueniẽs fractus & denominator $\frac{3}{11}$ proportionis datæ ſubtriplæ ſubſuperbipartientis tertias, nã minor numerus 3 refertur ad maiorem 11, prout exigit natura proportionis minoris æqualitatis quæ prædicatur de iſta ſpecie ſubtriplæ ſubſuperbipartientis tertias, habetq; numerus minor numerator ad maiorem denominatorem huiuſmodi proportionem. Quod illi duo fracti numeri primi $\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}$ non ſumerentur vti præcepimus, reducti ad vnum $\frac{3}{3}$ hunc more conſulto apud Arithmeticos, indicaret ſpeciem æqualitatis, quod abſurdum eſt, data enim eſt proportio inæqualitatis.

## PROPOSITIO XXI.

Datis duabus inæqualibus quantitatibus ſub numeris, ſpeciem proportionis quam habent reperire, & denominatorem illius exhibere.

Suppoſitio. Sint datæ duæ quantitates inæquales ſub his duobus numeris 25, & 4, oporteatque determinare ſpeciem proportionis quam habent inter ſe, & denominatorem illius proportionis exhibere.

Conſtructio. Diuide maiorem 25, per minorem 4, Quotus numerus $6\frac{1}{4}$, dabit ſpeciem proportionis ſextuplæ ſeſquiquartæ, & denominator erit duplex numerus fractus $\frac{6}{1}\,\frac{1}{4}$.

Cum enim diuiſio ſit menſuratio maioris per minorem, & reperiatur in exemplo dato maior numerus 25 mẽſurari ſexies à minore 4, & ſupereſſe vnam vnitatem de maiore quæ

eſt

eſt quarta pars minoris 4 metientis, ideo rectè repertus eſt denominator proportionis inter duas datas quantitates ſub numeris, & ſpecies proportionis inter illas duas quantitates datas, maiorem vt antecedentem & minorem conſequentem: & è contra minoris ad maiorem ſed huius denominator erit $\frac{1}{6}$ $\frac{4}{4}$, eritque proportio ſubſextupla ſubſeſquiquarta.

## PROPOSITIO XXII.

### Data vna quantitate ſub numeris, & denominatore proportionis quam habet ad aliam quantitatem reperire.

SVppoſitio data ſit quantitas vt 25, & denominator $\frac{6}{1}$ $\frac{1}{4}$ Vel quæritur numerus ſeu quantitas alia in numeris quæ habeat ad datã 25 proportionem maioris inæqualitatis, vel minoris inæqualitatis: Conſtructio primi caſus. Multiplica datum numerũ 25 per denominatorẽ datum $\frac{6}{1}$ $\frac{1}{4}$, Dico productum numerum 156 $\frac{1}{4}$ eſſe quãtitatem maiorẽ quæſitam.

Conſtructio ſecundi caſus, Partire numerum datum 25, per datum denominatorem $\frac{6}{1}$ $\frac{1}{4}$, quotus numerus 4, erit minor quantitas quæſita.

Demonſtratio primi caſus. Datur minor numerus 25, & denominator proportionis $\frac{6}{1}$ $\frac{1}{4}$ maioris inæqualitatis, ergo ſi multiplicetur datus minor numerus per hunc denominatorem, producetur numerus maior quem metietur minor iuxta datum denominatorem ex natura multiplicationis, inuentus ergo numerus 156 $\frac{1}{4}$ rectè inuentus.

Demonſtratio ſecundi caſus, quandoquidẽ quæritur minor numerus qui metiatur maiorem datũ iuxta ſuas vnitates, & reſiduum illius ſi ſuperſit ſint pars vel partes ipſius minoris; ac diuiſio ex natura ſua per datum denominatorem ſeu diuiſorem id efficiat, repertuſque ſit numerus 4, ille erit qui ad datam maiorem quantitatem 25, habet proportionem datã in denominatore dato $\frac{6}{1}$ $\frac{1}{4}$. Sed hæc in duahus hiſce poſtremis propoſitionihus ſupponunt Arithmeticæ principia quæ geometriam ex natura ſua præcedunt ſaltem communia.

***Sequitur continua ſeries definitionum huius libri traditarum ab Eudoxo & Euclide.***

### X.

***Cùm autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam; duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cùm quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: Et ſemper deinceps vnò amplius, quamdiu proportio extiterit.***

HÆc intelligenda eſt in quantitatibus continuè proportionalibus, non autem diſcontinuè. Voluntque iſti Authores ſicut inter tres quantitates continuè proportionales duæ ſolum intercedũt rationes ſeu relationes eiuſdẽ ſpeciei; ita etiam dici primam ad tertiam habere duplicatam rationẽ quam habebat eadem prima ad ſecundam. Quod ſi fuerint quatuor aliæ magnitudines continuè proportionales, prima ad quartã triplicatam habebit rationem eius quam habebat ad ſecundam, quia ſolæ tres rationes eiuſdem ſpeciei intercedebant inter illas quatuor magnitudines, primæ ad ſecundam, ſecundæ ad tertiam, tertiæ ad quartã. Quod ſi fuerint quinque huiuſmodi magnitudines continuè proportionales, vt creſcit vnitate numerus magnitudinũ reſpectu præcedentis numeri quatuor magnitudinum, ſic etiam creſcit denominatio quadruplicatę rationis primæ ad vltimam quintã, eius quam habebat ad ſecundã. & ſic ſẽper vna amplius, modo explicato.

Nonnulli hallucinati ſunt, dicendo iſtam definitionem intelligi debere ita vt in tribus continuè proportionalibus quãtitatibus prima ad vltimam tertiam habere debet rationem dupli quam hahebat ad ſecundam. quod falſum eſt vt in hoc exemplo oſtendetur 9. 3. 1. in quo tres numeri continuè ſunt proportionales in ratione tripli, & tamen primus 9 ad tertiam vltimumque 1, non habet rationem duplam, videlicet ſextuplam, eius quam habebat ad ſecundum 3, quæ erat tripla; ſed duplicatam modo explicato.

### X I.

***Homologa ſeu ſimiles ratione magnitudines, dicuntur Antecedentes quidem Antecedentibus, Conſequentes verò conſequentibus.***

QVando ſunt quãtitates proportionales, duæ ſunt Antecedentes, & duæ conſequentes, licet tres tantum dentur proportionales, media enim bis ſumitur, vt conſequens ſemel, & vt antecedẽs etiam ſemel. Iam vero in his cõparationibus, homologæ quãtitates ſeu ſimiles ratione dicẽtur Antecedẽtes duæ, tùm conſequentes duæ. Exemplum in tribus proportionalihus, ſit A ad B, vt B ad C, A & B antecedentes erunt homologæ ſeu ſimiles ratione, & B & C, conſequentes, erunt etiam ſimiles ratione ſeu homologæ. Aliud exemplum in quatuor quantitatibus cõtinuè proportionalihus, ſit A ad B, vt B ad C, & C ad D; erunt A, B, C, antecedentes homologæ; &

B, C,

B,C,D,conſequentes homologæ. Exemplum aliud in quatuor quantitatibus non continuè proportionalibus,ſit A ad B vt C ad D;erunt A & C antecedentes homologæ, & B & D conſequentes homologæ.

XII.

*Alterna ratio, Eſt ſumptio Antecedentis ad Antecedentem, & Conſequentis ad conſequentem.*

IN hac & ſequẽtibus definitionibus vſque ad vltimã excluſiuè,definiuntur varij modi ſumendi rationes & eas cõparandi, ſeu varij modi argumentãdi in proportionibus:qui poſtea oſtendẽtur in propoſitionibus citandis ad ſingulos,rectè concludere. Aliud enim eſt definire modos argumentandi diuerſos;aliud verò demonſtrare illos modos diuerſos rectè inferre prædicatum de ſubiecto. Nam definiemus iſtos modos diuerſos argumentandi in proportionibus, & in propoſitionibus huius libri citandi ad ſingulos,demonſtrabimus illos rectè concludere.

Igitur Alterna ratio eſt,quando datis quatuor magnitudinibus,exempli gratia A ad B, vt C ad D, proportionalibus, infertur etiam eſſe A antecedens ad C antecedens,vt B conſequens ad D conſequens; primum antecedens ad ſecundum antecedens, vt B conſequens primum ad D conſequens ſecundum.

Hæc ratio alterna vocari etiam ſolet permutata:Et dum formatur argumentum,data A ad B,vt C ad D, Dici ſolet ſic & per alternam rationem, vel per rationem permutatam, vel ſimpliciter viciſſim, vel alternando, vel permutando, erit A ad C, vt B ad D. hic modus argumentandi demonſtrabitur in propoſit. 16.

XIII.

*Inuerſa ratio, eſt ſumptio conſequentis ceu antecedentis ad antecedentem velut ad conſequentem.*

EXempli gratia ſint quatuor quantitates proportionales A ad B vt C ad D; erit iuxta hanc definitionem, per inuerſam rationem, vel inuertendo, B ad A,vt D ad C,hoc eſt conſequens vnum ad ſuum antecedens, vt conſequens alterum ad ſuum antecedens;tunc enim fiunt conſequentia antecedentia,& antecedentia conſequentia ſuorum propriorum antecedentium vel conſequentium.Hęc porro argumentatio declarabitur in coroll.propoſitionis 4.

XIV.

*Compoſitio rationis, eſt ſumptio antecedentis cum conſequente, ceu vnius, ad ipſam conſequentem.*

VErbi gratia ſit AB ad BC, vt DE ad EF; erit iuxta hanc definitionem per compoſitionem rationis,vel cõponendo(ſupple rationẽ)ABC ad BC,vt DEF ad EF;hoc eſt antecedens AB & conſequens BC,(primæ rationis) ſumpta ſimul in ABC, ad BC conſequens;vt DE antecedens & EF conſequens alterius rationis, ſũpta ſimul in DEF, ad EF conſequens huius rationis. Quæ ratio argumentandi demonſtrabitur in prop. 18.

XV.

*Diuiſio rationis,eſt ſumptio exceſſus quo conſequentem ſuperat anteceděs,ad ipſam conſequentem.*

VT ſi dicatur eſſe ACB ad CB, vt DFE ad FE;erit per diuiſionem rationis, vel diuidendo,ſupple rationẽ,AC ad CB,vt DF ad FE; hoc eſt erit AC exceſſus quo antecedens ACB ſuperat ſuam conſequentem CB, ad ipſam CB conſequentem; ſicut DF exceſſus quo aliud antecedens DFE ſuperat ſuam conſequentem FE, ad ipſam conſequentem FE. Demonſtrabitur prop. 17.

XVI.

*Conuerſio rationis, eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum quo ſuperat antecedens ipſã conſequentem.*

SIt ACB ad CB, vt DEF ad EF;erit modus inferendi iuxta hanc definitionem, ACB ad AC, vt DEF ad DE: hoc eſt per conuerſionem rationis,vel conuertendo,ſupple rationem, antecedens primum ACB, ad AC exceſſum quo ipſum antecedẽs ſuperabat ſuum conſequentem CB;vt aliud antecedens DEF ad DE exceſſum quo maius erat ſuo conſequente EF. Oſtendetur prop. 19.

XVII.

*Ex æqualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint magnitudines, & his aliæ multitudine pares; quæ binæ ſumantur, & in eadem ratione: cùm vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam; ſic in ſecũdis magnitudinibus prima ad vltimam ſeſe habuerit. Vel aliter. Sumptio extremorum, per ſubductionem mediorum.*

IN exemplo, ſint tres magnitudines vel quantitates A. B. C. Tùm aliæ tres ſeu multitudines pares D. E. F. quæ binæ ſumantur in eadem ratione;hoc eſt ſit A ad B in primis, vt D ad E in ſecundis; & ſit B ad C in primis,vt E ad F,in ſecundis:erit modus argumentandi,ex æqualitate(ſupple rationis,) vel ex æquo,ſumẽdo extrema per ſubductionem mediorum, iuxta hanc definitionem, A prima ad vltimam C in eodem primo ordine; vt D prima ad vltimam F in eodem ſecundo ordine. Hic modus argumentandi oſtendetur bonus in prop. 22.

XVIII.

XVIII.

*Ordinata proportio, eſt, cùm fuerit quemadmodum Antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem: fuerit etiam vt conſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam.*

HOc eſt ſi fuerit A ad B, vt D ad E, antecedens A ad B conſequentem ſuam, vt alia D antecedens ad ſuam conſequentem E; tùm etiam fuerit cõſequens B ad aliud quidpiam, v.g. ad C, vt alia E conſequens ad aliud quidpiã puta F. Dicetur ordinata proportio. Et quia hic modus referendi quantitates, eſt planè ſimilis antecedẽti in præcedẽte definitione; nam ſumũntur tres in ordine, & tres aliæ in ſecundo ordine, & binæ in eadem ratione ſumuntur; modus ordinandi tres huiuſmodi quantitates, & tres alias, & comparandi in præcedente definitione erit ordinatus, ſeu ſecundùm proportionem ordinatam explicatam in exemplo. Quare etiam poterit fieri argumentatio eadem, in hac ordinata proportione, vti in præcedente: vnde etiam hæc vt illa demonſtrabitur in propoſ. 22.

XIX.

*Perturbata autem proportio eſt, cùm tribus poſitis magnitudinibus, & aliis quæ ſint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus ſe habet Antecedens ad conſequens, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Vt autem in primis magnitudinibus, conſequens ad aliud quidpiam; ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.*

EEempli gratia in primis magnitudinibus ſit A antecedens ad B conſequentem, vt in ſecundis magnitudinibus E antecedens ad F conſequentem: Et in primis magnitudinibus ſit B conſequens ad aliud quidpiam, videlicet vt Antecedens ad C conſequentem, ſicut in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam puta D ad antecedentem E, videlicet D vt antecedens ad E veluti conſequentem. Procedet perturbata proportio, quia, vt in precedente ordinata, in ſecundis magnitudinibus non ſumitur conſequens vt antecedens ad aliam conſequentem, vt in primis magnitudinibus, ſed ſumitur aliud quidpiam ad antecedentem primam in his ſecundis: vnde colligitur quare præcedens coordinatio dicatur ordinata proportio; quia ſemper vt in primis magnitudinibus conſequens vna fit antecedens reſpectu alterius conſequentis, ita etiam in ſecundis conſequens vna ſit antecedens ad aliam conſequentem. Porrò ex hac perturbata proportione, etiam oſtendetur in propoſ. 23. ſequi argumentationem ex æqualitate vel ex æquo, hoc eſt in exemplo allato in hac definitione, ita eſſe A ad C vt D ad F.

Hæ 19. definitiones ſunt Authorum noſtrorum Eudoxi & Euclidis. Sequentes vſque ad vltimam excluſiuè ſunt nobiliorum Interpretum huius libri quinti; Quæ quia plurimum conferunt ad res Geometricas, & ſunt argumentandi modi in proportionibus maximè affines explicatis, qui demonſtrabuntur in citandis corollariis ad propoſ. huius libri, eos refero hic ſub continuata ſerie numerorum præcedentium definitionum, & explico.

XX.

*Compoſitio rationis conuerſa, eſt, quando ſumitur Antecedens & conſequens veluti vna, quæ cum antecedente confertur.*

IN exemplo ſit AB ad BC vt DE ad EF: inferemus, ergo per compoſitionem rationis conuerſam, vel componendo conuerſim, ſupple rationem, erit ABC ad AB, vt DEF ad DE; hoc eſt vt in prima comparatione ſumma ABC antecedentis & conſequentis ad ſuam antecedentem AB, ita in ſecunda comparatione ſumma DEF antecedentis & conſequentis ad ſuam antecedentem DE. Hæc illatio demonſtrabitur legitima in corollar. noſtro 1. ad propoſ. 18.

XXI.

*Compoſitio rationis contraria, eſt quando refertur eadem magnitudo antecedens ad ſummam antecedentis & conſequentis.*

EXemplum. Sit AB ad BC vt DE ad EF, Inferetur ergo per compoſitionem rationis contrariam, vel componendo contrariè, ſupple rationem, erit AB ad ABC, ſicut DE ad DEF; videlicet AB antecedens primæ comparationis ad ſummam vnam ABC, antecedentis AB & conſequentis BC, ſicut DE antecedens ſecundæ comparationis ad ſummam DEF antecedentis DE & conſequentis EF. Iſta methodus argumentandi oſtendetur bona in corollario noſtro ſecundo ad propoſ. 18.

Dicitur præcedens compoſitio conuerſa, reſpectu compoſitionis rationis explicatæ in defin. 14. nam in illa conferebantur antecedentium & conſequentium ſummæ cum ſuis

N conſe-

conſequentibus ; in hac verò conuerſa referuntur eædem ſummæ antecedentium & conſequentium ad antecedentes ; quare conuerſa dicitur eo quod conuertat terminos vltimos alterius, ſumit enim antecedentes, loco conſequentium. Compoſitio autem contraria de qua in præſenti definitione agimus, dicitur contraria reſpectu præcedentis definitæ, in qua conferebantur ſummæ antecedentium & conſequentium cum ſuis antecedentibus, in hac verò veluti contrariè comparantur antecedentes cum ſummis antecedentium & conſequentium : impoſitaque ſunt nomina diuerſa hiſce compoſitionibus diuerſis rationum vt diſtinguerentur etiam nominibus ſicut diſtinguuntur naturis comparationum explicatis.

## XXII.

*Diuiſio rationis conuerſa, eſt, quando refertur conſequens ad exceſſum quo conſequentem ſuperat antecedens.*

VT ſi eſt ACB ad CB, ita DFE ad FE: concluditur per hanc diuiſionem rationis conuerſam, vel diuidendo ( ſupple rationem ) conuerſim, ergo erit CB conſequens ad AC exceſſum quo antecedens ACB ſuperat conſequentem CB; ſicut FE conſequens ad DF exceſſum quo antecedens DFE ſuperat conſequentem FE. Hanc argumentationem valere docebimus in corollar. 1. propoſit. 17.

Dicitur hæc rationis diuiſio cõuerſa, reſpectu diuiſionis rationis primò definitæ in defin. 15. in qua conferebatur in vtraque comparatione exceſſus quo conſequentem ſuperabat antecedens ad ipſam conſequentem ; in hac verò cùm referatur conſequens ad exceſſum quo conſequentem ſuperat antecedens. quia videtur conuertere illam.

## XXIII.

*Diuiſio rationis contraria, eſt, quando confertur antecedens cum exceſſu quo conſequens antecedentem ſuperat.*

IN exemplo ſit AC ad ACB, vt DF ad DFE : inferetur per hanc diuiſionem rationis contrariam, ſeu diuidendo ( ſupple rationem ) contrariè, eſſe Antecedentem AC ad CB exceſſum quo conſequens ACB antecedentem AC ſuperat, ſicut DF antecedens ad FE expreſſum quo conſequens DFE ſuperat antecedentem DF. qui modus argumentandi demonſtrabitur in corollor. 2. prop. 17.

Dicitur hæc diuiſio rationis contraria, reſpectu præcedentis diuiſionis conuerſæ explicatæ : contrario enim modo procedit, vt conſideranti patet.

## XXIV.

*Ratio ex rationibus componi dicitur, cùm rationum quantitates inter ſe multiplicata aliquam effecerint rationem.*

HÆc eſt Interpretum definitio. quam ſic explicant. Datis multis quantitatibus quæ inter ſe comparantur, prima ad ſecundam, ſecunda ad tertiam, & ſic deinceps vſque ad vnam vltimam, ſiue ſint comparatæ ſecundùm eandem rationem, ſiue non, Ratio primæ ad vltimam, erit compoſita ex rationibus intermediis ; hoc eſt ſi multiplicetur quantitas ſiue denominator primæ rationis cum denominatore ſecundæ rationis, & productus numerus cum denominatore ſequentis rationis, & ſic deinceps ſi adſint multæ aliæ rationes, productus numerus vltimus erit denominator rationis inter primam & vltimam quantitatem ; nec refert inquiunt ſi iſti denominatores multiplicẽtur conſequenter vel non conſequenter, modò omnes ducantur prout explicauimus. Atque ita rationem ex rationibus componi aſſumunt.

Huiuſmodi definitio & eius explicatio vera eſt & bona in quantitatibus rationalibus, ſeu in quantitatibus quæ referuntur ad inuicem relationibus rationalibus, ſic etenim eorum denominatores ſunt numeri per prop. 9. digreſſionis noſtræ ſecundæ, qui numeri ſeu denominatores poſſunt inter ſe multiplicari, & productus ex eis numerus iterum duci per alium denominatorem, vnde vltimus productus ſic numerus erit denominator proportionis primæ quantitatis ad vltimam è datis quocumque numero.

Sed hæc definitio non eſt vniuerſalis, non enim conuenire poteſt quantitatibus irrationalibus ſeu incommenſurabilibus inter ſe comparatis, nam ex prop. noſtris 4. 5. digreſſionis ſecundæ, relatio qua referuntur quælibet duæ quantitates incommenſurabiles nullum ſibi vendicat denominatorem in numeris, ſeu numeris explicabilem, ſed nomen irrationalis eſt denominator illius.

Exemplis rem illuſtremus. Dentur iſtæ quantitates commenſurabiles & explicatæ numeris, vel numeri ipſi comparati inter ſe, proportionaleſque primo loco, 8. 4. 2. ita vt ſit 8 ad 4, vt 4 ad 2, in ratione dupli ; Denominator primæ relationis

erit

erit $\frac{2}{1}$, & denominator ſecundæ rationis erit etiam $\frac{2}{1}$: multiplicando ergo hos denominatores proportionum iſtarum duarum eiuſdem ſpeciei, producetur denominator iſte $\frac{4}{1}$ quadruplæ rationis: & ſic iuxta hanc definitionem, in exemplo iſto, ratio primæ quantitatis 8 ad vltimam 2, erit quadrupli, compoſita ex duabus intermediis. Dentur etiam iſtæ aliæ quantitates 12. 6. 4. 1. explicatæ numeris non continuè proportionales, etiam ratio primæ 12 ad vltimam 1, videlicet duodecupla, componetur ex intermediis rationibus nimirum ex ductu $\frac{2}{1}$ denominatoris primæ rationis inter 12 & 6, in denominatorem $\frac{6}{4}$ ſeu $\frac{3}{2}$ ſecundæ rationis exiſtentis inter 6 & 4, ex qua multiplicatione gignetur hic fractus $\frac{6}{2}$ ſeu $\frac{3}{1}$; tùm ex ductu huius producti $\frac{3}{1}$ in denominatorem $\frac{4}{1}$ rationis mediæ inter 4 & 1; fiet enim productus numerus $\frac{12}{1}$ qui erit denominator rationis inter primam quantitatem 12 & vltimam 1, videlicet rationis compoſitæ ex prædictis intermediis. Nec refert in iſta multiplicatione ſi ducantur denominatores rationum immediatè ſe ſequentium, modò omnes ducantur modo prædicto: Si enim denominatorem $\frac{2}{1}$ primæ rationis duceremus in $\frac{4}{1}$ denominatorem vltimæ ex mediis, naſceretur iſte productus numerus $\frac{8}{1}$ qui poſtea ductus in alium denominatorem $\frac{6}{4}$ ſeu $\frac{3}{2}$ tertiæ rationis, exurgeret iſte productus idem numerus $\frac{24}{2}$ ſeu $\frac{12}{1}$ pro denominatore rationis compoſitæ inter primum numerum 12 & vltimum 1, ex intermediis dictis rationibus.

*Fig.* 130. Quod ſi dentur tres quantitates continuè proportionales inter tres incommenſurabiles ſi antecedentes cum conſequentibus comparentur, quod aſſumimus exempli gratia ex propoſ. vltima lib. 10. horum elementorum, videlicet AB vnum latus vnius quadrati, & AC diametrum eiuſdem quadrati, quæ ſunt inter ſe incommenſurabiles per citat. propoſ. lib. 10. tùm diametrum hanc AC, vt latus alterius quadrati, (nam ſuper data qualibet recta fieri poteſt quadratum per propoſ. 46. lib. 1.) denique aliam rectam AD quæ ſit diameter huius quadrati facti; erit eadem ratio irrationalis minoris inæqualitatis, inter AB, & AC, & inter AC & AD; & ratio primæ AB ad vltimam AD, componetur etiam intermediis illis duabus rationibus: verùm quia nullum ſibi denominatorem vendicant, non poterunt iſti denominatores duci ad inuicem vt fiat denominator compoſitæ rationis: & ſic definitio prædicta non eſt vniuerſalis, nam non poteſt applicari compoſitioni rationis inter quantitates incommenſurabiles binas & binas relatas, vt apparet in hoc exemplo. Et tamen reuerà ratio primæ AB ad vltimam tertiam AD, hoc eſt ratio compoſita ex intermediis quæ nullum denominatorem habent, eſt rationalis, & numeris explicabilis, videlicet ſub dupla, vti nunc demonſtrabimus.

Sit quadratum ABCE, ductáque eius diameter AC, ſupra quam per propoſ. 46. libr. 1. factum ſit quadratum ACDF, quod includet ſemiſſem quadrati primi dati, videlicet AEC triangulum, nam per propoſ. 34. libr. 1. diameter AC, illud quadratum primum bifariàm diuidit, & latera CD, FA, perpendicularia lateri AC, efficient angulos rectos in AC, includentes angulos ſemirectos EAC, ECA, vt totum ſit maius parte, quòd autem dicti anguli EAC, ECA ſint ſemirecti, conſtat ex corollar. noſtro 5. ad propoſ. 32. lib. 1. Denique ex E ad D ducatur recta linea ED. Si probauero rectas duas lineas EA, ED, efficere vnam rectam lineam AED, nónne erit diagonalis quadrati ACDF facti? etſi demonſtrauero rectam AED ſeu AD diagonalem quadrati facti eſſe duplam lateris AB dati quadrati ABCE, an non oſtendero propoſitum? Sic verò demonſtro vtrumque. Ex natura quadrati AEC angulus rectus eſt, & ſinguli anguli EAC, ECA, ſunt ſemirecti per citat. noſtrum corollar. 5. ad propoſ. 32. lib. 1. Quòd ſi ex toto angulo recto ACD quadrati ACDF, dematur angulus ECA ſemirectus, relinquetur angulus ECD etiam ſemirectus: Cùm igitur in triangulis ACE, DCE, latus vnum EC ſit commune, & alia latera AC, DC, ſint æqualia per naturam quadrati, & anguli ACE, DCE, oſtenſi ſemirecti, vnde æquales ſunt per 7. axio. libr. 1. quia æqualium rectorum ſunt ſemiſſes, comprehenſique ſunt ab æqualibus illis relatiuè lateribus AC, CE, DC, CE, erunt per 4. propoſ. libr. 1. baſes AE, DE, æquales, & anguli AEC, DEC, æquales; ſed horum vnus AEC rectus eſt oſtenſus, ergo alter DCE etiam rectus erit; igitur rectæ duæ EA, ED, erunt in directum, ſeu vnam rectam lineam efficient AED, per propoſ. 14. libr. 1. Tota ergo recta linea AED diagonalis quadrati ACDF facti ſupra diagonalem AC, quadrati ABCE dati, dupla erit lateris AE quadrati dati ABCE. quæ erant demonſtranda. Ratio igitur compoſita lateris AB, ad diagonalem AED, ex intermediis rationibus BA ad AC, & AC ad AED, quæ ſingulæ ſunt irrationales, erit ſubdupla, quod erat concludendum: & tamen nulla facta eſt multiplicatio denominatorum illarum irrationalium rationum, quia nulli ſunt denominatores præter nomen irrationalis rationis minoris inæqualitatis.

N 2 His

His ergo explicatis ac demonſtratis ſic in vniuerſum definiemus compoſitionem rationis, primæ quantitatis ad vltimam, ex intermediis rationibus.

*Ratio ex rationibus componi dicitur, Quando datis multis quantitatibus inter ſe relatis, prima ad ſecundam, & ſecunda ad tertiam, & ſic deinceps; ratio prima ad vltimam componitur ex ductu rationis vnius è dictis in aliam; & productum ducitur per aliam è dictis rationibus alias, donec generetur vnum vltimum, quòd erit ratio prima ad vltimam compoſita ex intermediis.*

IN hac noſtra definitione aſſumimus multiplicationem rationum quæ reperiuntur inter quantitates commenſurabiles & incommenſurabiles, non autem multiplicationem denominatorum qui ſolùm ſpectant ad quantitates commenſurabiles. Quòd verò rationes multiplicari poſſint quæcumque vna per aliam declaratur, vt vna quantitas per aliam. Imprimis quæcumque rationes ſunt comparabiles licet non primò & per ſe vti quantitates ipſæ in quibus fundantur; omne autem comparabile multiplicatum debet excedere aliud per defin.5. Authorum huius libri; multiplicatio autem iſta poteſt eſſe vel per numeros, vel per aliquid aliud eiuſdem rationis cum multiplicato, vt linea ducitur per lineam, numerus per numerum. Et quia in ſolis quantitatibus commenſurabilibus reperitur denominator rationis inter illas, qui à nonnullis vocatur quantitas rationis, vices gerens ipſius rationis, eamque ſignificans per aliquid notius & cōpendioſius, ideò rectè aſſumitur iſta multiplicatio denominatorum inter ſe ad componendam rationem. Verùm quia in aliis quantitatibus incommenſurabilibus non eſt huiuſmodi denominator ſub numeris expreſſus, ideò pro compoſitione rationis inter illas, non poteſt aſſumi multiplicatio illorum denominatorum inter ſe, ſed ſolummodò relationum ad componendam rationem primæ quantitatis ad vltimam. Et ſic aſſumpſimus id quod eſt commune omnibus quantitatibus, non autem id quod eſt proprium vni: nam in hoc libro & ſexto, & aliis multis compoſitio rationum ſumitur inter omnes quantitates, non autem ſolùm inter commenſurabiles. Quòd ſi quis inquirat quomodò rationes irrationales inter ſe multiplicentur, non eſt huius loci tractare: Sicut enim in axiomatibus primi libri horum elementorum, aſſumitur additio ac detractio inter omnes quantitates, & in decurſu Geometriæ docetur quomodo illa fieri debeat, tam in lineis, quàm in ſuperficiebus, quàm in corporibus, ac demonſtratur æqualitas inter addendas & factas, vel inter ſubtractas & reſiduas & primas è quibus fit ſubtractio; ita etiam hoc loco ſupponimus huiuſmodi rationum irrationalium multiplicationem, quam poſtea conuenienti ſuo loco ad praxim reducemus, & rectè factam demonſtrabimus.

Hanc explicationem ac demonſtrata in ea, Sapientiæ tribue, non Geometriæ, ad quam ſpectat iudicare de principiis omnium diſciplinarum, eaque vel condemnare vel defendere.

Porrò hanc definitionem euocauimus ex libro ſequenti ſexto, vt nobis vſui eſſet in demonſtrationibus nonnullarum propoſitionum huius libri quinti poſtremarum.

# AXIOMATA.

Interpretes huius libri vtuntur hoc axiomate ſequēti vnico. ***Quam proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo propoſita ad aliquam aliam; & eandem habebit quapiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propoſitam.***

VT ſi ſit A quantitas ad B quantitatem, & C tertia quantitas ſit data, hæc habebit ad aliam quantitatem puta D, eandem rationem quam habet A ad B. Vel ſi detur A ad B, & alia quātitas D: Adhuc alia quantitas erit puta C, quæ ad hāc datam D, habeat eandem rationem, quam habet A ad B. Nullum enim abſurdū ex his ſequitur, & conſtat experientia quatuor quantitas eſſe proportionales vt prima ad ſecundam; ita tertia ad quartam.

Beneficio huius axiomatis ſumunt multiplicia & æquemultiplicia cuiuſcumque quantitatis, licet adhuc non ſit tradita methodus & ars, multiplicandi quaſcumque quantitates: ſicut in primo libro aſſumunt ſubtractionem & additionem quantitatum licet non ſit adhuc in primo libro nota in particulari, ſed ſolùm in vniuerſū nulla cōtradictio appareat.

Quæ ſequuntur noſtra axiomata ſunt quæ magnā præferent lucem in Geometricis. Porrò fundamentum ea aſſumendi præmittimus, quorum robur ac firmitas illi innititur.

***Axiomata primi libri circa æqualitatem, exceſſum ac defectum, debent ſumi in vniuerſum in omnibus comparabilibus.***

Compa-

Comparabilia inter ſe ſunt multa in ratione æqualitatis, & maioris & minoris æqualitatis, exceſſus ac defectus. Primò quantitates quæ per ſe comparantur in hiſce rationibus. Secundò rationes quæ inter quantitates ipſas ſunt, eſt enim maior & minor ratio, & æqualis ſeu eadem ſpecie. Tertiò motus & tempus, de quibus ſuprà egimus: Omnia autem huiuſmodi axiomata ſunt ſub terminis vniuerſaliſſimis, ſeu vt loquuntur quidam ſummuliſtæ Philoſophi, infinitatis; debent ergo applicari omnibus comparabilibus prædictis: & reuerà applicantur lineis, ſuperficiebus, corporibus, licet in primo libro exempla ſoleant dari in ſolis lineis vel numeris ad maiorem facilitatem præbendam Tyronibus. Proponemus ergo noſtra hæc ſequentia axiomata, & referemus ad illa primi libri ex quibus dependent tanquam ex ſuperiore quod prædicari debet de illis. Sit ergo primum

### I.

*Subduplum, ſubtriplum alicuius, & ſic de aliis ſubmultiplicibus, ſi duplicetur, vel triplicetur; fiet æquale illi: & ſic de reliquis ſubmultiplicibus. ex 19. ax. libr. 1.*

### II.

*Si æquemultiplicibus, vel æqueproportionatis, vel æqualibus rationibus ſeu eiſdem rationibus; æquemultiplicia, vel æqueproportionata, vel æquas rationes ſeu eaſdem addas: fient æquemultiplicia, vel æqueproportionata, vel æquales rationes ſeu eadem rationes. ex 2. ax. libr. 1.*

### III.

*Multiplicium multiplicia, ſunt multiplicia primorum.*

*Et æquemultiplicium æquemultiplicia; vel æqueproportionatorum æqueproportionata: ſunt æquemultiplicia, vel æqueproportionata primorum. ex 1. ax. libr. 1.*

### IV.

*Si inæquemultiplicium, vel inæqueproportionatorum vni addatur æquemultiplex vel æqueproportionatum reſpectu alterius: fient inæquemultiplicia, vel inæqueproportionata reſpectu eiuſdem alterius. ex 4. axiom. libr. 1.*

### V.

*Si ab æquemultiplicibus æquemultiplicia, vel ab æqueproportionatis æqueproportionata, vel ab æqualibus rationibus æquales rationes demantur: relinquentur æquemultiplicia vel æqualia ipſis minoribus; vel æqueproportionata; vel æquales rationes ſeu eiuſdem ſpeciei. ex ax. 3. libr. 1.*

### VI.

*Æquemultiplicia eiuſdem vel æqualium ſunt æqualia. ex 6. ax. libr. 1. vel ex 1.*

### VII.

*Æqueproportionata eiuſdem vel æqualium ſunt æqueproportionata inter ſe.*

*Et æquales rationes vni tertiæ, ſunt æquales inter ſe:*

*Et quod idem eſt eadem rationes vni tertiæ vel eiſdem rationibus, ſunt eadem inter ſe rationes. Ex axioma 1. libr. 1.*

### VIII.

*Si æquemultiplicibus inæquemultiplicia, vel æqueproportionatis inæqueproportionata, vel æqualibus rationibus inæquales, vel eiſdem rationibus inæquales addantur: fient inæquemultiplicia, vel inæqueproportionata, vel inæquales rationes ſeu diuerſæ rationes.*

*Et ſi inæquemultiplicibus æquemultiplicia, vel inæqueproportionatis æqueproportionata, vel inæqualibus rationibus æquales, vel diuerſis eadem addantur: fient inæquemultiplicia, vel inæqueproportionata, vel inæquales rationes, vel diuerſæ rationes. ex 4. ax. libr. 1.*

### IX.

*Si vnum æquemultiplicium, vel æqueproportionatorum, vel vna ratio eiuſdem ſpeciei, ſit quid maius altero, vel minus: etiam alia æquemultiplicia, vel æqueproportionata, vel aliæ rationes eiuſdem ſpeciei, erunt quid maius aut minus altero eodem. ex 1. ax. libr. 1.*

### X.

*Subduplum, vel ſubtriplum, & ſic de aliis huiuſmodi, eſt æquale ei quod fuit duplicatum vel triplicatum, ſi ſumatur prout debet. ex 7. ax. lib. 1.*

### XI.

*Si eadem quantitas vel æquales quantitates, diuidatur in plures partes æquales, & in pauciores; quælibet plurium minor eſt qualibet pauciorum: tùm tot numero plurium, quot pauciorum, ſunt maiores.*

## PROPOSITIO I.

Si ſint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquemultiplices: quàm multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Svppoſitio. Sint exempli gratia tres magnitudines A 20, B 30, C 48, trium aliarum magnitudinum D 10, E 15, F 24; ſingulæ ſingularum æquemultiplices; hoc eſt A 20, dupla D 10; B 30, dupla E 15; C 48, dupla F 24: Dico quàm multiplex eſt vna quæcumque, v. g. A 20, ſuæ propriæ minoris D 10, hoc eſt dupla in exemplo iſto; ita multiplicem eſſe videlicet duplas, omnes ABC 98, omnium DEF 49; hoc eſt breuius A 20, & ABC 98, eſſe æquemultiplices ſuarum propriarum minorum D 10, DEF 49, nimirum duplas.

| | | |
|---|---|---|
| A 20. | B 30. | C 48. |
| D 10. | E 15. | F 24. |

ABC 98.
DEF 49.

Demonſtratio. Dantur ſingulæ minores magnitudines D 10, E 15, F 24, ſubduplæ ſuarum propriarum maiorum A 20, B 30, C 48; ergo ſi ſingulæ duplicentur fient æquales illis ſuis propriis maioribus A 20, B 30, C 48. per 1. noſtrum axioma huius libri. Iam verò ſi A 20, & B 30, datæ addantur ſibi inuicem, & A 20, & B 30, factæ etiam ſibi addantur, an non fient per 2. ax. lib. 1. æqualia tota? quibus etiam ſi addantur æqualia C 48 datum, & C 48 factum, nónne fient alia tota æqualia? A B C 98, & ABC 98, per idem 2. ax. lib. 1. facti verò totius ſubduplū 49 DEF æquale minoribus datis D 18, E 15, F 24, per 10. noſtrum axioma huius libri, an non metietur bis ſuum totum factum? ex natura partis determinatæ ac denominatæ; & per 7. ax. lib. 1. nónne erit etiam ſubduplum alterius ABC 98 æqualium? ergo illud etiam bis metietur: Datur autem quælibet minor magnitudo, v. g. in exemplo allato D 10, bis metiri maiorem ſuam A 20; ergo æquemultiplices erunt A 20, ABC 98, ſuarum propriarum minorum D 10, DEF 49, per def. 11. primarum noſtrarum huius libri. Hæc demonſtratio applicanda erit proportione ſeruata omnibus aliis exemplis quarumlibet aliarum ſpecierum generis multiplicis. In omnibus verò proportionibus demonſtrabitur prop. 12.

## PROPOSITIO II.

Si prima ſecundæ ęquè fuerit multiplex atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æquemultiplex, atq; ſexta quartæ: erit & compoſita prima cum quinta ſecũdæ æquemultiplex, atque tertia cum ſexta quartæ.

Svppoſitio. Sit prima A 12 magnitudo ſecundæ B 4, æquemultiplex hoc eſt tripla, atque tertia C 9, quartæ D 3; & quinta E 8, æquemultiplex ſecundæ B 4, hoc eſt dupla, atque ſexta F 6, quartæ D 3: Dico A E 20, compoſitam ex prima A 12, & E 8 quinta; eſſe æquemultiplicem ſecundæ B 4; vt CF 15, compoſita ex C 3 tertia, & ſexta F 6, ipſius quartæ D 3: hoc eſt eſſe quintuplas. & de aliis ſpeciebus æquemultiplicium.

| | |
|---|---|
| A 12. | C 9. |
| B 4. | D 3. |
| E 8. | F 6. |

A E 20.
C F 15.

Demonſtratio. Dantur A 12, & C 9, æquemultiplices prima & tertia, ſuarum minorum B 4, D 3, tertiæ & quartæ: Dantur etiam E 8, F 6, æquemultiplices quinta & ſexta, earumdem ſuarum B 4, D 3, tertiæ & quartæ; ergo per 2. ax. libri huius noſtrum ſi æquemultiplicibus A 12, & C 9, addantur æquemultiplices E 8, F 6, earundem ſuarum B 4, D 3; fient A E 20, CF 15, æquemultiplices earundem B 4, D 3: hoc eſt prima & quinta: tùm tertia & ſexta, æquemultiplices ſecundæ B 4, & quartæ D 3, ſuarum propriarum, quod erat propoſitum.

PRO-

## PROPOSITIO III.

Si ſit prima ſecundæ æquemultiplex, atque tertia quartæ; ſumantur autem æquemultiplices primæ & tertiæ: erit ex æquo, ſumptarū vtraque vtriuſque æquemultiplex; altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.

SVppoſitio. Sit prima A 4, ſecundæ B 2, æquemultiplex, atque tertia C 6, quartæ D 3; & ſumptæ ſint E 8, F 12, æquemultiplices primæ ac tertiæ, E 8 quidem primæ A 4, & F 12, ſecundæ B 2. Dico E 8, F 12, eſſe æquemultiplices ſecundæ & quartæ, vtraque vtriuſque propriæ; hoc eſt E 8, ſecundæ B 2, & F 12, quartæ D 3.

| | |
|---|---|
| A 4. | C 6. |
| B 2. | D 3. |
| E 8. | F 12. |

Demonſtratio. E 8, F 12, dantur æquemultiplices primæ A 4, & tertiæ C 6, illa primæ, iſta tertiæ; & datur A 4 prima ſecundæ B 2, æquemultiplex, vt C 6 tertia quartæ D 3: ergo per noſtrum axioma 3. libri huius, erit E 8 æquemultiplex ſecundæ B 2, atque F 12, quartæ D 3. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO IV.

Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, vt tertia ad quartam: Etiam æquemultiplices primæ & tertiæ, ad æquemultiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

SVppoſitio. Prima A 5, ad ſecundam B 2, eandem habeat rationem, atque tertia C 6, ad quartam D 3. Dico æquemultiplices E 8, F 12, primæ & tertiæ, ad æquemultiplices G 10, H 15, ſecundæ B 2, & D 3, quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habere rationem, ſi prout inter ſe reſpondent ità ſumptæ fuerint; hoc eſt E 8 multiplicem primæ ad G 10 multiplicem tertiæ, eandem habere rationem, quàm F 12 æquemultiplex tertiæ C 6, ad H 15, æquemultiplicem D 3 quartæ.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I 16. | E 8. | A 4. | B 2. | G 10. | L 20. |
| K 24. | F 12. | C 6. | D 3. | H 15. | M 30. |

Conſtructio. Sumantur ipſarum E 8, F 12, æquemultiplices I 16, K 24, primæ prima, ſecundæ ſecunda; tùm aliarum G 10, H 15, æquemultiplices L 20, M 30, primæ prima, ſecundæ ſecunda, idque iuxta quamuis multiplicationem.

Demonſtratio. Si nōn ſit E 8, ad G 10, ſicut F 12, ad H 15. vna habebit maiorem rationem ad ſuam, quàm alia ad aliam; ergo per def. 8. Authorum huius libri, vna æquemultiplicium I 16, K 24, primæ E 8, ac tertiæ F 12, ſi exceſſerit ſuam æquemultiplicium L 20, M 30, ſecundæ G 10, & quartæ H 15, alia non excedet, ſecundùm aliquam multiplicationem. Eſt autem E 8, prima ſecundæ A, æquemultiplex, atque F 12 tertia, quartæ C 6, ex datis; & ſumptæ ſunt æquemultiplices I 16, K 24, primæ E 8, & tertiæ F 12: ergo per præcedentem propoſ. 3. huius libri, ipſæ I 16, K 24, erunt æquemultiplices ſuarum A 4, C 6, ſecundùm quamcumque multiplicationem: Eodem modo G 10, prima ſecundæ B 2, eſt æquemultiplex, atque H 15 tertia quartæ D 3, ex datis, & ſumptæ ſunt æquemultiplices L 20, M 30, primæ G 10, & tertiæ H 15: ergo per prop. præcedentem 3. libri huius, ipſæ æquemultiplices L 20, M 30, erunt æquemultiplices ſuarum B 2, D 3, iuxta quamcumque multiplicationem. Dantur autem eſſe A 4 ad B, vt C 6, ad D 3; ergo per 6. def. Authorum huius libri æquemultiplices I 16, K 24, primæ A 4, ac tertiæ C 6; vnā excedent, vel deficient, vel æquabuntur, reſpectu æquemultiplicium L 20, M 30, ſecundæ B 2, & quartæ D 3, ſecundùm quamcumque multiplicationem, contra conſecutionem deductam ab poſitione aduerſarij contradicente huic propoſitioni, quæ ideò demonſtrata relinquitur. Erit ergo E 8 ad G 10, vt F 12, ad H 15. videlicet æquemultiplices primæ ac tertiæ, eandem habebunt rationem ad æquemultiplices ſecundæ & quartæ, ex datis, ſi prout inter ſe reſpondent, ſumptæ fuerint ac relatæ.

## COROLLARIVM.

*Si fuerit antecedens ad conſequens, vt aliud antecedens ad conſequens; erit etiam conſequens primum ad ſuum antecedens, vt conſequens ſecundum ad ſuum antecedens.*

SVppoſitio. Sit A ad B, vt C ad D; Dico eſſe inuertendo ſeu per rationem inuerſam alternando ſeu permutando; vel definitam defin. 13. B ad A vt D ad C.

| | | |
|---|---|---|
| E. | A ad B | G. |
| F. | C ad D | H. |

B. ad A.
D. ad C.

Conſtructio. Sumantur E, F, æquemultiplices primæ A, & tertiæ C, iuxta quamcumque multiplicationem, E quidem ipſius A, & F ipſius C; tùm G, H, æquemultiplices ſecundæ B, & D quartæ, iuxta quamcumque multiplicationem, G quidem ipſius B, H verò ipſius D.

Demonſtratio. Quoniam eſt A ad B, ſicut C ad D, erunt per defin. 6. Authorum huius libri, æquemultiplices E, F, primæ A & tertiæ C, vnâ vel æquales, vel deficientes, vel excedentes, reſpectu æquemultiplicium G, H, ſecundæ B, & quartæ D; quare per ipſam defin. cit. 6. erit B ad A, vt D ad C.

## PROPOSITIO V.

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: erit reliqua reliquæ ita multiplex, vt tota totius.

SVppoſitio ſit A 16. magnitudo magnitudinis B 8, ita multiplex, vt ablata C 8, ab A 16, ablatæ D 4, ab B 8: Dico reliquam E 8, ex A 16, ita eſſe multiplicem reliquæ F 4, ex B 8; atque eſt tota A 16, totius B 8.

AC 24. BD 12.

| | |
|---|---|
| A. 16. | B 8. |
| C. 8. | D 4. |

E 8. F 4.
CE 16. DF 8.

Demonſtratio. Si non ita ſit, ſit ſi fieri poſſit inæquæmultiplices E 8, & A 16; illa reliqua, ipſius F 4, reliquæ; hæc verò A 16 tota, totius B 8: Tunc ſi illis addatur C 8, æquemultiplex ſuæ D 4, atque tota A 16, ſuæ totius B 8; fiet CE 16, ipſius DF 8, inæquemultiplex reſpectu totius A, ad totam BD 12. per noſtrum 4. ax. libri huius: eſt autem per prop. 1. AC 24 tàm multiplex BD 12, quàm A 16, ipſius B 8; ergo per noſtrum ax. 9. huius libri, CE 16, & A 16, erũt inæquemultiplices ſuarũ minorũ DF 8, B 8: ſed eſt CE 16, tota ipſa A 16, per 19. ax. libr. 1. ſicuti etiam FD 8, eſt tota ipſa B 8; ergo inæquemultiplex erit eadem magnitudo reſpectu eiuſdem ſuæ minoris magnitudinis; & ſic eadem pars ſuum totum metietur inæqualibus vicibus, contra naturam æquemultiplicis definitam 9. def. noſtrarum primarum huius libri. Abſurdum hoc indicat eſſe falſam poſitionem contradicentem huic propoſitioni, quæ ideò demonſtrata relinquetur. & in omni alio genere proportionum oſtendetur propoſ. 19.

## PROPOSITIO VI.

Si duæ magnitudines duarũ magnitudinum ſint æquemultiplices, & detractæ ſint quædam earundem æquemultiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut ipſarum æquemultiplices.

SVppoſitio. Duæ magnitudines A 100, C 200, ſint duarum magnitudinum B 10, D 20, æquemultiplices, A quidem ipſius B, C verò ipſius D; & detractæ æquemultiplices earundem B & D, E 90 ipſius B; F 180, alterius D: vel G 50, ipſius B, & H 100, ipſius D. Dico reliquas I 10, K 20; vel L 50, M 100, eſſe vel æquales eiſdem B, & D; vel ipſarum æquemultiplices.

A 100. C 200.
B 10. D 20.

| | |
|---|---|
| E 90. | F 180. |
| G 50. | H 100. |

I 10. K 20.
L 50. M 100.

Demonſtratio. Dantur A & C, æquemultiplices

tiplices ipſarum B & D, A quidem ipſius B, C verò ipſius D; toties B metietur A, quoties D metietur C, per def. 11. noſtrarum primarum huius libri. Dantur etiam E, & F, æquemultiplices earundem B & D, E quidem ipſius B, F verò ipſius D; dantur etiam G & H, earundem B & D, æquemultiplices, G quidem ipſius B, H verò ipſius D; ergo per eandem def. toties B metietur E, quoties D ipſam F; & toties B metietur G, quoties D ipſam H. Iam verò per 5. ax. noſtrum huius libri ſi ab æquemultiplicibus A & C, demantur æquemultiplices E, F, vel G, H, remanebunt æquemultiplices vel æquales, I, K, aut L, M; ergo ſi B metiatur ſemel I, D etiā ſemel metietur K; atque ita reſiduæ æquales erunt: ſi verò B metiatur L reſiduam, pluries, toties D, metietur reſiduam M, per def. 11. cit. & ſic erunt æquemultiplices reſiduæ. quæ erant demonſtranda.

## COROLLARIVM NOSTRVM

*Si duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant rationem; & detracta quædam habeant ad eaſdem eandem rationem: & reliqua ad eaſdem eandem proportionem habebunt.*

HOc per idem axioma noſtrum 5. cit. demonſtratur, & vniuerſaliſſimum; quare propoſitio iſta poſſet abeſſe, nam contineretur in ſua vniuerſali ratione.

## PROPOSITIO VII.

Æquales ad eandem, eandem habent rationem. Et eadem ad æquales.

SVppoſitio. Sint æquales magnitudines A & B, & tertia magnitudo C: Dico ita eſſe A ad C, vt B ad C: Tùm ita eſſe C ad A, vt C ad B.

| | | |
|---|---|---|
| D. | A. ad C. | F. |
| E. | B. ad C. | G. |

Conſtructio. Sumatur bis C tertia data magnitudo: & iuxta quamcumque multiplicationem ſumantur D & E, æquemultiplices æqualium datarum A & B; quæ æquemultiplices in quacumque ſpecie erunt æquales per 6. axioma noſtrum huius libri: Similiter iuxta quamcumque multiplicationem ſumantur æquemultiplices F, G, ipſarum C, C, vel vnius C repetitæ bis, vel bis ſumptæ; iſtæ etiam æquemultiplices F, G, æquales erunt per cit. axio. 6.

Demonſtratio. Quia D & E, ſunt æquales, & F & G ſunt etiam æquales, certum eſt ſi D ſit æqualis ipſi F, etiam E erit æqualis ipſi G, per 1. ax. libr. 1. quod ſi D fuerit maior quàm F, etiam E erit maior quàm G, per idem ax. Et ſi D fuerit minor quàm F, erit etiam E minor quàm G, per idem axioma. Sed D & E ſunt æquemultiplices primæ A ac tertiæ B; & F & G, ſunt æquemultiplices ſecundæ C & quartæ C; idque iuxta quamcumque multiplicationem: & ſic per def. 6. huius libri, erit A prima ad ſecundam C, vt B tertia ad quartam C: hoc eſt A & B æquales, ad eandem C, babebunt eandem rationem.

Similiter ſi eadem C bis ſumatur, & comparetur cum duabus A & B æqualibus, erit C ad A, vt C ad B, hoc eſt eadem C ad æquales A & B, eandem habebit rationem, ob æquemultiplices C & C primæ & tertiæ demonſtratis vel vnâ excedere vel vnâ deficere, vel vnâ æquales eſſe, reſpectu æquemultiplicium D & E: ſecundæ A & quartæ B; iuxta quamcumque multiplicationem.

## COROLLARIVM NOSTRVM

*Æquales ad æquales eandem habent rationem.*

HOc demonſtratum eſt aſſumendo bis eandem C, quæ eſt veluti duæ magnitudines æquales.

## PROPOSITIO VIII.

Inæqualium magnitudinum, maior ad eandem, maiorem habet rationem, quàm minor.
Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.

SVppoſitio. Sint duæ magnitudines inæquales A 10, maior, C 8 minor, & data alia D 5 quæcumque: Dico maiorem A 10 magnitudinem habere maiorem rationem ad D 5; quàm C 8 minor ad eandem D 5: Tùm dico eandem magnitudinem D, habere maiorem rationem ad C 8 minorem magnitudinem, quàm ad A 10 maiorem.

Conſtructio requirit probationem duorum princi-

principiorum , quibus innitetur demonſtratio propoſitionis. Primũ eſt, Datis duabus magnitudinibus inæqualibus comparabilibus,ſumi poteſt multiplex datæ minoris,quæ ſit proximè maior maiore alia magnitudine data : ſumendo enim multiplicem datæ minoris, quod fieri poteſt per petitionem 4.lib. 1. & ab illa detrahendo ipſam minorem è datis inæqualibus, vel remanebit magnitudo maior tertia data magnitudine, vel minor illa, vel æqualis illi : ſi ſecundum & tertium, multiplex aſſumpta erit proximè maior data magnitudine maiore, iuxta def.18. primarum noſtrarum huius libri: ſi primùm, ſumenda erit alia multiplex eiuſdem minoris, quàm hæc minor metiatur vna vicè minùs quàm alia præcedens aſſumpta;& ſic deinceps,donec minor ipſa detracta ex illa multiplici , relinquat magnitudinem non maiorem data magnitudine;tunc enim illa multiplex ſic aſſumpta minoris erit proximè maior data maiore magnitudine, per def. 18. cit. Alterum verò eſt, Datis duabus magnitudinibus comparabilibus inæqualibus , & ſumpta multiplicè minoris datæ proximè maiore quàm data maior;ſi detrahatur ex hac multiplici ipſa minor, relinquetur magnitudo non maior maiore data: ſi enim relinqueretur magnitudo maior data maiore, non eſſet multiplex minoris aſſumpta proximè maior data maiore,proximè maior; nam proximior eſſet iſta relicta, vna vice ſolum non ita multiplex eiuſdem minoris,atque alia totalis;hoc verò deſtruit ſuppoſitionem : quare verum erit hoc ſecundum principium atque demonſtratum.

| | | | |
|---|---|---|---|
| GH 30 | A 10. ad D 5. | I 25. | K 20. |
| G 24 | C 8. ad D 5. | I 25. | IH 26. |

H 6. E 2.

Iam verò accedamus ad cõſtructionem.De maiore A 10 magnitudine detrahatur minor C 8, reſidua erit E 2 : Tùm ſumantur æquemultiplices G 24, H 6,ipſarũ C 8, E 2; ita vt vna æquemultipliciũ ſit maior quã A 10, & altera ſit maior quàm D 5. quod fieri poteſt per petit.4.lib.1.Summa verò GH 30, harum æquemultiplicium G 24, H 6, tam erit multiplex ſummæ CE 10, minorum C 8, E 2; quàm multiplex eſt vna G 24, vnius C 8, per 1.propoſitionem huius libri: Et quia CE 10, eſt ipſa magnitudo maior data A 10,iuxta 19. ax.lib.1.ideò primæ maioris A 10, datæ magnitudinis, & ſecundæ C 8, minoris, ſumptæ erunt æquemultiplices GH 30, G 24. Præterea,D 5, magnitudo data terminat duas relationes maioris A, & minoris C, bis ſumatur, & eius multiplex I 25, ſumatur proximè maior multiplicè alia G 24, magnitudinis datæ minoris C 8, ( quòd fieri poſſe oſtendimus in principio primo huius conſtructionis ; ) & hæc multiplex I 25 bis etiam ſumatur; ſic enim I 25, I 25, erunt æquemultiplices ſecundæ D 5, & quartæ D 5, magnitudinum datarum : & GH 30,G 24, erunt æquemultiplices aſſumptæ, A 10 primæ magnitudinis,& C 8, tertiæ. Quòd ſi ab I 25, multiplice D 5, detrahamus ipſam D 5, relinquetur K 20, minor quidem quàm G 24, per 2. principium huius conſtructionis; Et ſi reſiduo K 20, addamus H 6 maiorem ſumptam quàm D 5, fiet IH 26,maior quàm I 25;ergo multò magis ſi addamus H 6,ipſi G 24 maiori quàm K 20,fiet GH 30 multò maior quàm I 25,per 4.ax.libr.1.Oſtendimus igitur in hac conſtructione, poſita A 10 maiore prima magnitudine, & D 5, ſecunda, & C 8 tertia, & D 5 quarta ; GH 30, G 24, eſſe æquemultiplices primæ A 10, & tertiæ C 8; tùm I 25, I 25, eſſe æquemultiplices ſecundæ D 5, & quartæ D 5 : tùm oſtendimus GH 30 multiplicem primæ A 10 maioris : eſſe maiorem multiplice I 25 ſecundæ ; & G 24, multiplicem tertiæ C 8, non excedere multiplicem I 25, quartæ D 5.ex quibus ſequitur.

Demonſtratio GH 30 multiplex primæ maioris magnitudinis A 10, excedit I 25 multiplicem ſecundæ D 5;& G 24 multiplex tertiæ magnitudinis C 8 minoris è datis duabus inæqualibus A 10, C 8, non excedit I 25 multiplicem D 5 quartæ:ergo per def.8. Authorum huius libri, maior erit ratio A 10 maioris ad eandem D magnitudinem 5, quàm minoris C 8, ad eandem D magnitudinem 5. quod erat primo loco propoſitum demonſtrandum. Et quia ſi ponatur prima magnitudo D 5,& C 8, & tertia D 5,& quarta A 10, maior è datis inæqualibus A 10, C 8,quia ex conſtructione manifeſtum eſt I 25 multiplicem primæ D 5 , maiorem eſſe multiplice G 24, ſecundæ C 8; & multiplicem I 25 tertiæ D 5 : non excedere GH 30 multiplicem quartæ A 10; ideò per eandem def.8.cit. maior erit ratio D ad minorem C,quàm ad maiorem A. quod erat ſecundo loco propoſitum ac demonſtrandum.

PRO-

## PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandem, eandem habent rationem; æquales ſunt inter ſe. Et ad quas eadem, eandem habet rationem; eæ quoque ſunt æquales inter ſe.

SVppoſitio. A magnitudo habeat eandem rationem ad C, ſicuti B: Dico A & B magnitudines eſſe æquales inter ſe. Sit etiam C ad A, vt ad B; Dico A & B eſſe æquales inter ſe magnitudines.

A. C.
B.

Demonſtratio. Magnitudines relatæ ad eandem magnitudinem eadem ratione; vel ad quas eadem magnitudo refertur eadem ratione; Debent eſſe inæquales vel æquales: Si primum maior ad eandem habebit maiorem rationem quàm minor; vel eadem ad minorem ſibi vendicabit maiorem rationem quàm ad maiorem, per propoſ. præcedentem 8: hæ conſecutiones deſtruunt data, ergo principia è quibus fluunt erunt falſa, videlicet quòd A & B ſint magnitudines inæquales: erunt ergo æquales prout propoſitum fuit.

## PROPOSITIO X.

Ad eandem magnitudinem rationem habētium, quæ maiorem rationem habet; illa maior eſt. Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.

SVppoſitio. A magnitudo habeat maiorem rationem ad C, quàm B; Dico A eſſe maiorem quàm B. C autem habeat maiorem rationem ad B quàm ad A; Dico B eſſe minorem quàm A.

Demonſtratio primæ partis, ſi A non ſit maior quàm B, erit vel æqualis vel minor; ſi primùm, A & B habebunt eandem rationem ad C, per 7. prop. libr. huius; ſi ſecundùm, A minorem habebit rationem ad C, quàm B, per 8. prop. hæ conſecutiones deſtruunt data, ergo principia vnde fluunt erunt falſa, videlicet A & B eſſe vel æquales, vel A eſſe minorem B; relinquitur igitur vt A ſit maior quàm B, ſicuti fuit propoſitum in hac prima parte.

Demonſtratio ſecundæ partis. Si B non ſit minor quàm A, erit vel illi æqualis, vel maior; Si primùm, C habebit eandem rationem ad B quàm ad A; per 7. propoſ. libr. huius: ſi ſecundùm, habebit C ad A maiorem rationem quàm ad B, per 8. prop. hæ conſecutiones deſtruunt data, ergo origines vnde procedunt captioſi erunt, nimirum B & A eſſe vel æquales, vel B maior quàm A: relinquitur ergo vt B ſit minor quàm A, quemadmodum fuit ſecundo loco propoſitum.

## PROPOSITIO XI.

Quæ ſunt eidem eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

DEmonſtratio. Quæ ſunt eadem vni tertio ſunt eadem inter ſe per 7. axioma noſtrum huius libri: Dantur autem eidem rationi eædem rationes, ergo erunt eædem inter ſe per 7. illud axioma.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Quæ ſunt eiſdem rationibus eadem rationes, & inter ſe ſunt eadem.*

HOc enim eſt altera pars axiomatis illius 7. noſtri.

## PROPOSITIO XII.

Si ſint magnitudines quotcumque proportionales: quemadmodum ſe habuerit vna antecedētium ad vnam conſequentium; ita ſe habebunt omnes antecedentes, ad omnes conſequentes.

SVppoſitio. Sit A ad B, vt C ad D, & vt E ad F: Dico ita eſſe A C E ſummam antecedentium omnium ad BDF ſummam conſequentium omnium, vt eſt A vna magnitudo antecedentium, ad B ſuam conſequentem, vel vt C ad D, vel vt E ad F.

G. H. I.

G. H. I.

| | | |
|---|---|---|
| A. | C. | E. |
| B. | D. | F. |

K. L. M.

| | | |
|---|---|---|
| A C E, | ad | BDF. |
| A. | ad | B. |
| C. | ad | D. |
| E. | ad | F. |

Conſtructio. Sumantur æquemultiplices G. H. I. antecedentium A, C, E; tùm æquemultiplices K, L, M, conſequentium B, D, F, iuxta quamcumque multiplicationem. Erunt per 1. prop. libr. huius, omnes G, H, I, æquemultiplices omnium A, C, E, vt vna vnius, puta G, ipſius A: eodem modo erunt omnes K, L, M, æquemultiplices omnium B, D, F, vt vna vnius, puta K, ipſius B. His poſitis ſequitur.

Demonſtratio. Datur A prima ad ſecundam B, vt C tertia ad quartam D, vel vt E alia tertia ad quartam aliam F; ergo per def. 6. libri huius, æquemultiplices G, H, vel G, I, primæ & tertiæ, vnà excedent, vel deficient, vel æquabuntur, reſpectu æquemultiplicium K, L, vel K, M, ſecundæ & quartæ. Quare ſi omnes ſumantur G H I ex vna parte, & ex alia parte omnes K L M, illæ per axiomata 2. vel 8. libr. huius noſtra, erunt vel æquales ſimul iſtis, vel inæquales per defectum aut exceſſum; ſicut vna G ipſius K, vel H ipſius L, vel I ipſius F, iuxta omnem multiplicationem acceptam in conſtructione. Igitur per ipſam defin. 6. libri huius, ſi ſtatuamus A C E primam magnitudinem, & ſecundam BDF, tertiamque A, quartam denique B, vel C tertiam & D quartam, vel E tertiam & F quartam; quia oſtendimus G H I multiplicem primæ vnà deficere vel excedere vel æqualem eſſe reſpectu K L M multiplicis ſecundæ BDF, ſicut excedit, vel deficit, vel æqualis eſt G multiplex tertiæ reſpectu K multiplicis quartæ, vel H reſpectu L, vel I reſpectu M: erit A C E ad BDF, ſicuti A ad B, vel C ad D, vel E ad F; videlicet omnes antecedentes ad omnes conſequentes, ſicuti vna antecedentium ad ſuam conſequentium.

## PROPOSITIO XIII.

Si prima ad ſecundam eãdem habuerit rationem quàm tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad ſextam. Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam.

Svppoſitio. A prima ad ſecundam B, eandem habeat rationem quàm tertia C ad quartam D; tertia verò C ad quartam D maiorem habeat rationem quàm E quinta ad F ſextam: Dico quòd prima A ad ſecundam B, maiorem etiam rationem habeat, quàm quinta E ad ſextam F.

Demonſtratio. In 9. axiomate noſtro huius libri, oſtendimus magnitudines habentes eandem rationem ad ſuas proprias eſſe æquales vel eaſdem in ſpecie relatarum & ſi vna ex illis relata ad ſuam, habeat maiorem rationem quàm alia ad ſuam, oſtendimus eſſe inæquales in ſpecie relatarum. Igitur quoniam A ad B, eſt æqualis C ad D; & C ad D inæqualis E ad F; erit per idem axioma cit. ſeu per 1. axio. libr. 1. etiam A ad B, inæqualis E ad F: hoc eſt vti propoſitum eſt, & explicatum in illo axiomate 10. ſi A ad B eandem rationem habeat, quàm C ad D; & C ad D, maiorem rationem habeat quàm E ad F; etiam A ad B, maiorem rationem habebit quàm E ad F.

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Eiſdem datis, ſi tertia ad quartam minorem habuerit rationem quàm quinta ad ſextam; etiam prima ad ſecundam habebit minorem rationem, quàm quinta ad ſextam.*

### COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Eiſdem datis; ſi tertia ad quartam eandem rationem habuerit quàm quinta ad ſextam; etiam prima ad ſecundam eandem habebit rationem quàm quinta ad ſextam.*

COROL-

COROLLARIVM NOSTRVM

I I I.

*Si prima ad ſecundam maiorem habuerit rationem quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem habuerit rationem quàm quinta ad ſextam: Prima etiam multò magis ad ſecundam habebit maiorem rationem, quàm quinta ad ſextam.*

COROLLARIVM NOSTRVM

I V.

*Si prima ad ſecundam minorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit rationem, quàm quinta ad ſextam: Prima multò magis ad ſecundam habebit minorem rationem, quàm quinta ad ſextam.*

OMnia iſta corollaria dependent ex diſcurſu facto, & axiomate noſtro 9, citato huius libri.

## PROPOSITIO XIV.

Si prima ad ſecũdam eandem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; Prima verò quàm tertia maior fuerit; erit & ſecunda maior quàm quarta. Quod ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecũda æqualis quartæ. Si verò minor, & minor erit.

SVppoſitio. Sit A ad B, vt C ad D; & A prima ſit maior quàm C tertia: Dico ſecundam B eſſe etiam maiorẽ quarta D. Quod ſi prima A fuerit æqualis tertiæ C; dico ſecundam B eſſe æqualem quartæ D. Quod ſi prima A fuerit minor tertia C; dico ſecundam B eſſe minorem quarta D.

A ad B. C ad D.

Demonſtratio primæ aſſertionis. Si ſecunda B nõ ſit maior quarta D; erit vel illi æqualis, vel minor. Eſto primum, Quia datur A ad B, vt C ad D, erit per coroll. prop. 4. libri huius, inuertendo, B ad A, vt D ad C; ſed per prop. 7. huius quia ponit aduerſarius B & D æquales, erit B ad C, vt D ad C; oſtendimus autem eſſe B ad A, vt D ad C, ergo per prop. 11. lib. huius, erit B ad A, vt B ad C; igitur per prop. 9. lib. huius, erunt A & C æquales cõtra datum. hoc abſurdum proueniẽs ex poſitione æqualium B & D, indicat illam eſſe impoſſibilem. Eſto ſi fieri poſſit ſecũdum, videlicet B minor quã D: Quia datur A ad B, vt C ad D, erit inuertendo, per coroll. prop. 4. lib. huius, B ad A, vt D ad C: & quia aduerſarius ponit D maiorẽ quàm B, ipſa D maior maiorẽ habebit rationem ad C, quàm B minor, iuxta prop. 8. li. huius: Inſuper quia oſtẽdimus eſſe B ad A, vt D ad C, & D ad C maiorem habere rationem quàm B ad C; per prop. 13. libr. huius, B ad A habebit maiorem rationem, quàm B ad C: ergo iuxta prop. 10. lib. huius, A minor erit quàm C, contra datum: poſitio ergo aduerſarij deſtruens datũ, erit impoſſibilis. Cùm ergo oſtenderimus B non poſſe æqualem eſſe ipſi D, nec minorem illa, relinquitur vt B ſit maior quàm D, quod erat prima aſſertio.

Demonſtratio ſecũdæ aſſertionis. Datur A ad B vt C ad D, & dantur A & C æquales, ergo per 7. prop. libr. huius, erit A ad B vt C ad B: ergo quia eſt A ad B vt C ad D, & eſt A ad B vt C ad B, erit per prop. 11. libr. huius, erit C ad B vt C ad D: ergo per prop. 9. lib huius, erũt B & D ęquales, quod erat cõcludendum.

Demonſtratio tertiæ aſſertionis. Quia datur A ad B vt C ad D, erit inuertendo iuxta coroll. prop. 4. libr. huius, B ad A vt D ad C; & quia datur A minor quàm C, erit per prop. 8. lib. huius, maior ratio B ad A quàm B ad C. Quoniam igitur eſt D ad C, vt B ad A, & B ad A maiorem habet rationem quàm B ad C; erit per prop. 13. lib. huius, maior ratio D ad C, quàm B ad C: ergo per prop. 10, B minor erit quàm D, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; ſecunda verò ſit maior quàm quarta; erit & prima maior quàm tertia. Quod ſi ſecunda fuerit æqualis quartæ, erit & prima æqualis tertiæ.*

*Denique ſi ſecunda fuerit minor quàm quarta, erit & prima minor quàm tertia.*

SVppoſitio. Sit A ad B, vt C ad D, & primo loco ſit B ſecũda maior quàm D quarta; Dico primam A eſſe maiorem tertia C. ſit ſecundo loco B ſecunda æqualis quartæ D; dico ſecundò A primam eſſe æqualem tertiæ C. Sit tertio loco B ſecunda minor quàm quarta D; dico tertiò primã A eſſe minorem B tertia.

Demonſtratio 1.aſſertionis. Quia datur A ad B, vt C ad D, erit inuertendo per coroll. prop.4,huius libri, B ad A, vt D ad C: datur autem in hac diſpoſitione B ſecunda maior quàm tertia D,ergo per hanc prop.14. erit etiam A maior quàm C,quod erat propoſitum.

Demonſtratio ſecundæ aſſertionis. Datur A ad B vt C ad D;erit per coroll. prop.4.lib. huius B ad A vt D ad C; datur autem B æqualis ipſi D,ergo per hanc prop.14.erit A æqualis ipſi C,quod erat propoſitum.

Demonſtratio tertiæ aſſertionis. Datur A ad B vt C ad D, erit inuertendo per coroll. prop.4.lib.huius,B ad A vt D ad C;datur verò B minor quàm D, ergo per prop.iſtam 14. erit A minor quàm B.quod erat propoſitum.

## COROLLARIVM NOSTRVM
## II.

*Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem quam tertia ad quartam; & prima fuerit maior ſecunda: etiam tertia maior erit quarta.*

*Et ſi prima fuerit æqualis ſecunda, tertia erit æqualis quarta.*

*Et ſi prima fuerit minor quàm ſecunda, erit & tertia minor quàm quarta.*

DEmonſtratio horum pendet ex natura ſimilitudinis rationum quæ denominare debēt ſubiecta illarum: Si enim ſint rationes maioris inæqualitatis,cùm debeant comparari maiores quantitates cum minoribus per def.5.noſtrarum in digreſſione noſtra,neceſſariò ſi prima maior eſt ſecunda, tertia erit maior quarta. ſi verò ſint rationes minoris inæqualitatis, comparabuntur minores cum maioribus per def.6.earundem; ergo ſi prima eſt minor ſecunda, erit & tertia minor quàm quarta. Si denique ſint rationes æqualitatis, comparabitur prima æqualis cum ſecunda illi æquali, & tertia cum quarta ſimiliter, per deſ.3.earundem cit.noſtr.ideoque etiam tertia & quarta erunt æquales. Cùm igitur per omnia genera proportionum inductionem fecerimus,manifeſtum erit coroll.hoc ſecundum.

## PROPOSITIO XV.

### Partes cum pariter multiplicibus, in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

SVppoſitio. Sint partium A 4, B 2, æquemultiplices C 20, D 10,C quidem ipſius A, D verò ipſius B: ( ſic enim ſibi mutuò reſpondent ) Dico ita eſſe C 20 ad D 10, vt A 4 ad B 2, ( ſic enim etiam ſumuntur vt ſibi mutuò reſpondent. )

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| E | 100. | C 20. ad D 10. | G | 50. |
| F | 20. | A 4. ad B 2. | H | 10. |

Conſtructio. Vel partes datæ A,B,ſunt æquales, vel inæquales inter ſe,quomodocumque ſit,datæ erunt earum æquemultiplices ſecundùm quamcumque multiplicationem, eo quod ſub terminis infinitatis vt loquuntur Logici, aſſignentur. Cōſiderandæ erunt quatuor iſtæ quantitates A 4 prima,B 2 ſecunda, C 20 tertia, D 10 quarta: & probandum erit quod ſit A 4 ad B 2,pars nimirum ad partem, vt earū æquemultiplices C 20 ad D 10. Iam verò ſi partes illæ ſint inæquales vt in exēplo allato, ſumēdæ erūt æquemultiplices F 20,E 100,primæ A 4, & tertiæ C 20,iuxta multiplicationē æquemultiplicium ſumptarum C 20,D 10,partiū datarum A 4,B 2:tùm etiam iuxta eandem dictam multiplicationem ſumendæ erunt æquemultiplices H 10, G 50, ſecundæ B 2, & quartæ D 10: iſtæ æquemultiplices ſumptæ erunt vti aliæ C,D,ſecūdùm omnem multiplicationem, quia illæ C,D, ſecūdùm omnem multiplicationem datæ ſunt. Præterea certum C 20 & F 20, multiplicia partis A 4, eſſe æqualia,per 6.ax.noſtrum huius libri, quia ſunt per conſtructionem eiuſdem A 4, æquemultiplicia: Eodem modo erunt D 10,H 10, multiplices partis B 2, æquales per 6. ax. cit. quia ſunt eiuſdem partis B 2 æquemultiplices per cōſtructionem. Certum eſt etiam C 20,& D 10,æquemultiplices datæ,partium A 4,B 2, inæqualium,eſſe inæquales,per 9 ax.noſtrum lib.huius,quia inæqualibus A 4, B 2 datis, æqualia in dictis æquemultiplicibus adiecta ſunt, fietque maiorem C 20, quàm D 10: quocirca erit F 20, maior quā H 10. Deniq; quia C 20,& D 10, oſtenſæ ſunt inæquales, & maior C 20, quàm D 10:æquemultiplices illorum E 100,G 50, erunt inæquales, maiorque E 100, quàm G 20,per cit.9.ax. noſtrum,quia inæqualibus C 20,D 10,ęqualia in dictis ęquemultiplicibus adiecta ſunt.

Demonſtratio quando partes A & B datæ ſunt æquales; probandum enim eſt C & D earum æquemultiplices eſſe etiam æquales inter ſe, vt ſint in eadem ratione. Per 6.ax. noſtrum libri huius,æqualium æquemultiplices, ſunt inter ſe æquales:æquales referuntur

inter

inter ſe relatione æqualitatis: Ergo partes æquales datæ A & B, referentur etiam relatione æqualitatis quæ eſt eadem formaliter in omnibus, ex defin. noſtra 3. primarum noſtrarum huius libri. Erunt igitur C & D, æquemultiplices, vt A & B, in hoc caſu.

Demonſtratio quando partes A & B datæ ſunt inæquales, vt in exemplo allato A 4, B 2. Oſtendimus æquemultiplices F 20, E 100, primæ A 4, & tertiæ C 20, ſemper maiores eſſe æquemultiplicibus H 10, G 50, ſecundæ B 2, & quartæ D 10, (ſi prout debent ſumantur) idque iuxta quamcumque multiplicationem declaratam in conſtructione: ergo per def. 6. libri huius, erit A 4 ad B 2, vt C 20 ad D 10. hoc eſt erunt vt partes A & B, ſic multiplices earum C & D; & magis ſpeciatim erit vt A ad B, ſic C ad D. quod erat probandum in hoc ſecundo caſu. Cùm igitur oſtenderimus in omni caſu propoſitionem iſtam 15. abundè demonſtrata erit.

## PROPOSITIO XVI.

### Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſsim proportionales erunt.

SVppoſitio. Quatuor magnitudines A, B, C, D, ſint proportionales; hoc eſt ſit A ad B, vt C ad D: Dico eſſe permutando, vel alternando, vel viciſſim proportionales iuxta deſ. 12. Authorum huius libri; hoc eſt eſſe A ad C, ſicut B ad D.

A ad B

C ad D

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| E | A | ad | C. | F |
| G | B | ad | D. | H |

Conſtructio. Sumantur iuxta quamcumque multiplicationem æquemultiplices E, G, primæ A, ac tertiæ B; tùm iuxta aliam quamcumque multiplicationem æquemultiplices F, H, ſecundæ C, & quartæ D. Si non ita ſit A ad C, vt B ad D; neceſſariò per def. 8. Authorum huius libri, æquemultiplices E, G, primæ A & tertiæ B, vnâ non excedent æquemultiplices F, H, ſecundæ C & quartæ D; hoc eſt ſi E ſit maior quàm F, non erit G maior quàm H; vel ſi E ſit minor quàm F, nō erit G minor quàm H; vel ſi E ſit æqualis ipſi F, non erit G æqualis ipſi H. Verùm quia datur A ad B, & ſumptæ ſunt earum æquemultiplices E, G; erit per prop. 15. libr. huius, E ad G, vt A ad B: Simili modo, quia ſumptæ æquemultiplices F, H, ipſarum C, D, erit per eandem prop. 15. cit. F ad H, vt C ad D: Et quia datur A ad B, vt C ad D, & iſtis eiſdem rationibus, oſtenſæ ſunt eſſe eædem rationes E ad G, F ad H; erit per noſtrum coroll. prop. 11. libr. huius E ad G, vt F ad H: quare per prop. 14. Si E prima eſt maior tertia F, erit G ſecunda maior quàm quarta H: & ſi E prima eſt minor tertia F, erit & G ſecunda minor quarta H; & ſi E prima fuerit æqualis tertiæ F, erit & G ſecunda æqualis quartæ H.

Demonſtratio. Ex conceſſis & poſitione aduerſarij contradicente aſſertioni huius propoſitionis ſequitur vti oſtendimus in conſtructione, eaſdem quantitates E, G, eſſe vnâ æquales aliis F, H, vel maiores, vel minores illis; tum eſſe inæquales, hoc eſt ſi vna ſit maior, alia non ſit maior; ſi vna ſit minor, alia non ſit minor; ſi vna ſit æqualis, alia non ſit æqualis, ſi prout debent ſumantur. Hæc ſibi repugnant, ergo poſitio aduerſarij rationi repugnabit: manet igitur vera propoſitio iſta contradicens illi poſitioni. Hæc permutatio locum non habet, quando prima & ſecunda è datis eſt diuerſi generis ab tertia & quarta.

## PROPOSITIO XVII.

### Si compoſitæ magnitudines proportionales fuerint; hæ quoque diuiſæ proportionales erunt.

SVppoſitio. ſint compoſitæ magnitudines ACB 12, CB 4. DFE 9, FE 3, proportionales: videlicet ſit ACB 12, ad CB 4, vt DFE 9 ad FE 3: & ACB 12 antecedens excedat CB 4 conſequentem, exceſſu AC 8; & DFE antecedens excedat FE conſequentem ſuam, DF 6 exceſſu. Dico quod iuxta diuiſionem rationis definitam in def. 15. Authorum libri huius, ſit AC 8, ad CB 4, vt DF 6, ad FE 3. hoc eſt ſit exceſſus antecedentis datæ ſupra ſuam conſequentem, ad ſuam conſequentem; ſicut exceſſus alterius antecedentis datæ ſuprà ſuam conſequentem; ad ſuam conſequentem.

A C. 8

| | | |
|---|---|---|
| GHI 36. | ACB 12. ad CB 4. | HIN 28. |
| KLM 27. | DFE 9. ad FE 3. | LMO 21. |

D F 6.

| | | |
|---|---|---|
| | | IN 16. |
| GH 24. | AC 8. ad CB 4. | 12. HI. |
| KL 18. | DF 6. ad FE 3. | 9. LM. |
| | | MO 12. |

Conſtructio. Ex prima antecedente ACB 12 data, dematur ſua conſequens data CB 4; remanebit AC 8, exceſſus, quo antecedens ACB 12 ſuperat ſuam CB 4 conſequentem: Similiter ex alia antecedente DFE data 9, tollatur ſua conſequens data F 3; relinquetur exceſſus DF 6, quo antecedens DFE 9, ſuperat conſequentem ſuam FE 3. Ex quibus colligitur compoſitas datas magnitudines eſſe in ratione maioris inæqualitatis; quia diuiſio rationis definita loco citato, ſupponit exceſſus magnitudinum antecedentium ſupra ſuas minores conſequentes. Iam verò iſtarum magnitudinum AC 8. CB 4. DF 6. FE 3. ſumantur eodem ordine per quamcumque multiplicationem æquemultiplices GH 24, HI 12, KL 18, LM 9. Certum eſt per 1. propoſ. libr. huius, quod GHI 36 erit tàm multiplex ipſius ACB 12, quàm GH 24, ipſius AC 8; tùm etiam KLM 27 erit tàm ipſius DFE, quàm KL 18, ipſius DF 6. Et quia ſumptæ ſunt illæ æquemultiplices GH 24, HI 12, KL 18, LM 9, ſuarum propriarum minorum eodem ordine AC 8, CB 4, DF 6, FE 3; & ſunt duæ æquemultiplices GH, HI 12, additæ ſimul; tùm aliæ duæ reliquæ KL 18, LM 9, etiam additæ: Summæ factæ GHI 36, KLM 27, per noſtrum 2. axioma huius libri, æquemultiplices erunt ſuarum propriarum minorum ACB 12, DFE 9. Prætereà capiantur ipſarum CB 4, FE 3, æquemultiplices IN 16, MO 12, eodem ordine ſecundùm quamcumque multiplicationem, & comparemus cum CB 4 ſecunda, & FE 3 quarta, æquemultiplices alias acceptas HI 12, LM 9, & iſtas IN 16, MO 12, earundem CB 4, FE 3: Quia ita multiplex eſt HI 12 prima ſecundæ CB 4, vt LM 9 tertia quartæ FE 3; & tàm multiplex eſt IN 16 quinta ſecundæ CB 4, quàm MO 12 ſexta, quartæ F 3; erit per prop. 2. libr. huius, tota HIN 28 ſecundæ CB 4 ita multiplex, atque tota LMO 21, quartæ FE 3. Inſuper cùm ſit data ACB 12 prima ad ſecũdam CB 4, vt tertia DFE 9 ad quartam FE 3; & oſtenſæ ſint GHI 36, KLM 27, æquemultiplices eodem ordine primæ ACB 12, & tertiæ DFE 9; tùm aliæ æquemultiplices HIN 28, LMO 21, eodem ordine ſecundæ CB 4, & quartæ FE 3, ſecundùm quamcumque multiplicationem: fit per defin. 6. libri huius, vt illæ GIH 36, KLM 27, vnâ deficiant, vel excedant, vel æquales ſint, reſpectu iſtarum HIN 28, LMO 21, ſi prout debent ſumantur: Quod ſi illæ deficiant ab iſtis, vel excedant, auferendo communes HI 12, LM 9; excedent vel deficient reliquæ GH 24, KL 18, ab aliis etiam relictis IN 16, MO 12, per 8. noſtrum axioma huius libri: Quod ſi æquales ſint illæ iſtis, demendo communes eaſdem HI 12, LM 9, relinquentur eædem GH, KL, æquales aliis IN, MO, per 5. axioma huius libri. Ex his ſequitur.

Demonſtratio. Quandoquidem ſecundùm quamcumque multiplicationem accepimus æquemultiplices GH 24, KL 18, primæ AC 8, & tertiæ DF 6, eodem ordine; tùm etiam æquemultiplices IN 16, MO 12, eodem ordine, ſecundæ CB 4, FE 3 quartæ; & oſtendimus ſimul GH 24, KL 18, deficere, vel excedere, vel æquales eſſe, reſpectu IN 16, MO 12: erit per def. 6. lib. huius, AC 8, ad CB 4, vt DF 6, ad FE 3. & ſic de omnibus aliis. quod erat concludendum.

## COROLLARIVM PRIMVM.

*Si ſint quatuor magnitudines proportionales; hæ quoque per diuiſionem rationis conuerſam proportionales erunt.*

SVppoſitio, ſint eædem quatuor datæ magnitudines compoſitæ proportionales ACB ad CB, vt DFE ad FE: Dico etiam eſſe per diuiſionem rationis conuerſam, explicatam in def. 15. Authorum huius libri, proportionales; hoc eſſe CB ad AC, vt FE ad DF.

CB ad AC.
FE ad DF.

Demonſtratio. Cùm dentur cõpoſitæ magnitudines proportionales ACB ad CB, vt DFE ad FE; erunt per iſtam prop. 17. diuiſim proportionales, hoc eſt AC ad CB, vt DF ad FE: ergo per coroll. prop. 4. huius libri, erunt inuertendo proportionales; CB ad AC, vt FE ad DF. quod erat concludendum.

COROL-

COROLLARIVM SECVNDVM.

*Si ſint quatuor magnitudines proportionales; hæ quoque per diuiſionem rationis contrariam erunt proportionales.*

SVppoſitio. Sint eædem magnitudines quatuor proportionales AC ad ACB, vt DF ad DFE: Dico etiam eſſe per diuiſionis rationis contrariam explicatam in definit. 15. Authorum huius libri, proportionales; hoc eſt vt AC ad CB, ita DF ad FE.

AC ad CB

DF ad FE.

Demonſtratio. Quia eſt AC ad ACB, vt DF ad DFE; erit per corollar. prop. 4. huius libri inuertendo ACB ad AC, vt DFE ad DF; ergo per hanc prop. 17. erit per diuiſionem rationis AC ad CB, vt DF ad FE. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XVIII.

Si diuiſæ magnitudines ſint proportionales; hæ quoque compoſitæ proportionales erunt.

SVppoſitio. Sint quatuor magnitudines proportionales diuiſæ, hoc eſt ſit AC ad CB, vt DF ad FE: Dico eas eſſe per compoſitionem rationis definitam def. 14. Authorum huius libri, proportionales; hoc eſt eſſe ACB ad BC, vt DFE ad FE.

AC ad CB.

DF ad FE.

ACB ad CB.

DFE ad FE.

Demonſtratio. Certum eſt CB ad CB, eſſe vt FE ad FE in ratione æqualitatis iuxta definitionem 3. digreſſionis ſecundæ noſtræ; ſed datur AC ad CB, vt DF ad FE: ergo per 2. noſtrum axioma huius libri, addendo illas iſtis, erit ACB ad BC, vt DFE ad FE. quod erat concludendum.

COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Eiſdem datis: dico per compoſitionem rationis conuerſam explicatam in def. 14. libri huius, eſſe ACB ad AC, vt DFE ad DF.*

ACB ad AC

DFE ad DF.

NAm cùm detur AC ad CB vt DF ad FE, erit per corollar. prop. 4. inuertendo CB ad AC, vt FE ad DF; eſt autem AC ad AC vt DF ad DF, per defin. 3. digreſſionis noſtræ; ergo addendo iſtas illis, erit ACB ad AC, vt DFE ad DF.

COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Eiſdem datis: dico per compoſitionem rationis contrariam explicatam in definitione 14. libri huius, eſſe AC ad ACB, vt DF ad DFE.*

AC ad ACB

DF ad DFE.

CVm enim detur AC ad CB, vt DF ad FE, erit iuxta corollarium noſtrum præcedens ACB ad AC, vt DFE ad DF; ergo per corollar. propoſ. 4. libri huius, erit inuertendo, AC ad ACB, vt DF ad DFE.

## PROPOSITIO XIX.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum; & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum ſe habebit.

SVppoſitio. Sint duo tota ABC 20. DEF 10, & ab primo ablatum AB 12, ab ſecundo DE 6; ita tamen vt ſit ABC 20 ad DEF 10, vt AB 12 ad DE 6; hoc eſt totum ad totum, vt ablatum ad ablatum: ſit etiam ex primo reſiduum BC 8, & ex ſecundo reſiduum EF 4. Dico ita eſſe reſiduum BC 8 ad reſiduum EF 4, vt totum ABC 20, ad totum DEF 10.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ABCAB | 32. | DEFDE | 16. |
| ABC. | 20. | DEF | 10. |
| AB | 12. | DB | 6. |
| BC | 8. | EF | 4. |
| ABBC | 20. | DEEF | 10. |

Demonſtratio. Si non ſit BC 8, ad EF 4, vt ABC 20 ad DEF 10. addendo illis communem rationem AB 12 ad DE 6: non erit ABC 20 ad DEF 10, vt ABCAB 32, ad DEFDE 16 per axio. 4. noſtrum huius libri: Sed per 12. prop. eſt ABCAB 32 ad DEFDE 16, vt ABC 20 ad DEF 10, ergo per 9. ax. noſtrum huius libri ABBC 20, & ABC 20 non habebunt eandem proportionem ad ſuas minores proprias DEEF 10, DEF 10, eſt autem ABBC 20, tota ipſa ABC 20, per axioma 19. libr. 1. & DEEF 10, eſt tota ipſa DEF 10; ergo eadem magnitudo ad eandem magnitudinem non habebit eandem rationem, vel æquales ad æquales, contra prop. 7. abſurdum hoc indicat poſitionem aduerſarij contradicentem aſſertioni huius propoſitionis eſſe falſam, & ipſam aſſertionem veram.

## COROLLARIVM.

*Si tota magnitudo ſit ad aliquam ſui partem vel partes, vel minorem, vt tota alia magnitudo ad aliquam etiam partem vel partes ſui: vel minorem, v. g. ABC ad BC, vt DEF ad EF. Dico eſſe per conuerſionem rationu explicatam def. 16. Authorum huius libri, eſſe ABC ad AB, vt DEF ad DE. hoc eſt eſſe totam magnitudinem primam ad exceſſum quo ſuperabat minorem ſuam, vt magnitudo ſecunda ad exceſſum quo ſuperabat minorem ſuam.*

ABC ad BC

DEF ad EF

ABC ad AB

DEF ad DE

Demonſtratio. Cùm detur ABC ad BC, vt DEF ad EF, erit per 17. prop. diuidendo, AB ad BC, vt DE ad EF; & per corollar. propoſ. 4, inuertendo erit BC ad AB, vt EF ad DE; & per propoſ. 18. componendo erit ABC ad AB, vt DEF ad DE.

## PROPOSITIO XX.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur; ex æquo autẽ prima quàm tertia maior fuerit; erit & quarta quàm ſexta maior.

Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis; erit & quarta æqualis ſextæ. Si illa minor, hæc quoque minor erit.

SVppoſitio. Sint tres magnitudines A 12, B 6, C 3, & aliæ tres D 16, E 8, F 4; ſitque A ad B, vt D ad E; & ſit B ad C, vt E ad F. Dico primò quod ſi A prima ſit maior tertia C; quod etiam quarta D maior erit ſexta F.

| | |
|---|---|
| A | 12. |
| B | 6. |
| C | 3. |
| D | 16. |
| E | 8. |
| F | 4. |

Demonſtratio. Si non ita ſit, erit quarta D æqualis vel minor ſexta F: eſt æqualis ſi fieri poſſit. Quia datur B ad C vt E ad F, erit per coroll. prop. 4. inuertendo C ad B vt F ad E: Iã verò quia aduerſarius ponit D & F æquales, erit per 7. prop. F ad E vt D ad E, datur autem A ad B vt D ad E, ergo per 11. propoſ. erit F ad E vt A ad B; & quia oſtendimus eſſe C ad B vt F ad E, erit per cit. prop. 11. C ad B vt A ad B; ergo per 9. prop. erunt A & C æquales contra datum: Non erit igitur D æqualis ipſi F. Eſto verò ſi fieri poſſit maior F quàm D: tunc F ad E maiorem habebit rationem quàm D ad E; Cùm autem detur B ad C vt E ad F, erit inuertendo per corollar. prop. 4. C ad B vt F ad E, oſtendimus autem tertiam F ad quartam E maiorem habere rationem,

tionem, quàm quinta D ad E ſextam ex eius poſitione; ergo per prop. 13. prima C ad ſecundam B maiorem habebit rationem quàm quinta D ad ſextam E: Prætereà cùm detur A ad B vt D ad E, prima ad ſecundam vt tertia ad quartam, & tertia D ad E quartam habeat minorem rationem quàm C quinta ad ſextam B vti oſtendimus; etiam per 13. prop. cit. coroll. noſtrum prima A ad ſecundam B minorem habebit rationem quàm quinta C ad ſextam B: ergo per propoſ. 10. erit B maior quàm A, contra datum: non poterit igitur eſſe F maior quàm D. Cùm ergo oſtenderimus non poſſe eſſe F æqualem ipſi D, nec maiorem, erit minor quàm D. quod erat probandum.

Eiſdem poſitis. Si prima A fuerit æqualis tertiæ C: dico ſecundò D quartam eſſe æqualem ſextæ F. Cùm dentur A & C æquales, erit per 7. propoſ. A ad B vt C ad B; datur B ad C vt E ad F, ergo inuertendo per coroll. prop. 4. erit F ad E vt C ad B; ergo etiam per 11. propoſ. erit F ad E vt A ad B, etiamque vt D ad E; ergo per 9. prop. erunt æquales D & F, quod erat concludendum.

Eiſdem poſitis. Si prima A fuerit minor quàm tertia C; Dico tertiò quod quarta D ſit minor quàm F ſexta.

Demonſtratio. Si non fuerit D minor quàm F, ſit ſi fieri poſſit maior D quàm F, vel æquales ipſæ D, F. Examinemus primum, Datur B ad C vt E ad F, ergo per coroll propoſ. 4. erit inuertendo C ad B vt F ad E; ſed F ad E minorem habet rationem quàm D ad E, per propoſ. 8. ergo per axio. noſtrum 9. huius libri etiam C ad B habebit minorem rationem quàm D ad E: ſed datur D ad E vt A ad B; ergo per citat. axio. 9. C ad B minorem habebit rationem quàm A ad B: ergo per propoſ. 10. A maior erit quàm C, contra datum; Igitur exiſtente A minore quàm C, non poterit F dici minor quàm D. Diſcutiamus ſecundum: Datur B ad C, vt E ad F, ergo inuertendo erit per coroll. prop. 4. C ad B vt F ad E; ſed per 7. prop. eſt F ad E vt D ad E; ergo per axio. 9. citat. cùm detur D ad E vt A ad B, erit F ad E vt A ad B; ſed per 8. prop. A ad B minorem habet rationem quàm C ad B; ergo per citatum ax. 9. F ad E habebit minorem rationem quàm C ad B, contra conceſſa: abſurdum hoc indicat poſitionem aduerſarij falſam eſſe. Cùm igitur non poſſit eſſe F æqualis ipſi D, nec minor, erit maior. quod erat propoſitum.

## PROPOSITIO XXI.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quàm tertia maior fuerit: erit & quarta maior quàm ſexta.

Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis; erit & quarta æqualis ſextæ. Si illa minor, hæc quoque minor erit.

SVppoſitio. Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quæ binæ in eadem ratione ſumptæ ſint, ſitque earum ratio perturbata definita ab Authoribus huius libri def. 19. hoc eſt ſit A ad B, vt E ad F, & B ad C vt D ad E: Dico primò quod ſi A prima ſit maior quàm C tertia, quartam D eſſe maiorem ſexta F.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

Demonſtratio. Datur B ad C, vt D ad E, ergo erit inuertendo per coroll. prop. 4. C ad B vt E ad D. Datur etiam A ad B vt E ad F; & per propoſ. 8. A ad B maiorem habet rationem, quàm C ad B, quia ex datis eſt A maior quàm C: ergo per axioma noſtrum 9. huius libri E ad F maiorem habebit rationem quàm C ad B, & quàm E ad D: ergo per propoſ. 10. erit D maior quàm F quod erat concludendum.

Eiſdem poſitis ſit A æqualis ipſi C: Dico ſecundò D eſſe æqualem ipſi F.

Demonſtratio. Per 7. prop. erit A ad B, vt C ad B: & ex datis eſt A ad B vt E ad F; ergo per ax. noſtrū 7. erit C ad B vt E ad F. Sed & datur B ad C vt D ad E, ergo per inuerſionē rationis

tionis iuxta coroll. prop. 4. erit C ad B vt E ad D: ergo iuxta coroll. cit. 7. erit E ad F vt E ad D: quare per prop. 9. erunt æquales D & F. quod erat probandum.

Eiſdem poſitis, ſit A minor quàm C; Dico tertiò D eſſe minorem quàm F.

Demonſtratio. Datur B ad C vt D ad E, ergo per coroll. prop. 4. inuertendo erit C ad B vt E ad D: Datur etiam A ad B vt E ad F; & per propoſ. 8. A ad B minorem habet rationem quàm C ad B; ergo per axio. noſtrum 8. libri huius, E ad F minorem rationem habebit quàm C ad B, & quàm E ad D: ergo per 10. propoſ. D minor erit quàm F. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XXII

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero quæ binæ in eadem ratione ſumantur: & ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Svppoſitio. Sint exempli gratia tres magnitudines A. B. C. & aliæ tres D. E. F. quæ binæ in eadem ratione ſumantur; hoc eſt ſit A ad B, vt D ad E; & B ad C, vt E ad F; & ſic deinceps ſi plures eſſent datæ, ſine vlla perturbatione rationis. Dico eſſe ex æquo vti definitum fuit def. 17. A ad C, vt D ad F, hoc eſt prima ad vltimam, in prima ſerie, vt prima ad vltimam in altera ſerie.

A. B. C. D. E. F.

G. H. I. K. L. M.

Conſtructio. Sumantur ſecundùm quamcumque multiplicationem æquemultiplicas G, K, ipſarum A, D, eodem ordine; tùm æquemultiplices H, L, ipſarum B, E; tùm æquemultiplices I, M, ipſarum C, F.

Demonſtratio. Si non ſit A ad C, vt D ad F, æquemultiplices G & K, primæ A ac tertiæ D, non vnà deficient, vel excedent, vel æquales erunt, reſpectu æquemultiplicium I, M, ſecundæ C & quartæ F, iuxta defin. 8. libr. huius. Verùm cùm detur A ad B, vt D ad E, erit per 4. prop. libr. huius G ad H, vt K ad L: Simili modo, quia datur B ad C vt E ad F, erit H ad I vt L ad M, per cit. 4. propoſ. Tres igitur magnitudines habemus G, H, I, & alias tres K, L, M, quæ binæ in eadem proportione ſumptæ ſunt; hoc eſt G ad H, vt K ad L; tùm H ad I, vt L ad M; ſit per propoſ. 20. lib. Vt ſi G prima ſuperat tertiam I, excedat etiam quarta K ſextam M; & ſi æqualis ſit G ipſi I, æqualis etiam ſit K ipſi M; & ſi deficit deficiat: Itaque cùm G, K, ſint æquemultiplices A primæ ac tertiæ D; & I, M, ſint æquemultiplices ſecundæ C & F quartæ; & oſtenſæ ſint illæ æquemultiplices G, K, vnà deficere vel excedere vel æquales eſſe reſpectu æquemultiplicium I, M, pugnantia cogitur admittere aduerſarius conſequentia ex ſua poſitione contradicente aſſertioni huius propoſitionis, quæ ideo demonſtrata remanebit.

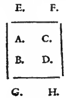
Quod ſi darentur ex vtraque parte plures magnitudines quàm tres; per ea quæ diximus oſtendetur eſſe ſemper in vno ordine prima ad tertiam ſeu vltimam, vt alia prima alterius ordinis ad vltimam: tunc ſi detur alia quarta in vno ordine, & alia quarta in alio ordine; conſiderandæ erunt prima & tertia vti ſecunda, & alia data quarta vel vltima, vt tertia; & ſic in alio ordine: & ſic deinceps de aliis. nam per iſtam demonſtrationem factam præcedentem tres erunt in vno ordine, & tres in alio, eritque prima vnius ordinis ad vltimam, vt alia prima alterius ordinis ad vltimam.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; habebunt etiam æquemultiplices primæ & tertiæ, ad ſecundam & quartam eandem rationem: Item æquemultiplices ſecundæ & quartæ ad primam & tertiam, eandem rationem habebunt.*

*Et contra eandem rationem habebunt ſecunda & quarta, & æquemultiplices primæ & tertiæ: Item prima ac tertia ad æquemultiplices ſecundæ & quartæ eandem rationem habebunt.*

Svppoſitio. A ad B ſit vt C ad D; ſitque E tàm multiplex primæ A, atque F multiplex eſt tertiæ C: Dico primò ita eſſe E ad B, vt F ad D. Præterea ſit G tàm multiplex ſecundæ B, atque eſt H multiplex quartæ: Dico ſecundò ita eſſe G ad A, vt H ad C. Tertiò Dico ita eſſe è contrariò B ad E, vt D ad F. Vltimoque Dico ita eſſe A ad G vt C ad H.




Demon-

Demonſtratio. Ex datis in ratione æquemultiplicitatis eſt E ad A, vt F ad C; daturque A ad B vt C ad D; erit per iſtam propoſ. 22. ex æquo E ad B vt F ad D, quod erat primò propoſitum. Pro ſecunda aſſertione ſic procedemus Datur A ad B vt C ad D, ergo per coroll. prop. 4. erit inuertendo B ad A, vt D ad C: Iam vero quia ex datis in ratione æquemultiplicatis eſt G ad B vt H ad D; eſtque B ad A vt D ad C; erit ex æquo G ad A vt H ad C, ſicuti fuit ſecundo loco aſſertum. Inſuper quia oſtendimus eſſe B ad A vt D ad C, & ex datis in ratione ſubæquemultiplicitatis, eſt A ad E, vt C ad F; erit, ex æquo per iſtam prop. B ad E vt D ad F, ſicuti fuit tertio loco adſtructum. Denique quia datur A ad B vt C ad D; eſtque ex datis in ratione ſubæquemultiplicitatis B ad G vt D ad H; erit ex æquo per iſtam prop. 22. A ad G vt C ad H, quod erat vltimo loco propoſitum.

## PROPOSITIO XXIII.

Si ſint tres magnitudines; aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur; fuerit autem perturbata earum proportio: etiã ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SVppoſitio. Sint tres magnitudines ex vna parte A, B, C; & ex alia aliæ tres D, E, F; quæ binæ in eadem ratione ſumantur; fueritque earum ratio perturbata, vtì definita eſt ab Authoribus huius libri def. 19. hoc eſt, ſi A ad B, vt E ad F, & B ad C, vt D ad E: Dico eſſe ex æquo A ad C, vt D ad F.

A. B. C. D. E. F.
G. H. K. L. M. N.

Conſtructio. Sumantur eodem ordine magnitudinum A, B, D, æquemultiplices iuxta quamcumque multiplicationem G, H, L: Item aliarum reliquarum C, E, F, eodem ordine æquemultiplices K, M, N, iuxta quamcumque multiplicationem.

Demonſtratio. Si non ſit A ad C, vt D ad E; æquemultiplices G, L, ipſarum A & D, non vnâ excedent, vel deficient, vel æquales erunt, reſpectu æquemultiplicium K, N, ipſarum C, F, iuxta defin. 8. libri huius. Verùm quia G & H, ſunt per conſtructionem æquemultiplices ipſarum A & B; erit per prop. 15. G ad H vt A ad B; datur verò A ad B vt E ad F, ergo per 11. propoſ. erit G ad H vt E ad F: ſed etiam per cit. 15. prop. eſt E ad F vt M ad N; igitur per cit. 11. prop. erit G ad H vt M ad N. Prætereà quia datur B prima ad ſecundam C, vt D tertia ad quartam E; erit per 4. prop. H multiplex primæ B, ad K multiplicem ſecundæ C, vt L multiplex tertiæ D ad M multiplicem B quartæ. Iam verò quoniam habemus tres magnitudines G, H, K, & alias tres L, M, N, quæ binæ ſumantur in eadem ratione, ſitque earũ ratio perturbata, (oſtendimus enim eſſe G ad H, vt M ad N; & H ad K vt L ad M) ſit per prop. 21. vt ſi G prima ſuperat tertiam K ſuperat etiam L quarta, ſextam N; & ſi æqualis, æqualis; & ſi deficiat, deficiat; cõtra cõceſſa conſequẽtia ex ſua poſitione cõtra dicente aſſertioni huius propoſitionis. Abſurdum hoc indicat poſitionem illam aduerſarij eſſe falſam & propoſitionem hanc veram.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si fuerint huiuſmodi plures tribus magnitudines, tàm ex vna parte quàm ex alia, æquali numero, & ſimiliter ratio earum perturbata dùm bina in eadem ratione ſumuntur: etiam ex æqualitate erunt in eadem ratione.*

EXemplum proferam in quatuor & aliis quatuor magnitudinibus A, B, C, O, D, E, F, P: ita vt ſit A ad B, vt F ad O, & B ad C, vt E ad F; & C ad O, vt D ad E: Dico ex æquo eſſe A ad O, vt D ad P.

Demonſtratio. Per iſtam prop. 23. erit A ad C, vt E ad P; ponitur autem C ad O, vt D ad E: ergo hahebimus tres magnitudines A, C, O, & alias tres D, E, P, quæ binæ in eàdem ratione ſumuntur perturbando earum proportionem; ergo per iſtam propoſitionem erit A ad O, vt D ad P. Et ſic de aliis pluribus numero. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XXIV.

Si prima ad ſecundam eãdem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quàm ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta ad ſecundam, eandem habebit rationem, quàm tertia cum ſexta ad quartam.

SVppoſitio. Sit prima A ad ſecundam B, vt G tertia ad D quartam; & E quinta ad

B

B ſecundam, vt F ſexta ad D quartam: Dico EA compoſitam ex prima & quinta eſſe ad B ſecundam, vt FC compoſita ex tertia & ſexta ad D quartam.

E. ad B.

| | | |
|---|---|---|
| A. | ad | B. |
| C. | ad | D |

F. ad D.

| | | |
|---|---|---|
| E A. | ad | B |
| F C. | ad | D |

Demonſtratio. Sic etenim æqueproportionatis adduntur æqueproportionatæ,& ſic per 2.noſtrum axioma, fient æqueproportionatæ EA prima cum quinta, & FC tertia cum ſexta, ſuarum propriarum B ſecundæ, & D quartæ; hoc eſt erit EA ad B vt FC ad D. quod erat declarandum.

## PROPOSITIO XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

Svppoſitio. Sint quatuor magnitudines & inter illas maxima AGB, & minima F, reliquæ vero duæ E, F, ſintque inter ſe proportionales AGB ad CHD, vt E ad F: Dico AGBF maximam & minimam ſimul eſſe maiores CHDE aliis duabus ſimul ſumptis.

AGB. ad CHD.

E. ad F

AGBF maior quàm CHDE.

Antequam conſtruamus & demonſtremus propoſitum, explicanda ſunt inuolucra occurrentia in hac propoſitione; videlicet, an conſequens maximæ antecedentis poſſit eſſe minima; vel poſita conſequente maxima, poſſit eſſe eius antecedens minima: Vel poſita maxima antecedente poſſit eſſe minima alia antecedens: Vel poſita maxima conſequente, poſſit eſſe minima alia conſequens. Quæ dubia ſoluentur facile oſtenſis iſtis lemmatibus noſtris, quæ poſteà per modum corollariorum proponemus in fine demonſtrationis.

I.

*Datis quatuor quantitatibus proportionalibus inter quas ſit vna maxima, & alia minima: Si prima fuerit maxima, erit minima quarta, non autem ſecunda vel tertia.*

Qvandoquidem datur maxima & minima, duæ aliæ erunt maiores minima & minores maxima: Datur etiam prima ad ſecundam vt tertia ad quartam, & prima maxima; ergo minima non poterit eſſe ſecunda; nam prima eſſet maior tertia ex dictis, ideóque per 14. prop. ſecunda maior quàm quarta, & ſic eſſet quarta minor minima contra datum. Sed neque poteſt eſſe in hoc caſu minima, tertia ſeu alia antecedens; nam ex dictis prima antecedens eſſet maior ſecunda; & per coroll. noſtrum propoſ. 14. tertia minima eſſet etiam maior quàm quarta contra datum. Reſtat igitur vt minima ſit quarta, cùm datur maxima Antecedens prima.

I I.

*Datis eiſdem: Si antecedens prima fuerit minima, conſequens altera alterius rationis erit maxima, ſeu quarta; non autem ſecunda vel tertia.*

Antecedente prima exiſtente minima, eſto ſi fieri poſſit maxima ſecunda; Ex datis prima minima minor eſt quàm tertia, ergo per prop. 14. ſecũda maxima erit minor quàm quarta, contra datum. Eſto vero ſi fieri etiam poſſit in hoc caſu maxima tertia: tunc quia prima minima eſt minor ſecunda, erit per noſtrum coroll. prop. 14. tertia maxima minor quàm quarta, contra datum. Cùm igitur antecedente prima poſita minima, non poſſit eſſe maxima, ſecunda nec tertia, relinquitur vt ſit quarta.

I I I.

*Datis eiſdem. Si maxima fuerit ſecunda, minima erit tertia, non autem prima, neque quarta.*

Maxima enim exiſtente ſecunda, non poteſt minima prima; nam ex datis minima

minima eſt minor reliquis, ideoque tertia: quare cùm prima ſit minor tertia, erit ſecunda minor quàm quarta per propoſ.14. hoc eſt maxima data erit minor quàm quarta vna è datis, contra datum. Sed neque minima erit quarta in hoc eodem caſu:nam eſſet vna è datis ad maximam ſecundam, vt altera è datis ad minimam quartam; ergò per coroll. prop. 4.eſſet inuertendo,vt maxima ad vnam è datis,ita minima ad aliam è datis, contra Theorema primum ex iſtis demonſtratum. Quandoquidem ergo oſtendimus exiſtente maxima ſecũda, non poſſe eſſe minimam primam, vel quartam; relinquitur vt ſit tertia.

I V.

*Datis eiſdem: Si minima fuerit ſecunda, maxima erit tertia, non autem prima, vel quarta.*

NAm poſita minima ſecunda, eſto ſi fieri poſſit prima maxima, quæ ex datis eſt maior tertia; ergo per prop.14,ſecunda minima erit maior quarta, contra datum. Eſto ſi fieri poſſit in eodem caſu quarta maxima; erit vna è datis ad ſecundam minimam, vt tertia è datis ad maximam; Prima illa ad ſecundam minimam erit maior illa minima, ergo per coroll. noſtrum propoſ. 14. tertia è datis erit maior maxima quarta, contra datum. Exiſtente minima ſecundam, oſtendimus maximam non poſſe eſſe primam, nec quartam;ergo erit tertia, ſicuti propoſuimus.

V.

*Datis eiſdem; Si maxima fuerit tertia, erit minima ſecunda; non autem prima vel quarta,*

IN hoc caſu eſto ſi fieri poſſit minima prima, tunc per 2.Theorema, maxima non poterit eſſe tertia contra ſuppoſitionem admiſſam. Eſto ſi fieri poſſit quarta, cùm ex datis prima quæcumque ſit minor tertia maxima, erit ſecunda minor quàm quarta minima per prop. 14. contra datum. remanet ergo vt maxima exiſtente tertia,ſit minima ſecunda.

V I.

*Datis eiſdem ſi maxima fuerit quarta; erit minima prima, non autem ſecunda vel tertia.*

MAxima exiſtente quarta, ſit ſi fieri poſſit minima ſecunda; tùm vero per Theorema 4. maxima erit tertia, non autem quarta, contra ſuppoſitionem admiſſam. Sed eſto ſi fieri poſſit minima tertia; Prima erit ex datis maior quàm iſta tertia minima; ergo per propoſ. 14. minima iſta tertia erit maior quàm quarta maxima contra datum. Relinquitur ergo vt maxima exiſtente quarta, minima ſit prima.

V I I.

*Datis eiſdem: Si minima fuerit tertia: erit maxima ſecunda, non autem prima vel quarta.*

MInima exiſtente tertia, ſit ſi fieri poſſit, maxima prima; erit maxima prima ad vnam è datis, vt minima ad aliam è datis; maxima prima maior eſt ex datis ipſa ſecunda; ergo per coroll, noſtrum prop. 14. tertia minima erit maior quarta è datis, contra datum. Sed eſto ſi fieri poſſit, maxima quarta: tunc verò per Theorema 6. præcedens,minima erit prima, non autem tertia, contra ſuppoſitionem. Sequitur igitur vt minima ſit ſecunda.

V I I I.

*Datis eiſdem: Si minima fuerit quarta; erit maxima prima, non autem ſecunda, vel tertia.*

MInima exiſtente quarta,ſit ſi fieri poſſit maxima ſecunda, aliarum duarum datarum vna erit prima,altera tertia; ſed ex datis illa quæ eſt prima,minor eſt ſecunda maxima poſita, ergo per noſtrum coroll.prop.14. tertia erit minor quarta minima, contra datum. Eſto denique maxima tertia ſi fieri poſſit, exiſtente quarta minima; tunc aliarũ duarum è datis vna erit prima,alia verò ſecunda; prima autem hæc ex datis minor tertia maxima poſita, ergo per propoſ.14. ſecunda erit minor quàm quarta minima, contra datum. hæc abſurda indicant exiſtente minima quarta, non poſſe maximam neque ſecundam neque tertiam; neceſſariò igitur erit prima.

Ex his theorematibus ſoluũtur dubia propoſita quatuor. Primum ex primo theoremate, nam poſita prima ſeu Antecedente maxima,non poteſt eſſe minima ſecunda, ſeu conſequens. Secundum ex tertio theoremate;nam poſita conſequente maxima, ſeu ſecũda quod eſt idem, minima non poteſt eſſe prima; ſeu antecedens illius maximæ. Tertium ex primo,nam poſita maxima prima ſeu antecedente,non poteſt eſſe minima tertia ſeu alia antecedens. Quartum ex tertio;nam poſita ſecunda ſeu conſequente maxima, non poteſt eſſe minima quarta ſeu conſequens altera. His verò ſolutis ac poſitis veniamus ad propoſitionis huiuſce.

AGB. ad CHD.

E. ad F.

AGBF maior CHDE.

Conſtructionem. Quandoquidem AGB eſt ad CHD, vt E ad F; Vel maxima AGB, erit prima, vel ſecunda, vel tertia, vel quarta: ſi prima, tunc per theorema primum, erit F, minima, quarta, vt in exemplo propoſito apparet: Si AGB maxima eſſet ſecunda; tunc per theorema 3, minima F eſſet tertia: ſi AGB maxima eſſet tertia; tùm per theorema 5, minima F eſſet ſecunda: ſi denique AGB eſſet quarta; tunc per theorema 6, minima F eſſet prima. Vel contra vel minima F erit prima, vel ſecunda, vel tertia, vel quarta: ſi prima; tunc per theorema 2, maxima AGB eſſet quarta: ſi ſecunda; tunc maxima AGB per theorema 4, eſſet tertia: ſi tertia; tunc maxima AGB, per theorema noſtrum 7, ſecunda eſſet: ſi quarta; tunc maxima AGB eſſet prima, per 8. theorema, vt in exemplo propoſito apparet. Itaque cùm ex his, & ſolutione dubiorum maxima & minima non poſſint eſſe ſibi inuicem antecedentes & conſequentes, neque ambæ conſequentes diuerſæ, vel antecedentes diuerſę, reſtat vt ſi in vna ratione ſit vna ex his maxima & minima, antecedens, ſit altera in altera comparatione conſequens; vel ſi vna ſit in vna comparatione conſequens, ſit altera in altera comparatione conſequens. Quæ omnia erant demonſtranda ante demonſtrationem, & conſtructionem huius propoſitionis. Igitur in exemplo propoſito, de maxima AGB, intelligatur detracta AG æqualis ipſi E, comparata cum ipſa minima F; & de alia CHD comparata cum maxima AGB, intelligatur ablata CH, æqualis ipſi F minimæ; relinquetur GB in prima detractione, & HD in ſecunda: Itaque cùm detur AGB ad CHD, vt E ad F, & ex illis totis detractæ ſint modo prædicto E, F; erit tota AGB ad totã CHD, vt ablata E ad ablatam F: ergo per prop. 19. erit reliqua GB ad reliquam HD, vt tota AGB ad totam CHD; ſed tota AGB maxima eſt maior quàm CHD ex datis; ergo per noſtrum corollar. propoſ. 14. erit GB maior quàm HD.

Demonſtratio. Æqualibus AG, & E, addantur æquales F, CH; F quidem ipſi AG, & CH ipſi E; fient per 2. ax. libr. 1. AGF, CHE, æquales: Quod ſi inæqualibus GB maiori, HD minori, illa æqualia facta AGF, CHE, addantur; an non fient per 4. axio. libr. 1. inæqualia AGBF, CHDE, maiuſque AGBF, minus verò CHDE? Sed maius AGBF, componitur ex maxima AGB & minima F; & minus CHDE ex aliis duabus reliquis. Propoſitum ergo demonſtrauimus.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

***Datis quatuor quantitatibus proportionalibus; inter quas ſit vna maxima, & alia minima: Si prima fuerit maxima; erit minima quarta, non autem ſecunda, vel tertia.***

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

***Datis eiſdem: Si antecedens prima fuerit minima; conſequens altera alterius comparationis erit maxima, ſeu quarta, non autem ſecunda vel tertia.***

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

***Datis eiſdem: Si maxima fuerit ſecunda; minima erit tertia, non autem prima vel quarta.***

## COROLLARIVM NOSTRVM IV.

***Datis eiſdem: Si minima fuerit ſecunda; maxima erit tertia, non autem prima vel quarta.***

## COROLLARIVM NOSTRVM V.

***Datis eiſdem: Si maxima fuerit tertia; erit minima ſecunda, non autem prima vel quarta.***

## COROLLARIVM NOSTRVM VI.

***Datis eiſdem: Si maxima fuerit quarta; erit minima prima, non autem ſecunda vel tertia.***

## COROLLARIVM NOSTRVM VII.

***Datis eiſdem: Si minima fuerit tertia; erit maxima ſecunda, non autem prima vel quarta.***

COROL-

COROLLARIVM NOSTRVM VIII.

*Datis eiſdem: Si minima fuerit quarta; erit maxima prima, non autem ſecunda vel tertia.*

COROLLARIVM NOSTRVM IX.

*Datis eiſdem: Poſita Antecedente maxima; non poteſt eſſe minima conſequens illius maximæ.*

COROLLARIVM NOSTRVM X.

*Datis eiſdem: Poſita conſequente maxima; non poteſt illius Antecedens eſſe minima.*

COROLLARIVM NOSTRVM XI.

*Datis eiſdem: Poſita maxima Antecedente; non poteſt eſſe minima Antecedens alia.*

COROLLARIVM NOSTRVM XII.

*Datis eiſdem: Poſita maxima Conſequente; non poteſt eſſe minima conſequens altera alterius comparationis.*

COROLLARIVM NOSTRVM XIII.

*Datis eiſdem: Maxima & minima, non poſſunt eſſe amba Antecedentes.*

COROLLARIVM NOSTRVM XIV.

*Datis eiſdem: maxima & minima, non poſſunt eſſe amba Conſequentes.*

COROLLARIVM NOSTRVM XV.

*Datis eiſdem: Maxima & minima, non poſſunt eſſe ſibi inuicem Antecedentes & Conſequentes.*

COROLLARIVM NOSTRVM XVI.

*Datis eiſdem: Poſitaq; maxima Antecedente, minima eſt conſequens alterius è datis.*

COROLLARIVM NOSTRVM XVII.

*Datis eiſdem: Poſitaq; maxima conſequente vnius ex aliis diuerſa ab minima; minima erit antecedens alterius è datis.*

COROLLARIVM NOSTRVM XVIII.

*Datis eiſdem: Poſitaq; minima conſequente vnius ex aliis diuerſa ab maxima; maxima erit Antecedens alterius è datis.*

COROLLARIVM NOSTRVM XIX.

*Si tres magnitudines fuerint proportionales: maxima & minima ſimul erunt maiores dupla reliqua.*

Corollaria prima 18, noſtra iam demonſtrata ſunt in octo theorematibus noſtris, vel in ſolutione dubiorum, vel in conſtructione.

Vltimum 19. Sic declaratur. Quando tres magnitudines ſunt proportionales, vna ſumitur bis, atque adeò ſic ſunt quatuor proportionales: ergo per iſtam demonſtrationem allatam, maxima & minima erunt ſimul maiores reliquis duabus ſimul ſumptis, quæ ſunt æquales duplæ alterius tertiæ. quod erat declarandum.

Hæc omnia corollaria & ſcitu ſunt neceſſaria in Geometricis, & iucunda. quare cùm pro demonſtratione accurata præmiſerimus theoremata illa octo, & ſolutiones dubiorum propoſitorum; ex quibus neceſſariò procedunt iſta corollaria, eorumque demonſtrationes; ideò illa ſeorſim proponere vſui futura decreuimus.

Hæc propoſitio 25, eſt vltima Eudoxi & Euclidis. Verùm quia Campanus & Clauius has ſuperaddunt ſequentes, neceſſarias ad intelligendos Authores antiquos Geometras, quos nouis Commentariis vt iſtos in hoc libro, illuſtrauimus; ideo illas etiam incommemoratum finem cum explicatione addimus, & vnam noſtram; numerumque propoſitionum Eudoxi & Euclidis proſequimur. Sit ergo

## PROPOSITIO XXVI.

Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quàm quarta ad tertiam.

SVppoſitio. B ad A maiorem habeat rationem, quàm C ad D: Dico per inuerſionem iuxta coroll. prop. 4. B ad A habere maiorem rationem, quàm D ad C.

Conſtructio. Datarum A ad B, & C ad D, ſumantur E, F, æquemultiplices A primæ & tertiæ C, eodem ordine; tùm G, A, aliæ æquemultiplices ſecundæ B & quartæ H: neceſſariò per definit. 8. libr. huius E multiplex primæ A, excedet multiplicem G, ſecundæ B; & F multiplex tertiæ C, deficiet ab H multiplice quartæ D; ſecundùm aliquam multiplicationem. his poſitis ſequitur

E. G.

| | | |
|---|---|---|
| A. | ad | B. |
| C. | ad | D. |

F. H.

Demonſtratio quod B ad A minorem rationem habeat, quàm D ad C: oſtendimus in conſtructione, quod G multiplex B, deficiat ab E multiplice A; & quod H multiplex, D, deficiat ab F multiplice, C, ſecundùm aliquas multiplicationes: ergo per def. cit. 8. D ad C maiorem habebit rationem quàm B ad A. quod erat concludendum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si prima ad ſecundam minorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: inuertendo, ſecunda ad primam maiorem habebit rationem, quàm quarta ad tertiam.*

SVppoſitio. A ad B minorem habeat rationem, quàm C ad D: Dico inuertendo B ad A maiorem habere rationem quàm D ad C.

Demonſtratio. Datur A ad B minorem habere rationem quàm C ad D; ergo C ad D maiorem habebit rationem, quàm ad B, ex datis ipſis: ergo inuertendo B ad A maiorem habebit rationem quàm C ad D, per iſtam propoſ. 26.

## PROPOSITIO XXVII.

Si prima ad ſecundã habuerit maiorem rationem, quàm tertia ad quartam: Habebit viciſsim prima ad tertiam maiorem rationem, quàm ſecunda ad quartam.

SVppoſitio. A prima ad ſecundam B maiorem habeat rationem, quàm tertia C ad quartam D. Dico viciſſim primam A ad tertiam C, habere maiorem rationem, quàm ſecunda B ad quartam D.

A ad B

E.

C ad D

Conſtructio. Sumatur E magnitudo quæ ſit ad B, vt C ad D: tunc per 9. axio. noſtrum huius libri; cùm ſit E ad B, vt C ad D; & detur maior ratio A ad B quàm C ad D; erit etiam maior ratio A ad B quàm E ad B, igitur per 10. propoſ. A maior erit quam E; ideoque maior erit ratio A ad C, quàm E ad C, per 8. propoſ.

Demonſtratio. Poſita eſt E ad B vt C ad D, ergo per 16. viciſſim erit E ad C vt B ad D, & oſtendimus eſſe maiorem rationem A ad C, quàm E ad C; ergo per axio. 9. noſtrum huius libri erit maior ratio A ad C quàm B ad D. quod erat concludendum.

COROL-

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si prima ad ſecundam minorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: viciſſim prima ad tertiam, minorem habebit rationem, quàm ſecunda ad quartam.*

SVppoſitio. Prima A ad ſecundam B, minorem habeat rationem quàm C tertia ad quartam D. Dico viciſſim primam A ad C tertiam habere minorem rationem, quàm ſecunda B ad quartam D.

Demonſtratio. Quia datur minor ratio inter A & B, quàm inter C & D; erit ex ipſis datis, maior ratio C ad D, quàm A & B; ergo viciſſim per iſtam propoſitionem, erit maior ratio inter C & A, quàm inter D & B; & iuxta prop. 26. inuertendo erit minor proportio inter A & C, quàm inter B & D. quòd erat oſtendendum.

## PROPOSITIO XXVIII.

Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartã: Habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam, maiorem proportionem, quàm compoſita tertia cũ quarta ad quartam.

SVppoſitio. Habeat prima AB ad BC ſecundam, maiorem rationem, quàm tertia DE ad quartam EF: Dico componẽdo, quod ABC compoſita ex prima AB, & ſecũda BC, habeat ad ſecundam BC, maiorem rationem, quàm DEF, compoſita ex tertia DE & quarta EF, ad quartam EF.

| | | |
|---|---|---|
| AB | ad | BC |
| DE | ad | EF. |
| ABC | ad | BC |
| DEF | ad | EF. |

Conſtructio. Intelligatur æqualis BC, alia BC; & alia EF æqualis ipſi EF: tunc erit eadem ratio æqualitatis inter BC & BC, vt inter EF & EF.

Demonſtratio his æqueproportionatis addatur improportionatæ datæ AB ad BC, DE ad EF: an non fiet inæqueproportionatæ per 8. noſtram axioma huius libri? hoc eſt ABC ad BC maiorem habent rationem, quàm DEF ad EF. quod erat concludendum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si ratio primæ ad ſecundam fuerit minor, quàm tertiæ ad quartam: Prima quoque cum ſecunda ad ſecundam habebit minorem rationem, quam tertia & quarta ſimul ad quartam.*

EAdem erit conſtructio & demonſtratio; æqueproportionatis addendo datas inæqueproportionatas.

## PROPOSITIO XXIX.

Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidẽdo prima ad ſecundam, maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam.

SVppoſitio. Sit maior ratio ABC ad BC, quàm DEF ad EF: Dico quod diuidendo, erit AB prima ad ſecundam BC, maiorem obtinens rationem, quàm DE tertia, ad quartam EF.

| | | |
|---|---|---|
| ABC | ad | BC |
| DEF | ad | EF |
| AB | ad | BC |
| DE | ad | EF |

Conſtructio. De compoſitis ABC, DEF, intelligantur detractæ BC, EF, æquales ſuis conſequentibus BC, EF, propriis; relinquentur AB, DE; & ablatæ ad conſequentes ipſas, eandem habebunt rationem, per corollar. noſtrum prop. 7. hoc eſt BC ad BC, vt EF ad EF.

Demonſtratio. Datur ABC maiorem habere rationem ad BC, quàm DEF ad EF: ergo ſi ab his non proportionalibus, demantur æque proportionales BC ad BC, vt EF ad EF; per 8. noſtrum axioma, relinquetur AB

ad BC maiorem habens rationem, quàm DE ad EF. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si compoſita prima cum ſecunda habeat minorem rationem ad ſecundam, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam, minorem rationem, quàm tertia ad quartam.*

Eodem artificio & medio manifeſtum eſt iſtud corollarium: relinquetur enim AB ad BC minorem habens proportionem quam DE ad EF.

## PROPOSITIO XXX.

Si compoſita prima cum ſecunda, ad ſecũdam habuerit maiorem rationem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartã: Habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, minorẽ rationem; quàm tertia cum quarta, ad tertiam.

Svppoſitio. ABC ad BC maiorem habeat rationem, quàm DEF ad EF: Dico per conuerſionem rationis, quod ABC ad AB minorem habeat rationẽ; quàm DEF ad DE.

ABC ad BC.
DEF ad EF.

ABC ad AB.
DEF ad DE.

Demonſtratio. Si non ita ſit vti aſſeritur, erit ABC ad AB maiorem habens rationem quàm DEF ad DE: vel eandem habebunt inter ſe rationem. Eſto ſi fieri poſſit ABC ad AB maiorem habens rationem, quàm DEF ad DE: tunc per prop. 29. diuidendo erit CB ad AB maiorem habens rationem, quàm FE ad DE; & per 26. prop. inuertendo, AB ad CB minorem habebit rationem, quàm DE ad EF; & per coroll. noſtrum prop. 28. erit componendo ABC ad BC minorem habens rationem, quàm DEF ad EF, contra datum & ſuppoſitionem. Eſto verò ſecundum ſi fieri poſſit: tunc per coroll. 1. prop. 17. iuxta diuiſionem rationis conuerſam erit BA ad CB, vt ED ad FE; & inuertendo per coroll. prop. 4. erit CB ad BA, vt FE ad ED: & per prop. 18. componendo, erit CBA ad BA, vt FED ad ED, contra datum. Cùm igitur ex his abſurdis duæ poſitiones aduerſarij falſæ ſint, vera erit hæc propoſitio continens tertium membrum diuiſionis.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit minorem rationem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam: habebit per conuerſionem rationis compoſita ex prima & ſecunda ad primam, maiorem rationem; quàm compoſita ex tertia & quarta, ad tertiam.*

In eodem exemplo. Sit ex datis minor ratio ABC ad BC, quàm DEF ad EF; erit ex ipſis datis, maior ratio DEF ad EF, quàm ABC ad BC: ergo per iſtam prop. 30. minor erit ratio DEF ad DE, quàm ACB ad AB quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XXXI.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero; ſitque maior proportio primę primarum ad ſecundã, quàm primæ poſteriorum ad ſecundã; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam; quàm primę poſteriorum ad tertiam.

Svppoſitio. Sint tres magnitudines A.B.C. & aliæ tres D. E. F. ſitque A ad B ratio maior, quàm D ad E; & maior ratio B ad C, quàm E ad F: Dico quod ex æquo erit maior ratio A ad C, quàm D ad F.

A. B. C.
D. E. F.

Demonſtratio. Per def. vltimam huius libri. Ratio A ad C, componatur ex rationibus A ad B, & B ad C; & ratio D ad E componatur ex rationibus D ad E, & E ad F: quarum

quarum primæ ſunt ex datis maiores quàm poſteriores: ideo per axioma 4. libr. 1. redactum ad hunc librum, ratio A ad C, erit maior quàm D ad F; quia illa componitur ex maioribus rationibus, iſta verò ex minoribus.

COROLLARIVM I.

NOSTRVM.

*Eiſdem datis; Si fuerit eadem ratio A ad B, quàm D ad E; ſed ratio B ad C maior quàm E ad F: Vel contrà fuerit maior ratio A ad B, quàm D ad E; ſed ratio B ad C, eadem quàm E ad F: ex æqualitate erit maior ratio A ad C quàm D ad F.*

COROLLARIVM II.

NOSTRVM.

*Eiſdem datis: Si fuerit minor ratio A ad B, quàm D ad E; & minor ratio B ad C, quàm E ad F: erit ex æquo minor ratio A ad C, quàm D ad F.*

COROLLARIVM III.

NOSTRVM.

*Si plures quàm tres fuerint in ſingulis ordinibus, æquales tamen numero; ſi plures ſint rationes maiores in vno ordine quàm in alio, licet ſint aliqua æquales in vtroque ſemper ratio prima ad vltimam in illo ordine erit maior quàm prima ad vltimam in alio ordine.*

HÆc corollaria demonſtrabuntur eodem medio quo probauimus hanc prop. 31.

## PROPOSITIO XXXII.

**Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero; ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quàm ſecunda poſteriorum ad tertiam; Item ſecundæ priorum ad tertiam, quàm primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ poſteriorum ad tertiam.**

SVppoſitio. Sint in primo ordine tres magnitudines A. B. C. & in alio poſteriore ordine aliæ tres D. E. F; ita tamen vt ſit maior ratio A ad B, quàm E ad F; & maior ratio B ad C, quàm D ad E: Dico quod ex æqualitate maior erit ratio A ad C, quàm D ad E.

A. B. C.

D. E. F.

Demonſtratio. Per def. vltimam huius libri. Ratio primæ magnitudinis ad vltimam componitur ex rationibus primæ ad ſecundam, ſecundæ ad tertiam, & ita deinceps ſi plures ſint; ergo Ratio A ad C, componetur ex ratione A ad B, & ratione B ad C: ſimiliter ratio D ad F, componetur ex ratione D ad E, & ratione E ad F: illæ verò rationes componentes ſunt maiores ex datis, quàm iſtæ, ergo per 5. ax. libr. 1. applicatum ad materias huius, ratio A ad C, erit maior quàm ratio D ad F. quod erat concludendum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Quocumque numero ſint magnitudines in primo ordine, totidemq́, numero in ſecundo; ſi plures ſint maiores rationes in vno ordine, quàm in altero: Ratio prima ad vltimam in illo ordine in quo plures ſunt rationes maiores, maior erit, quàm prima ad vltimam in alio ordine; licet inter eas comparatas ſint aliqua rationes eadem.*

PRobatio huius corollarij ex diſcurſu facto & principiis demonſtrationis allatæ dependet.

## PROPOSITIO XXXIII.

**Si fuerit maior proportio totius ad totam, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliquæ ad reliquam maior proportio, quàm totius ad totam.**

SVppoſitio. Sit proportio maior totius quantitatis AEB ad totam CFD, quàm ablatæ AE ad ablatam CF: Dico maiorem eſſe proportionem reliquæ EB ad reliquam FD, quàm totius AEB ad totam CFD.

AEB ad DEF.

AE ad DE.

EB ad EF.

 Demon-

# COMMENTARIVS IN LIBRVM SEXTVM EVDOXI ET EVCLIDIS, ELEMENTORVM GEOMETRICORVM DEFINITIONES.

## I.

*Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atque etiam latera quæ circum angulos æquales proportionalia.*

Fig.131. PARTICVLA, rectilineæ, excludit alias figuras non rectilineas, & ſolidas. Et profert duas conditiones neceſſarias ad ſimiles figuras rectilineas conſtituendas. Prima eſt vt angulos ſingulos ſingulis æquales habeant. Secunda verò eſt, vt latera quæ circum æquales angulos ſunt, proportionalia ſint. Exempli gratia, Triangulum ABC, & triangulum DEF, habeant angulos A & D æquales, tùm B & E, tùm C & F; ſitque vt BA ad AC, ſic ED ad DF; tùm AB ad BC, vt DE ad EF; denique BC ad CA, vt EF ad FD; hoc eſt latera proportionalia obtineant circum æquales angulos; erunt dicta triangula rectilinea ABC, DEF, ſimilia. Quod ſi ſimilia fuerint, habebunt & angulos æquales, vnum vni, alterum alteri, tertiumque tertio, tum etiam latera circum angulos æquales proportionalia. Et ſic de aliis figuris rectilineis.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Figuræ omnes rectilineæ, æquilateræ & æquiangulæ, vt triangula æquilatera, quadrilatera, quinquelatera, ſexilatera, ſeptilatera, octilatera, &c. æquiangula, comparata ad inuicem in ſua ſpecie, hoc eſt quadrilatera ad inuicem & æquiangula & æquilatera: ſunt ſimiles inter ſe.*

NAm cùm dentur æquiangulæ, angulos æquales obtinebunt: & cùm dentur æquilateræ, latera circum æquales angulos habebunt proportionalia ſecundùm rationem æqualitatis, quæ cum ſit eadem in omnibus; erunt dictæ figuræ ſimiles.

Quod ſi ſint figuræ rectilineæ aliquæ æquiangulæ, vt quadratum & altera parte longior figura; non erunt ſimiles figuræ, nam latera circa angulos rectos quadrati habent rationem æqualitatis; latera verò circa angulos altera parte longioris figuræ, habent rationem inæqualitatis: quare deficiente vna ex conditionibus allatis, figuræ huiuſmodi non erunt ſimiles rectilineæ. Nam poſſunt etiam dari altera parte longior figura & rhomboides, quorum latera aduerſa ſint æqualia in vtriſque, maiora maioribus, minora minoribus; ideoque ſint proportionalia in vtriſque circa angulos illorum, per coroll. noſtrum prop. 7. libr. 5. verùm quia non habent angulos æquales, non erunt ſimiles figuræ; altera

enim parte longior figura eſt rectangula, & rhomboides non rectangula, iuxta eorum naturas.

## I I.

*Reciproca figura ſunt, cùm in vtraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.*

Fig. 132. EXempli gratia in duobus parallelogrammis primo ABCD, ſecundo EF GH: ſit latus CB antecedens in figura prima ad latus HE conſequens figuræ ſecundæ; vt latus FE antecedens in figura ſecunda, ad latus BA figuræ primæ. Iſta duo data parallelogrammata, erunt reciproca; quia antecedentes termini rationum ſunt in illis, videlicet latera CB, FE, tùm etiam alia latera HE, BA, ſunt conſequentes termini earumdem rationum. Et ſic de aliis figuris iudicandum erit.

## I I I.

*Secundùm extremam & mediam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur; cùm vt tota ad maius ſegmentum, ita maius ad minus ſe habuerit.*

Fig. 133 EXempli gratia ſi recta linea AB fuerit ſecta in C, ita vt tota AB ad AC maius ſegmentum fuerit, vt AC ad CB minus ſegmentum: ipſa tota ſecta erit media & extrema ratione.

## I V.

*Altitudo cuiuſque figuræ, eſt linea perpendicularis à vertice ad baſim deducta.*

REctè altitudo figuræ deſumitur per lineam deductam ab vertice figuræ, ad angulos rectos ad baſim eius; hoc eſt ab puncto remotiore in figura data ab baſi eius ad ipſam baſim: nam omnis diſtantia deſumitur per lineam breuiorem ſeu breuiſſimam; ea autem eſt perpendicularis recta linea ab puncto extra rectam lineam dato quod non ſit in directum alterius rectæ lineæ vel plani ad ipſam rectam lineam vel planum: primũ oſtenſum in coroll. prop. 19. libr. 1. alterum oſtendetur in libro vndecimo. Quare ſi figura data ſit plana rectilinea, altitudo eius erit recta linea perpendicularis ab vertice eius ad baſim. Si verò figura ſit ſolida planis terminata, altitudo eius erit recta perpendicularis ab eius vertice ad baſim eius planam. Si verò fuerit figura plana non rectilinea ſed curuilinea, altitudo eius ſumenda erit penes lineam etiam perpendicularem propriam ab eius vertice ad eius baſim. Si denique fuerit figura ſolida, terminata ſuperficiebus curuis, etiam altitudo eius erit linea propria perpendicularis ab eius vertice ad baſim eiuſdem.

Authores noſtri videntur ſolùm agere in hoc libro de figuris planis rectilineis; quare ſi hoc ſit, intelligenda erit recta linea perpendicularis ab vertice figuræ ad baſim eius, pro altitudine ipſius, producendam ſi opus ſit.

Difficultates quæ ſuboriri poſſunt circa reliquarum figurarum curuilinearum tam planarum quàm ſolidarum altitudines, enodabimus in libro noſtro de natura quantitatis, & affectionibus eius vniuerſalibus.

In libris ſolidorum ſi figura ſolida innitatur baſi planæ, licet habeat alias ſuperficies non planas, etiam altitudo huiuſmodi figuræ ſolidæ, erit recta linea perpendicularis ab eius vertice ad hanc baſim deducta producendam ſi opus ſit.

Exemplum demus in figura plana A B C, recta A D deducta ab A vertice figuræ ad eius baſim BC perpendicularis, erit eius altitudo. Fig. 134.

## V.

*Ratio ex rationibus componi dicitur, cùm rationum denominatores ſeu quantitates inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem.*

HAnc definitionem iam explicauimus in vltima libri quinti, vtpote adſcitam vt nobis inſeruiret ad demonſtrationes nouas aliquarum propoſitionum.

## V I.

*Parallelogrammum ſecundùm aliquam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam.*

*Excedere verò, quando occupat maiorem lineam, quàm ſit ea, ſecundùm quam applicatur: ita tamen vt parallelogrammum deficiens aut excedens, eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, conſtituatq́, cum eo totum vnum parallelogrammum.*

EXempli gratia ſit data recta A B, ſupra quam conſtitutum ſit ſeu applicatũ parallelogrammũ ACDE, cuius vnum latus AC ſit pars rectæ datæ AB, hoc eſt idẽ atque dum dicitur, non occupet totam rectam datam, deficiente parte eius CB: Perficiendo verò totum parallelogrammum EB, vti docuimus in lem. noſtro ſecundo ad libr. 2. Parallelogrammum ACDE applicatum ſecundùm lineam Fig. 135.

neam rectam datam AB, deficere dicetur, quia vnum eius latus AC non occupat totam rectam datam AB; deficere inquam dicetur parallelogrammo DB quod ideò vocabitur defectus.

Quod ſi data eſſet recta AC, factum parallelogrammum ABFE, ſupra rectam ACB maiorem data AC, excedere dicetur parallelogrãmo DB quod ideo vocabitur exceſſus.

Quando dicitur parallelogrammum applicatum ſecundùm datam rectam lineam, intelligi debet inadæquatè, hoc eſt vnum latus eius debet eſſe vel minus data recta, vel maius: ſi enim eſſet æquale illi, non poſſet dici illud parallelogrammum excedere, vel deficere alio parallelogrammo ab parallelogrammo totali comprehendente excedens & exceſſum, vel deficiens & defectum, quod tamen requiritur in definitione allata, ſub illis particulis, quando non occupat totam lineam, & quando occupat maiorem lineam quàm ea ſit ſecundùm quam applicatur.

VII.

*Rectilinea ſimilia ſimiliterq́; poſita ſuper datis rectis lineis deſcripta dicuntur; quando anguli æquales conſtituuntur ſuper datis rectis lineis, & tàm reliqui æquales anguli, quàm latera proportionalia ſemper ordine ſeſe conſequuntur.*

Exemplum in triangulis rectilineis BAC, EDF ſimilibus ſimiliterque poſitis; propter angulos, B & E, tùm C & F æquales conſtitutos ſupra datas rectas BC, EF, tùm reliquans angulo A, D, & latera CA, FD; AB, BE, proportionalia ſemper ordine ſeſe conſequentia.

# PROPOSITIONES.

I.

*Triangula & parallelogramma, quorum eadem [vel æqualis] fuerit altitudo; ita ſe habent inter ſe, vt baſes.*

Fig. 136. Suppoſitio. Triangula ABC, DEF; vel parallelogramma AMBC, NDEF, obtineant eandem altitudinem, vel æquales hoc eſt æquales perpendiculares rectas lineas AR, DS, deductas ex verticibus A, D, illorum, ad baſes proprias BC, EF, iuxta definitionem 4. huius libri, vel communem perpendicularem vnam. Dico ita eſſe triangulum ABC ad triangulum DEF, vel parallelogrammum MACB ad parallelogrammum NDEF, vt baſis BC ad baſim EF.

Conſtructio. Vel triangula data aut parallelogramma baſes habent in vna eademque recta linea, ſuntque ad eaſdem partes illius, vt in figura propoſita; vel non ita ſe habent: tunc in iſto caſu facienda ſunt alia illis æqualia ſupra eandem rectam lineam ad eaſdem eius partes; quod facile fiet per corollar. noſtrum 2. prop. 22. libr. 1. ſi fuerint data triangula, quod ſi fuerint parallelogramma, propoſitum ad praxim reducetur, per coroll. noſtrum 2. prop. 45. libr. 1. Prætereà, vel triangula aut parallelogramma ſic conſtituta verticem habebunt communem, vt triãgula duo GAB, BAC, quæ verticem A communem habent; vel parallelogramma EDNF, FNOI, quæ verticem N communem habent: vel diuerſos vertices A, & D, triangula duo BAC, EDF, aut parallelogramma duo ACBM, DEFN: In vtroque iſto caſu oſtendam Triangula prædicta, vel parallelogramma prædicta eandem vel æquales altitudines habentia eſſe inter eaſdem parallelas rectas lineas, quarum vna eſt recta BCEF, ſupra quam ſunt conſtituta & ad eaſdem eius partes, altera verò quæ per eorum verticem communem, vel vertices diuerſos, puta A, D, tranſmittitur. Fig. 131. Accipiamus primum caſum in triãgulis duobus GAB, BAC, verticem communem A habentibus: tunc eadem erit altitudo illorum, ob vnicam rectam AR perpendicularem ad rectam GBC in qua baſes illorum ſunt, deductam ab vertice A communi, iuxta coroll. noſtrum prop. 17. libr. 1; tunc verò per prop. 31. lib. eiuſdem 1. poterit duci recta linea per A punctum verticis parallela baſibus GB, BC, in eadem recta GBC exiſtentibus, & ſic dicta triangula GAB, BAC, erunt inter eaſdem parallelas: Simili modo duo parallelogramma EDNF, FNOI, communem verticem habentia N, eandem habebunt altitudinem NT, perpendicularem rectam videlicet ab communi eorum vertice N, deductam vnicam, ad rectam EFI, baſes eorum EF, FI, continentem, quæ perpendicularis NT, eſt vnica per cit. coroll. noſtrum prop. 17. libr. 1. Et quia parallelogrammorum iſtorum latera DO, ND, ſunt parallela toti rectæ EFI, per def. 35. libr. 1. recta NT orthogonia ipſi EFI rectæ, etiam ad angulos rectos erit ipſis lateribus

ribus DN, ON, per coroll. noſtrum 2.prop. 29.libr.1.habebimus ergo ad punctum N, rectæ TN, duas rectas lineas ON, DN, ductas & efficientes angulos deinceps ONT, DNT, rectos, igitur per prop.14.lib.1. erunt in directum ſeu efficient vnam rectam lineam DNO, ipſæ duæ rectæ ſeu latera DN, ON; ſicut igitur partes eius DN, vel ON erant parallelæ toti rectæ EFI, ita etiam tota recta DNO, erit parallela rectæ EFI; quare dicta parallelogramma EDNF, FNOI, erunt inter eaſdem parallelas. Secundum caſum inſpiciamus. Cùm triangula BAC, EDF, dentur habere eandem altitudinem, vel æqualem, propter æquales rectas AR, DS, perpendiculares rectæ BCEF continenti baſes illorum BC, EF, deductaſque ab eorum verticibus diuerſis A & D; ipſæ perpendiculares AR, DS, erunt parallelæ per prop.28.lib.1. ob angulos rectos in R & S, ſed & ſunt æquales datæ ob datam altitudinem æqualem ipſorum triangulorum; ergo per prop.33.libr.1. recta linea AD ducta per vertices A & D, prædictos, erit parallela rectæ BCEF; igitur dicta triangula erunt inter eaſdem parallelas AD, BCEF: Conſimili methodo demonſtrabuntur rectæ AD, BCEF, in parallelogrammis ACBM, DEFN diuerſos vertices A & D obtinentibus, eſſe parallelæ; ſed dantur AR, DS, rectæ perpendiculares vni BCEF, ex illis aliis duabus parallelis, ergo per coroll.2.noſtrum propoſ.29.libr.1.etiam erunt perpendiculares alteri rectæ AD; & propter eandem rationem erunt perpendiculares etiam per 34.prop.lib. 1. aliis MA, DN, parallelis rectis ipſi BCEF; quare cùm ex puncto A ad partes diuerſas rectas AR, ductæ rectæ AM, AD, efficiant angulos rectos RAD, RAM, erunt rectæ MA, AD, in directum per prop.14.libr.1. & quia etiam in puncto D rectæ SD, emiſſæ rectæ ND, DA, rectos SDA, SDN, ipſæ per propoſ.cit. 14 rectæ ND, AD, efficient vnam rectam lineam; igitur à primo ad vltimum parallelogramma ACBM, DEFN, æqualem habentia altitudinem diuerſoſque vertices, inter eaſdẽ parallelas rectas MADN, BCEF, conſiſtent. Hæc omnia iudicauimus præmittenda ante conſtructionem ſequentem immediatam. Producantur longiſſimè ex vtraque parte, parallelæ rectæ AD, BCEF; & ſumantur ad partes B, plurimæ quocumque numero determinato, rectæ, v.g. duæ BG, GH, de producta CB vltra B, æquales datæ baſi BC, per propoſ.5.lib.1.quæ erunt æquales inter ſe per 1.ax.lib.eiuſdem: Eodem modo ſumatur de recta BCEF producta vltra F, alia FI æqualis ipſi EF datæ; erit tota HGBC multiplex ipſius BC, & tota EFI multiplex ipſius EF, ſecundum quamcũque multiplicationem maior minoris, cùm poteramus ſumere alias multiplices, ſed exempli gratia elegimus illas: His peractis ſi ſermo ſit de triangulis BAC, EDF, ex A ducantur rectæ AH, AG; tùm ex D ducatur alia recta DI, reſultabunt diuerſa triangula: quod ſi ſermo ſit de duobus parallelogrammis ACBM, DEFN, ex punctis G, H, ducantur per prop.31. libr.1. rectæ GL, HK, parallelæ rectæ ipſi BM, reſultabunt parallelogramma HL, GM, nam latera oppoſita ſunt vel poſita vel oſtenſa parallela; ſimiliter ductâ rectâ IO parallela ipſi FN, reſultabit parallelogrammum FO: porrò per prop.38.lib. 1.triangula HAG, GAB, BAC, erunt æqualia inter ſe, tùm etiam alia EDF, FDI; & per propoſ.36. eiuſdem libr. 1. parallelogramma HL, GM, BA, erunt æqualia inter ſe, & alia parallelogramma EN, FO, etiam æqualia inter ſe, quia ſunt ſupra baſes æquales, & inter eaſdem parallelas. Iam verò ſi ſumamus baſim BC pro prima quantitate; & baſim EF, pro ſecunda quantitate; & triangulum BAC, vel parallelogrammum AB pro tertia; & triangulum EDF vel parallelogrammum FD, pro quarta; ſumptæ erunt æquemultiplices, HC recta, & triangulum HAG, vel parallelogrammum HA, primæ BC & tertiæ BAC vel BA, ſecundùm quamcumque multiplicationem; tùm etiam ſumptæ erunt EI recta, & triangulum EDI, vel parallelogrammum DI, æquemultiplices ſecundæ EF, & quartæ EDF vel DEFN ſecundùm quamcumque multiplicationem: Iam verò ſi recta CH multiplex primæ BC, eſt æqualis rectæ EI multiplici tertiæ, erit etiam triangulum GAC multiplex tertiæ BAC æquale triágulo EDI multiplici quartæ EDF, vel parallelogrammum HA multiplex tertiæ BA quantitati parallelogrammę, erit æquale parallelogrammo EO multiplici quartæ quæ eſt parallelogrammum FD: vel ſi illa multiplex primæ ſit maior multiplici ſecundæ, etiam multiplex tertiæ erit maior multiplici quartæ; vel vnâ deficient illæ primæ & tertiæ multiplices ab æquemultiplicibus ſecũdæ & quartæ: Ad quod explicandum ſic agemus in vno exemplo, ſi CH multiplex primæ BC, ſit maior recta EI, multiplice ſecundæ EF, ſecabimus per prop. 3.lib.1.ex CH maiore, rectam CQ æqualem ipſi EI, & ducemus rectam QA; erunt per prop.38.lib.1. triangula QAC & EDI æqualia; & per ax.19. eiuſdem libri 1. triangulum HAC maius eſt triangulo QAC, ergo per 1. axio. eiuſdem libri, idem triangulum HAC maius erit triangulo EDI; & ſic oſtenſum erit ſi CH multiplex primæ BC fuerit maius multiplice EI, ſecundæ EF, etiam multiplex

HAC

HAC tertiæ B A C , maius eſſe multiplice EDI, quartæ EDF; & ſic proportione ſeruata de aliis.

Demonſtratio. Quia in conſtructione & apparatu præcedenti oſtendimus æquemultiplices HC , HAC , primæ BC ac tertiæ BAC, vnâ deficere, vel excedere, vel æquales eſſe, reſpectu æquemultiplicium EI, EDI , ſecundæ EF,& quartæ EDF: ideo per def.6.lib.5. erit vt BC ad EF, ita BAC, ad EDF. Et eodem modo vt B C ad E F , ita AMBC ad DEFN. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Si triangula vel parallelogramma baſes habuerint in eadem recta linea, & tàm illa, quàm iſta habuerint verticem communem; obtinebunt tàm illa quàm iſta eandem altitudinem, & exiſtent inter eaſdem parallelas.*

## COROLLARIVM NOSTRVM I I.

*Si triangula vel parallelogramma baſes habuerint in eadem recta linea, & æquales altitudines ac diuerſos vertices; verſus eandem partem prædictæ rectæ; exiſtent inter duas rectas parallelas, quarum vna eſt recta continens baſes eorum, altera verò qua tranſmittitur per dictos vertices.*

DEmonſtrata ſunt in apparatu & conſtructione huius propoſitionis ante demonſtrationem.

## COROLLARIVM NOSTRVM I I I.

*Triangula vel parallelogramma inter eaſdem parallelas rectas conſtituta eandem habent altitudinem, & inter ſe ſunt, vt baſes eorum.*

Fig.136. SI enim in figura eadem, non habeant eandem altitudinem; deductis AR, DS, duabus rectis perpendicularibus, ex duobus punctis ſeu verticibus triangulorum vel parallelogrammorum datorum ad rectam lineam BCEF,continentē baſes eorum & parallelam alteri AD rectæ tranſeuntem per vertices A, D, prædictos;ipſæ rectæ perpendiculares AR, DS, erunt per 28.prop.libr.1. parallelæ inter ſe, ob rectos angulos in R & S; ergo parallelogrammum erit ADSR,quandoquidem oppoſita latera ſunt parallela : ſed per prop. 34. lib. 1. oppoſita latera AR, DS, huius parallelogrammi ſunt æqualia, quæ ſunt perpendiculares deſignantes altitudinem datorum triangulorum vel & parallelogrammorum inter eaſdem parallelas cōſtitutorum; ergo eandem habebunt altitudinem ſicuti propoſitum fuit in hoc coroll.& per prop.iſtam, inter ſe erunt vt baſes.

## COROLLARIVM NOSTRVM I V.

*Omnes rectæ lineæ ex vna recta deductæ ad aliam huic parallelam perpendiculares, ſunt æquales inter ſe.*

OStendimus enim in coroll.3.præcedenti eas efficere parallelogramma rectangula, quare per cit.prop.34.libr.1.ipſæ erunt æquales inter ſe, tùm per 1.ax.lib.eiuſdem.

## PROPOSITIO I I.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera.

Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ad ſectiones adiuncta fuerit recta linea; erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

SVppoſitio. Ad trianguli ABC latus BC, ducta ſit recta linea ED parallela,ſecans in E latus AC, & in D latus AB : Dico primò, ſecta eſſe proportionaliter latera A C, A B, trianguli dati hoc eſt eſſe AD ad DB, vt AE ad EC. Præterea , ſecta ſint duo latera AB, AC, trianguli ABC, proportionaliter , hoc eſt ſit AE ad EC,vt AD ad DB : dico ſecundò, rectam ED, connectentem illa duo puncta E & D, eſſe parallelam reliquo lateri BC, trianguli dati ABC. Fig.137.

Conſtructio. Ducantur rectæ EB,DC; Reſultabunt triangula EDB, DEC.

Demonſtratio primæ partis. Quandoquidem dantur duæ rectæ E D, CB , parallelæ, exiſtent triangula duo EBD, DCE, inter illas, quare per coroll.noſtrum 3.prop. præcedentis, eandem habebunt altitudinem ,ſeque habebunt vt baſis communis ED, ideoque æqualia erunt illa duo triangula,quia baſes eorum ſunt æquales, videlicet baſis communis ED

ED : quare etiam per prop. 7. libr. 5. triangulum EAD, eandem habebit rationem ad illa duo triangula EBD, DCE. Iam verò, ſi non eſt AD ad DB vt AE ad EC, ſit exempli gratia maior ratio AD ad DB, quàm AE ad EC : & quia eſt per prop. 1. libr. huius, & corollar. noſtrum 1. illius propoſitionis, triangulum EA, ad triangulum DEB, vt recta AD ad rectam DB ; erit per axiom. noſtrum 9. libr. 5. maior ratio trianguli DEA ad triangulum DEB, quàm rectæ AE ad rectam EC : & quia eſt etiam eadem ratio rectæ AE ad rectam EC, quæ eſt trianguli EDA ad triangulum EDC, per citat. prop. 1. & eius corollar. noſtrum 1; erit etiam per citat. axiom. 9. libr. 5. maior ratio trianguli DEA ad triangulum DEB, quàm trianguli EDA ad triangulum EDC, contra demonſtrata. Abſurdum hoc indicat poſitionem contradicentem huic primæ parti falſam eſſe, & aſſertionem veram.

Demonſtratio ſecundæ partis. Si recta ED non ſit parallela lateri CB, poterimus ducere ex puncto E, rectam aliam EF, vel ER parallelam ipſi lateri CB, per propoſ. 31. lib. 1. quæ cadet ſupra vel infra rectam ED, ita vt ſint diuerſæ rectæ lineæ, ſi enim eſſent vna & eadem recta, ipſa ED eſſet parallela lateri CB, quod negabatur, & quod volumus. Iam verò per primam partem huius propoſitionis, quia EF, vel ER eſt parallela lateri CB, erit AF ad FB, vel AR ad RB, vt AE ad EC; datur autem AD ad DB, vt AE ad EC; ergo per propoſ. 11. libr. 1. erit AF ad FB vel AR ad RB vt AD ad DB : eſt autem prima AF (ſi ceciderit recta EF ſupra rectam ED) minor tertia AD, ergo per 14. lib. 5. erit ſecunda FB minor quàm DB quarta totum minus parte : quod ſi ceciderit recta ER infrà rectam ED, prima AR cùm ſit maior quàm AD tertia, erit per cit. propoſit. 14. ſecunda RB maior quàm quarta DB, pars maior toto. hæc abſurda prouenientia ex poſitione rectæ ED non parallelæ lateri CB, indicant falſitatem illius, & confirmant ſtabiliuntque aſſertionem ſecundam.

## PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariàm ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſim: baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera.

Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera : recta linea quæ à vertice ad ſectionem producitur, bifariàm ſecat trianguli ipſius angulum.

SVppoſitio. Trianguli BAC, angulum BAC, ſecet recta linea AD bifariàm, ſecando etiam baſim BC in D : Dico primò ſegmenta CD, DB, baſeos CB ſectæ, eſſe proportionalia reliquis duobus CA, AB, lateribus dati trianguli, hoc eſt eſſe CD ad DB vt CA ad AB. Quod ſi baſeos BC, ſegmenta CD, DB, ſint proportionalia lateribus CA, AB, ita vt ſit CD ad DB vt AC ad AB : Dico ſecundò rectam lineam DA, ductam ab ſectione D ad angulum A oppoſitum baſi BC, ſecare angulum BAC in duos æquales angulos BAD, DAC Fig. 138

Conſtructio pro prima parte demonſtranda. Producatur vltra A, latus CA, & per 3. prop. libr. 1. ſumatur recta AE æqualis lateri AB, ducaturq; recta linea EB. Reſultabit triangulum EAB iſoſceles, ideoque per prop. 5. libr. 1. anguli eius E, ABE, æquales erunt; quibus duobus angulis totus angulus BAC æqualis erit per prop. 32. lib. 1. quare horum æqualium videlicet anguli BAC, & ſummæ angulorum E, ABE, dimidia erunt æqualia per 7. ax. lib. 1. videlicet anguli E, DAC, vel anguli ABE, BAD; quare per propoſ. 27. vel 28. libr. 1. parallelæ erunt rectæ lineæ AD, EB.

Demonſtratio primæ partis. Quia per conſtructionem ſunt æquales rectæ AE, AB, recta CA, ad illas eandem habebit rationem per prop. 7. libr. 5. Iam verò quia recta AD, parallela eſt lateri EB, erit per 2. prop. lib. huius, CD ad DB, vt CA ad AE, & per 11. prop. libr. 5. CD ad DB vt CA ad AB, quod erat concludendum.

Conſtructio pro ſecundæ partis demonſtratione

ſtratione. Si recta DA non diuidit angulum BAC bifariàm, poterimus illum diuidere bifariàm iuxta propoſ.9. libr.1. per rectam aliam AF.

Demonſtratio ſecundæ partis vel aſſertionis. Per primam partem huius propoſitionis erit recta CF ad rectam FB, vt CA ad AB: datur autem CD ad DB, vt recta CA ad rectam AB; ergo per prop.11.libr.5. erit recta CD ad rectam DB vt recta CF ad rectam FB. Iam vero ſi recta AF ſecat baſim CB in puncto F inter puncta D & B, erit prima AF maior tertia CD, quare per prop.14. libr.5. erit ſecunda FB maior quàm quarta DB, pars maior toto: Quod ſi recta AF ſecet baſim CB in puncto G inter puncta C & D, erit prima AG minor quam tertia AD, ideóque per cit.prop.14. libr.5. ſecunda GB erit minor quàm quarta DB, totum minus parte. hæc abſurda condemnant poſitionem aduerſarij aſſerentis rectam DA non diuidere bifariàm angulum BAC: illum igitur diuidet bifariàm prout aſſerit hæc propoſitio contradicens illi poſitioni aduerſarij.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

***Nulla recta linea poteſt diuidi bis in diuerſis punctis, proportionaliter vt ſunt duæ aliæ rectæ lineæ inter ſe.***

Fig.138. HOc demonſtrauimus in recta CB diuiſa in D, ita vt ſit CD ad DB, vt CA ad AB. nam oſtendimus non poſſe eſſe CG ad GB, nec CF ad FB, vt CA ad AB, datis quod CD ad DB ſit vt CA ad AB.

## PROPOSITIO IV.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos; & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

Fig.139. SVppoſitio. Sint duo triangula ABC, DEF, æquiangula, ita vt anguli A & D ſint æquales, tùm anguli B & E etiam æquales; denique alij duo anguli C & F æquales: Dico primò eorum latera circa æquales angulos, eſſe proportionalia: hoc eſt eſſe BA ad AC, ſicut ED ad DF, vtpote circa æquales angulos A & D: tùm eſſe AB ad BC, ſicut DE ad EF, ſcilicet circa æquales angulos B & E: deniq; eſſe BC ad CA, ſicut EF ad FD, nimirum circa æquales angulos C.& F. Dico etiam ſecundo, homologa eſſe latera illorum quæ æqualibus angulis ſubtenduntur; hoc eſt iuxta definitionem 11. libr.5. eſſe latera AB & DE ſubtenſa æqualibus datis angulis C & F, homologa; tùm etiam homologa eſſe latera BC, EF, ſubſtrata angulis æqualibus datis A & D; inſuper eſſe homologa latera AC, DF, ſuppoſita æqualibus angulis B & E.

Conſtructio. Data duo triangula, ſi non ſint conſtituta ſupra vnam rectam lineam BCF, ita vt duo eorum anguli, puta ACB, DEF, commune punctum C, vel E, habeant in recta BCF, & vnus eorum ſit, v.g. DEF ſit exterior reſpectu alterius æqualis ABC in altero triangulo, & ad eaſdem partes rectæ BCF; producta recta BC vltra C, concipiatur conſtitutum triangulum DEF vti nunc explicauimus, & in figura videre eſt. In hac verò conſtitutione latera AC, DF, erunt parallela per propoſ. 28. libr.1. quia anguli F, ACB, dati æquales, ſunt ita poſiti, vt ſint ad eaſdem partes, & vnus ſit exterior alterius: & quia duo anguli B & ACB, ſunt per prop. 17. minores duobus rectis, erunt etiam duo anguli B & F, minores duobus rectis, ob æqualitatem angulorum ACB, DFE datam; ideoque per ax.13.lib.1. producta latera BA, FD, vltra A & D, concurrent in G: eruntque latera BAG, CD, parallela per prop.cit. 28.lib.1. propter æquales datos angulos B & DEF, internum & externum & ad eaſdem partes. Reſultabit denique parallelogrammum AGDC, ob latera aduerſa oſtenſa parallela; vnde per propoſ.34.lib.1. latus GA, erit æquale lateri DE trianguli dati, & latus GD æquale erit lateri AC, alterius trianguli dati: quare quæ dicemus de rectis AG, GD, circa relationes aliarum rectarum ad illas, vel earum ad alias, rectè applicabuntur lateribus ſeu rectis DE, AC, æqualibus illis nam per 7.prop.lib.5. æquales ad æquales eandem rationem habent: & eadem ad æquales; vel æquales ad eandem. Ad hæc reſultabit ex iſta conſtructione triangulum vnum BGF, in quo erit ducta recta AC parallela lateri GF; tùm alia recta DE, vel DC, parallela lateri alteri BG. His poſitis, ſequitur

Demonſtratio primæ aſſertionis. Per ſecundam prop.libr. huius, eſt BA ad AG, vel ED, vt BC ad EF; ergo per prop. 16. libr.5. erit viciſſim AB ad BC, vt DE ad EF. Eodem modo erit per 2. huius, BC ad EF, vt GD vel AC ad DF & viciſſim per 16.libr.5. BC ad CA, vt EF ad FD. Denique ſi non ſit BA ad AC, ſicut ED ad DF, non erit BA ad AC, vt ED ad DF, ex poſitione contra-

dicente aſſertioni primæ: Verùm aſſumendo tres quantitates AB, BC, CA, in vno ordine; & tres alias in ſecundo ordine, videlicet DE, EF, FD, & oſtenderimus eſſe AB ad BC, vt DE ad EF; & BC ad CA, vt EF ad FD; erit per 22. propoſ. libr. 5. AB ad AC, vt ED ad DF, contra poſitionem aduerſarij, ex qua ſequitur iſta contradictio, quare ipſa poſitio falſa erit, & erit BA ad AC, vt ED ad DF. omnia ergo latera triangulorum æquiangulorum erunt proportionalia circa æquales angulos.

Demonſtratio ſecundæ aſſertionis. Cùm oſtenderimus AB & DE ſubtenſa angulis æqualibus C & F, eſſe antecedētia, erūt homologa per def. 11. lib. 5. Similiter cùm demonſtrauerimus latera BC & EF ſuppoſita æqualibus angulis A, D, eſſe conſequentia vnius comparationis, & antecedentia alterius comparationis, erunt homologa per eandem defin. Denique cùm probauerimus latera CA, FD, ſubſtrata æqualibus angulis B & E, eſſe conſequentia, ipſa erunt homologa per eandem definit. Tota ergo propoſitio manifeſta facta eſt.

## COROLLARIVM.

*Si in quouis triangulo ducatur recta linea parallela vni laterum illius, terminata vtrimque in aliis eius duobus lateribus; abſcindet triangulum toti triangulo ſimile.*

Fig. 139. VT in figura facta GBF, recta AC parallela lateri GF, abſcindet triangulum ABC, toti triangulo GBF ſimile. Nam per propoſ. 28. libr. 1. anguli BAC, & G, erunt æquales, tùm etiam alij duo anguli BCA & F, & angulus A illis eſt communis: ergo cùm ſint æquiangula triangula ABC, GBF, erunt per hanc propoſ. 4. latera illorum circa æquales angulos proportionalia; ideoque per definit. 1. lib. huius, dicta triangula erunt ſimilia, abſciſſum & datum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si in triangulo ducta ſit recta linea parallela vni laterum eius, terminataq́; vtrimque in aliis duobus eius lateribus, & ab angulo oppoſito illi parallela ducta, deducta fuerit recta linea ſecans dictam parallelam & latus ei parallelum: ſegmenta parallela erunt proportionalia ſegmentis paralleli lateris praedicti ſecti.*

Fig. 140 IN triangulo BAC, recta DE ſit parallela lateri BC, & ducta recta AGF ab angulo A oppoſito ipſi parallelæ DE, ſecans ipſam in G, & latus BC in F; termineturq́ue recta DE in punctis D & F, reliquorum laterum AB, AC, trianguli dati. Dico ita eſſe EG ad GD, vt CF ad FB.

Nam per 2. propoſ. huius libri, eſt AE ad EG, vt AD ad DB: tùm per corollar. præcedens, triangulum BAF, diuiditur ab recta DG parallela lateri BF, in triangulum DAG ſimile toti triangulo BAF; ſimiliter abſcindetur per parallelam rectam GE, lateri FC, triangulum GAE, toti FAC ſimile. Et per 2. prop. lib. huius, erit AD ad DB, vt AE ad EC; ergo iuxta corollar. noſtrum 1. prop. 18. libr. 5. erit per compoſitionem rationis conuerſam, AB ad AD, ſicut AC ad AE; ſed per def. 1. lib. huius eſt AB ad BF, vt AD ad DG; & viciſſim per prop. 16. li. 5. eſt AB ad AD, vt BF ad DG: Simili modo per def. 1. lib. huius eſt AC ad CF, vt AE ad EG; & viciſſim per 16. lib. 5. eſt AC ad AE, vt CF ad EG: ergo per coroll. noſtrum prop. 11. lib. 5. erit BF ad DG, vt CF ad EG; & viciſſim erit per 16. prop. li. 5. BF ad FC, vt DG ad GE; & per coroll. prop. 4. eiuſdē lib. 5. erit inuertendo FC ad FB, vt EG ad GD. quæ erant declaranda.

## PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant: æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur.

SVppoſitio. Duo ſeparata triangula ABC, DEF, latera obtineant proportionalia, hoc eſt ſit AB ad BC vt DE ad EF, & BC ad CA vt EF ad FD, & CA ad AB vt FD ad DB: Dico primò illa eſſe æquiangula; ſecundò habere angulos C & F æquales ſuppoſitos antecedentibus lateribus AB, DE, homologis in prima comparatione; tùm angulos A & D æquales ſubſtratos conſequentibus lateribus BC, EF homologis in eadem prima comparatione; tùm angulos B & E æquales ſubtenſos lateribus CA, FD, conſequentibus homologis in ſecunda relatione. Fig. 141.

Constructio. Data triangula, vel habebunt vnum latus æquale alteri, vel inæquale. Si primùm, puta latus AB & ED; tunc cùm ſit AB ad BC, vt DE ad EF, primaq́; AB quantitas ſit æqualis tertiæ DE, erit per prop. 14. lib. 5. ſecunda BC ęqualis quartæ EF: Rurſus cùm ſit ex datis BC ad CA, vt EF ad FD, primaq́ue quantitas BC ſit oſtenſa æqualis

tertiæ

tertiæ EF, erit per cit. prop. 14. lib. 5. ſecunda CA æqualis quartæ FD. Si ſecundùm, eſto AB latus maius quàm DE: Quia verò eſt ex datis BA ad BC vt DE ad EF, primaque AB quantitas pónitur ab aduerſario maior quàm tertia DE, erit per prop. 14. li. 5. ſecunda BC maior quàm quarta EF; cumque detur BC ad CA vt EF ad FD, & ex oſtenſis ſit prima BC maior quàm tertia EF, erit per propoſit. 14. libr. 5. ſecunda CA maior quàm quarta FD: Ergo in hoc ſecundo caſu poterimus per propoſ. 3. lib. 1. reſecare ex BA maiore latere, partem BD æqualem minori lateri ED; & abſcindere ex maiore BC, partem BF æqualem minori lateri EF; tùm ducta DF recta, habebimus triangulum BDF, quod oſtendam æquilaterum & æquiangulum dato EDF; nam cùm per conſtructionem ſint latera BD, ED æqualia, tùm alia latera æqualia BF, EF; erit per corollar. noſtrum 7. prop. lib. 5. BD ad BF vt DE ad EF; ſed eſt ex datis AB ad BC vt DE ad EF, ergo per 11. prop. libr. 5. erit AB ad BC vt DB ad BF, & viciſſim per propoſ. 16. lib. 5. AB ad DB vt BC ad BF, & iuxta coroll. 2. noſtrum propoſ. 17. lib. 5. per diuiſionem rationis contrariam, AD ad DB vt CF ad FB, ideoque per 2. prop. libr. huius erit recta DF parallela lateri AC, & per coroll. propoſ. 4. lib. huius, triangulum DBF erit ſimile triangulo ABC: quare erit per def. 1. lib. huius, BF ad FD, vt BC ad CA, ſed eſt ex datis BC ad CA, vt EF ad FD, ergo per 11. prop. libr. 5. erit BF ad FD, vt EF ad FD, poſuimus autem rectas BF, EF, æquales, ergo rectæ FD, FD, erunt æquales per 9. prop. lib. 5.

Demonſtratio ex poſitione prima, videlicet quod data triangula ABC, DEF, vnum latus æquale alteri obtineant, vnum in vno, alterum in altero: Tunc quia in conſtructione oſtendimus illa triangula eſſe æquilatera relatiuè, erunt per prop. 8 libr. 1. eiuſque corollarium æquiangula relatiuè, quomodo fuit propoſitum. Demonſtratio ex ſecunda poſitione. Cùm oſtenderimus latera FD, FD, eſſe æqualia, & fecerimus latera DB, DE æqualia, tùm alia latera BF, EF, erunt in triangulis DBF, DEF, anguli B & E æquales per prop. 8. libr. 1. & per eius corollarium anguli D & D æquales, & alij anguli F & F æquales: & quia oſtendimus in conſtructione lineam rectam DF eſſe parallelam lateri AC, erunt per prop. 29. libr. 1. anguli D & A æquales, tùm etiam alij duo anguli F & C æquales: triangula igitur data habentia latera proportionalia, erunt æquiangula, eoſque habebunt angulos æquales ſub quibus homologa latera ſubtenduntur, vti ex comparationibus factis conſtat.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Si duo triangula latera proportionalia habentia, habuerint, vnum latus æquale alteri, vnum in vno, alterum in altero; reliqua etiam latera æqualia obtinebunt vtrumque vtrique.*

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Si duo triangula latera proportionalia obtinentia, habuerint vnum latus inæquale alteri, vnum in vno, alterum in altero; reliqua latera habebunt inæqualia, vtrumque vtrique, maioraq; in triangulo habente primum datum maius latus, minora vero in reliquo.*

HÆc duo noſtra corollaria oſtenſa ſunt in conſtructione ac demonſtratione.

## PROPOSITIO VI.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualeſque habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtéduntur.

SVppoſitio. conſulendo figuras propoſitionis antecedentis quintæ. Duo triangula ſeparata nihil commune habentia, ABC, DEF, habeant angulos B & E æquales, & circa hos angulos latera ſint proportionalia, hoc eſt AB ad BC ſit vt DE ad EF: aſſero quod ſint triangula æquiangula, æqualeſque habeant angulos C & F, ſub quibus latera homologa antecedentia AB, DE, ſubtenduntur; tùm habeant angulos A & D æquales, quibus ſupponuntur latera BC, EF, conſequentia homologa. Fig. 141.

Conſtructio. Vel data duo triangula vnum è datis lateribus proportionalibus habent æquale alteri, vnum in vno, alterum in altero: vel nullum. Si primùm, eſto AB æquale ipſi DE; Iam quia datur AB ad BC, vt DE ad EF, primaque quantitas AB datur æqualis tertiæ DE, erit per propoſ. 14. libr. 5. ſecunda BC æqualis quartæ EF. Si ſecundùm, ſit ma-

ius AB latus latere DE: Nunc vero quia datur AB ad BC vt DE ad EF, daturq́ue AB prima quantitas maior quàm tertia DE, erit per prop. 14. lib. 5. ſecunda BC maior quàm quarta EF: ergo per prop. 3. lib. 1. reſcindemus rectam BD ex BA æqualem minori ED, & ex BC maiore rectam BF æqualem minori EF; ductaq́ue recta DF, reſultabit triangulum DBF habens communem angulum B cum triangulo ABC; datur autem angulus B æqualis angulo E; ergo cùm duo triangula DBF, DEF, habeant duo latera relatiuè æqualia circa angulos æquales B, E, babebunt per 4. prop. lib. 1. baſes æquales DF, DF, anguloſq́ue D, D, æquales, tum angulos F, F, æquales; vnde erunt æquiangula illa duo triangula BDF, EDF; quare per 4. prop. lib. huius erit DB ad BF, vt DE ad EF; datur autem AB ad BC vt DE ad EF, ergo per 11. prop. libr. 5. erit AB ad BC vt DB ad BF, & per prop. 16. libr. 5. erit AB ad DB vt BC ad BF, & per coroll. 2. noſtrum prop. 17. libr. 5. iuxta diuiſionem rationis contrariam, erit AD ad DB, vt CF ad FB; ideoq́ue per 2. propoſ. libri huius, erit recta DF parallela lateri AC.

Demonſtratio propoſitionis, poſito primo caſu, quod latus AB ſit æquale lateri DE: Oſtendimus in conſtructione, tunc latus BC eſſe etiam æquale lateri EF; ergo cùm dentur anguli B & E æquales, erunt per 4. prop. lib. 1. baſes AC, DF, æquales; tùm anguli A & D æquales, tùm anguli C & F æquales: æquiangula ergo erunt data triãgula ABC, DEF, & angulos habebunt æquales vti proponebatur. Demonſtratio eiuſdem poſito ſecundo caſu: Oſtendimus in conſtructione rectam DF eſſe parallelam lateri AC, & æquiangula eſſe duo triangula BDC, DEF; eſt autem per prop. 29. lib. 1. angulus BDC æqualis angulo A, ergo per 1. ax. lib. 1. angulus D æqualis angulo BDC, erit æqualis angulo A; ergo per noſtrum coroll. 3. prop. 32. lib. 1. reliqui etiam duo anguli BFD, F, erunt æquales, & per 1. ax. angulus æqualis angulo F, quia per citat. propoſ. 29. lib. 1. duo anguli BFD & C, ſunt æquales. Æquiangula igitur ſunt triangula data ABC, DEF, ergo per 4. prop. lib. huius, reliqua latera circa angulos æquales erunt proportionalia, æqualeſq́ue habebunt angulos ſub quibus homologa latera ſubtenduntur, quæ erant demonſtranda.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Eiſdem poſitis quæ in propoſitione dantur, ſi vnum latus è datis proportionalibus, ſit in vno triangulo æquale alteri lateri è datis in alio triangulo; reliqua omnia latera habebunt æqualia reſpectiuè.*

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Eiſdem datis quæ in propoſitione, ſi vnum latus è datis proportionalibus ſit in vno triangulorum maius altero laterum è datis in alio triangulo: reliqua omnia latera habebunt reſpectiuè inæqualia, maioraq́; erunt in triangulo habente primum maius latus, & minora in alio triangulo.*

CVm enim ex iſta propoſitione ſint æquiangula triangula data, habebunt per 4. propoſ. libr. latera circa æquales angulos proportionalia: quare per prop. 14. libr. 5. poſitis quæ demonſtrauimus in concluſione, propoſita in his duobus corollariis demonſtrabuntur.

# PROPOSITIO VII.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios duos angulos latera proportionalia habeant; reliquorum verò ſimul vtrumque aut minorem aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.

SVppoſitio. Duo triangula ABC, DEF, habeant angulos A & D æquales; & circa alios duos ACB, DFE, vnum in triangulo ABC, alterum in alio triangulo DEF, ſint latera proportionalia, id eſt ſit AC ad CB, vt DF ad FE; prætereà reliquorum angulorum B & E, quilibet illorum ſit ſimul vel minor recto, vel non minor recto, non autem vnus illorum minor recto, & alter maior *Fig. 142.*

maior recto aut rectus: Aſſero illa triangula eſſe æquiangula, & æquales habere eos angulos circa quos proportionalia latera fuerint.

Conſtructio. Si anguli ACB, F, non ſint æquales, circa quos dantur latera proportionalia, erunt inæquales, Eſto, & maior angulus ACB, altero F, vel contra, (quidquid enim dicemus de vno dicendum de altero, & facienda cõſtructio proportionaliter ſequenti, & deducenda concluſio ad ſimilitudinem ſequentis.) Ad extremum lateris AC, nempe C, vbi eſt angulus ACB, faciendus angulus ACG æqualis angulo minori F, per prop. 23. libr. 1. concurret recta CG cum recta AB in G puncto intra extrema lateris AB oppoſiti angulo ACB diuiſo per rectam CG, iuxta axioma 29. libr. 1. Reſultabitque triangulum GAC, æquiangulum triangulo EDF, nam ex datis anguli A, D, ſunt æquales, & per conſtructionem anguli ACG & F, ſunt æquales, ergo reliqui duo AGC & E, æquales erunt per noſtrum coroll. 3. propoſ. 32. libr. 1. quare per quartam propoſ. lib. huius erit DF ad FE, vt AC ad CG; ſed datur AC ad CB vt DF ad FE, ergo per propoſ. 11. libr. 5. erit AC ad CG, vt AC ad CB, ergo per 9. prop. libr. 5. erunt æquales rectæ lineæ CG & CB, & per 5. prop. lib. 1. anguli B & BGC, æquales.

Demonſtratio. Quia dantur anguli B & E, ſinguli vel minores recto, vel non minores recto: Si primùm, cùm oſtenderimus angulos AGC, E, eſſe æquales, & E minor recto detur, erit & angulus AGC illi æqualis, etiam minor recto; quare per coroll. noſtrum 3. ad prop. 13. libr. 1. angulus BGC erit maior recto, inæqualis angulo B minore recto poſito, contra demonſtrata in conſtructione; oſtendimus enim angulos B & BGC eſſe æquales. Quod ſi ſecundum aſſumamus, ita vt ſinguli angulorum B & E ſint vel recti, vel maiores recto, erit per citat. corollar. noſtrum, angulus AGC æqualis angulo E oſtenſus, rectos vt B, ſi fuerit ipſe angulus E poſitus rectus; vel vt B maior recto, ſi fuerit angulus E poſitus maior recto: ex poſitione prima ſequitur cùm ex corollar. noſtro cit. angulus BGC ſit rectus, duos angulos ad baſim BC, trianguli iſoſcelis BCG, eſſe rectos contra prop. 17. lib. 1. at verò ex poſitione ſecunda ſequitur per idem coroll. noſtrum citat. angulum BGC eſſe minorem recto, & inæqualẽ angulo B poſito maiori recto, contra conceſſa in conſtructione, in qua oſtendimus eſſe æquales angulos B, BGC. Hæc abſurda manifeſtam faciunt falſitatem negationis angulorum F, ACB, æqualium: ipſi ergo æquales erunt, & reliqui etiam anguli B & E, per coroll. noſtrum 3. ad prop. 32. libr. 1. cùm dati ſint alij anguli A & D, æquales: æquiangula igitur erunt data triangula, & reliqua quæ propoſita ſunt.

## PROPOSITIO VIII.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem triangula, tùm toti triangulo, tùm ipſa inter ſe ſunt ſimilia.

SVppoſitio. Ab angulo A recto trianguli rectanguli BAC, recta linea AD demiſſa ſit ad latus CB oppoſitum ipſi A recto angulo, ipſum latus CB ſecabit non productum in puncto D ex intermediis inter extrema eius C & B, per coroll. noſtrum 1. ad prop. 32. libr. 1. Aſſero triangula duo reſultantia ADC, ADB, commune latus habentia ipſam AD perpendicularem, eſſe & toti triangulo dato CAB, & inter ſe ſimilia. *Fig.* 143

Demonſtratio Triangulum CDA, habet angulum communem C cum toto triangulo dato, anguloſque habent rectos CDA, CAB, æquales per 12. ax. lib. 1. ergo etiam per 3. corollar. noſtrum prop. 32. libr. 1. reliquos angulos CAD, & B æquales habebunt: Cùm igitur ſint triangula ADC, BAC, æquiangula oſtenſa, per 4. prop. libri huius, habebunt latera proportionalia circa æquales angulos; quare per def. 1. huius libri, erunt ſimilia. Simili modo quia ADB, communem angulum B habet cum toto triangulo CAB, & æquales habent angulos rectos ADB, CAB, æquales, per 12. ax. lib. 1. reliquos etiã duos DAB, ACB, obtinebunt æquales per 3. corollar. noſtrum propoſ. 32. libr. 1. vnde æquiangula erunt, & per 4. prop. libr. huius habebunt circum æquales angulos latera proportionalia, & per def. 1. citat. erunt ſimilia. Denique quia oſtendimus angulos B & CAD eſſe æquales, tùm angulos ACD, BAD, æquales, & ſicut anguli circa D æquales vtpote recti, erunt triangula duo ADC, ADB, æquiangula, & per 4. prop. lib. huius, habebunt circum æquales angulos latera proportionalia; ideoque per def. 1. libr. huius, erunt ſimilia. quæ omnia erunt demonſtr.

### COROLLARIVM I.

*Recta perpendicularis quæ ab angulo recto trianguli rectanguli ad oppoſitum ipſi latus demittitur, eſt media proportionalis inter lateris ipſius ſegmenta.*

Fig.143. Sequitur enim ex dictis & cit. prop.4. lib. huius, eſſe rectam CD ad DA, vt DA ad DB; vel BD ad DA vt DA ad DC. media igitur recta DA perpendicularis ab angulo A trianguli rectanguli CAB, demiſſa ad latus CB ipſi oppoſitum A angulo, inter ſegmenta CD, BC, lateris CB ſecti.

### COROLLARIVM II.

*Demiſſâ rectâ linea perpendiculari ab angulo recto trianguli rectanguli ad oppoſitum ipſi angulo recto latus; quodlibet latus huius trianguli circa rectum angulum, eſt medium proportionale inter totum latus ſectum, & eius ſegmentum inter perpendicularem dictam, & latus aſſumptum.*

Fig.143. Sequitur enim ex demonſtrationis diſcurſu & citata prop.4.lib.huius, eſſe ſegmentum CD ad latus CA, vt latus CA ad totum latus CB ſectum: Tùm eſſe ſegmentum DB ad latus BA, vt latus BA ad totum latus CB ſectum. quare manifeſtum eſt corollarium hoc ſecundum.

## PROPOSITIO IX.

### A data rectalinea imperatam partem auferre.

Fig.144 Svppoſitio. Ex recta AB ſit auferenda quarta pars: & ſic de aliis quibuſcumque partibus aliquotis.

Conſtructio. Ad vnum extremum A, datæ rectæ AB, ducatur recta linea AE longiſſima, angulum efficiens in A quemcumque cum data recta AB: & per 3.propoſ.lib.1.ſumantur ex ducta recta linea quatuor partes æquales AC, CG, GF, FE, conſequentes ſe mutuò & immediatè; Tùm ductæ rectæ EB, per prop.31. libr. 1. ponatur recta CD parallela ipſi EB, ab extremo C primæ partis AC ſumptæ: Aſſero rectam AD eſſe partem quartam datæ rectæ AB.

Demonſtratio. Quia in triangulo EAB, ducta eſt recta CD, parallela lateri EB, erit per 2.prop.lib. huius. AC ad CE, vt AD ad DB; & iuxta coroll.noſtrum 2. prop.18. lib. 5. per compoſitionem rationis contrariam, erit AC ad ACE, vt AD ad ADB: ſed per conſtructionem eſt AC ſubquadrupla rectæ ACE, ergo etiam recta AD erit ſubquadrupla vel quarta pars rectæ AB datæ. Sumpſimus ergo quartam partem AD, datæ rectæ AB, ſicut fuit imperatum.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*A data recta linea partes imperatas demere.*

AB longiſſima recta AE faciente angulum in A cum data AB recta, ſumantur per propoſ.3. libr. 1. conſequenter ab A, partes denominatoris dati; v. g. ſint auferendæ tres quartæ ab recta AB, ſumam ab angulo A de recta AE partes quatuor, AC, CG, GF, FE, & ab extremo E vltimæ ad aliud extremum B datæ rectæ ducam rectam EB; & ab extremo F tertiæ partis tranſmittam per prop.31.lib.1. rectam FH parallelam ipſi EB: tunc recta AH continebit tres quartas totius datæ AB, vt recta AF continebat tres quartas alterius AE, per demonſtrationem allatam in hac propoſitione.

## PROPOSITIO X.

### Datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, vt data altera recta ſecta fuerit.

Svppoſitio. Secanda ſit recta AB, vt ſecta eſt AE, in C, F.

Conſtructio. Ad extremum A vnum datæ rectæ AB ſecandæ, duco longiſſimam rectam AE efficientem angulum in A cum data AB; & per prop.3.libr.1. ſumo rectam AC æqualem ipſi AC ex recta ducta longiſſima, tùm aliam partem CF æqualem ipſi CF, & rectam FE æqualem ipſi FE; & ſic de reliquis ſi adeſſent. Præterea extremum E ductæ & datæ AB extremum B, connecto recta linea EB: denique ex punctis F & C, ductæ rectæ AE, duco rectas lineas FH, CD, parallelas ipſi EB, per prop.31. libr. 1. quæ erunt per prop. 30.libr.eiuſdem, erunt inter ſe parallelæ; & reſultabunt triangula EBA, FHA, CDA. Aſſero autem rectam datam AB, ſectam eſſe ſimiliter in H & D, ſicuti ſecta eſt data AE in C & F. Fig.144.

Demonſtratio. Per 2.propoſ.lib.huius erit AD ad DB, vt AC ad CE, & componendo per prop.18. lib.5. erit AB ad DB, vt AE ad CE: tùm per 2.citat.erit AD ad DH vt AC

ad

ad CF: tùm per eandem 2. erit AH ad HB, vt AF ad FE, & componendo per 18.cit.erit AB ad HB, vt AE ad FE. Fecimus ergo imperatum.

## PROPOSITIO XI.

### Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenire.

*Fig.145.* SVppoſitio. Duabus datis AB & BC rectis, ſit reperienda tertia proportionalis.

Conſtructio. De recta longiſſima AD, reſecetur per 3.propoſ.libr.1.recta AB, æqualis datæ AB primæ, & per propoſ.11. libr.1. ad punctum B huius longiſſimæ rectæ excitetur recta perpendiculares de qua capiatur recta BC æqualis datæ BC, & recta ducatur AC, quæ efficiet triangulum rectangulum ABC. Præthereà ad punctum C, fiat per propoſ.23. libr.1.angulus BCD æqualis angulo A; recta CD ſecabit in D producta rectam AB longiſſimam primò ductam; nam per 27. libr.1. duo anguli A & B, trianguli ABC, ſunt minores duobus rectis; ergo etiam anguli duo B rectus, & BCD æqualis angulo A, erunt minores duobus rectis, cùm anguli in B ſint recti per conſtructionem; igitur per 13. axio. libr.1.concurrent in D rectæ CD & AB; reſultabit autem aliud triangulum rectangulum CBD, tùm aliud totale ACD, quod probo eſſe triangulum rectangulum ob angulum rectum ACD oſtendendum. Per propoſ. 32. libr.1. tres anguli trianguli ABC ſunt æquales duobus rectis, vnuſque eſt in B rectus per conſtructionem, ergo reliqui duo A & ACB, erunt æquales vni recto; ergo angulus ACD totalis complectens angulum ACB, & angulum BCD æqualem angulo A per conſtructionem erit rectus: Igitur babemus in triangulo rectangulo ACD, rectam lineam CB deductam ab angulo recto ACD, perpendicularem ad oppoſitam baſim ABC. Ex his aſſero rectam BD eſſe tertiam proportionalem quæſitam datis duabus AB, BC.

Demonſtratio. Per corollar.1.prop.8. libr. huius, recta BC eſt media proportionalis inter duas AB & BD; erit igitur AB ad BC, vt BC ad BD: recta ergo BD eſt tertia proportionalis inuenta. Sicuti proponebatur.

## PROPOSITIO XII.

### Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

SVppoſitio. Tres ſint datæ rectæ lineæ AF, FE, AH, oporteatque quartam proportionalem reperire. *Fig.144.*

Conſtructio. Ex vna rectà longiſſima ſumantur conſecutiuè per 3.propoſ. libr.1.duæ partes AF, FE, æquales datis duabus primis rectis AF, FE; & ex puncto A ducatur alia longiſſima linea AB angulum efficiens cum alia AFE; Prætereà per 3.cit.prop. libr.1.dematur recta AH ex iſta longiſſima ducta, æqualis datæ tertiæ AH; & coniugentur puncta, F,H, rectarum ductarum, recta linea FH, & huic parallela recta ducatur EB, ex puncto B ductæ rectæ, per propoſ.31.libr.1. quæ recta EB ſecabit rectam AB in B, per coroll. 1. noſtrum ad propoſ.42. lib.1. Aſſero autem rectam HB eſſe quartam proportionalem quæſitam, ita vt AF ad FE, vt AH ad HB.

Demonſtratio, ſi ita non ſit vti aſſeruimus, cùm recta FH ſit parallela lateri EB, trianguli EAB, non erunt latera AE, AB, reliqua trianguli prædicti EAB, ſecta proportionaliter, contra prop.2.libr. huius. hoc abſurdum manifeſtam reddit falſitatem poſitionis contradicentis noſtræ aſſertioni, quæ ideò ſtabilita remanebit. Fecimus ergo imperatum.

## PROPOSITIO XIII.

### Datis duabus rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

SVppoſitio. Duæ ſint datæ rectæ lineæ CD prima, & DB tertia; oporteatque mediam proportionalem rectam reperire inter illas. *Fig.143.*

Conſtructio de longiſſima recta linea ſumendæ erunt partes duæ conſequentes, per 3.prop.libr.1.æquales datis duabus CD, DB, ſintque ipſæ ſumptæ CD, DB aliæ æquales ipſis eodem ordine vt datæ ſunt: Tùm tota recta CDB, bifariàm in E ſecanda per prop. 10.libr.1.& ab puncto E veluti centro, interuallo rectæ EC, decircinanda ſemicircumferentia circuli quæ tranſibit etiam per B aliud extremum totius CEB, per ax.25.libr.1. Denique per prop. 11. libr.1.ex puncto D rectæ CDB, excitetur perpendicularis recta DA, ipſi CDB, ſecans in A circumferentiam fa-

ctam circuli: & rectæ lineæ ducantur AC, AD; reſultabit triangulum CAB rectangulum, ob angulum rectum CAB in ſemicirculo per pro.31.lib.3. Aſſero autem rectam DA eſſe mediam proportionemınter datas CD, DB.

Demonſtratio. Si recta AD non ſit media proportionalis inter rectas CD, DB, falſum erit corollarium 1.propoſ.8.huius libri: hoc vero abſurdum, ergo recta DA, erit media proportionalis inter duas datas CD, DB, quod erat aſſertum ac propoſitum faciendum.

## PROPOSITIO XIV.

Æqualium & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum; reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos.

Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circa æquales angulos; illa ſunt æqualia.

Fig.146. SVppoſitio. Parallelogrāma duo ABCD, BEFG habeant angulos ABC, EBG æquales: Aſſero primò habere reciproca latera circa hos æquales angulos, hoc eſt eſſe AB ad BG, vt EB ad BC. Quod ſi dicta parallelogramma ABCD, BEFG, circa æquales angulos ABC, EBG, latera habeant reciproca, id eſt ſit AB ad BG, ſicut EB ad BC: Aſſero ſecundo loco, ipſa parallelogramma eſſe æqualia.

Conſtructio. Parallelogramma data ita componantur vt recta AB & recta BG latera illorum diuerſa, vnum vnius, alterum alterius parallelogrammorum circa æquales angulos datos ABC, EBC, vnam componant rectam lineam ABG; rectæ aliæ duæ lineæ ſeu latera illorum reliqua EB, BC, circa eoſdem datos angulos æquales, vnicam etiam efficient rectam EBC, quod ſic probatur: nam illis angulis æqualibus EBG, ABC, ſi addatur communis angulus ABE, fient duo anguli ABE, EBG, æquales aliis duobus angulis ABE, ABC, ſed duo primi anguli ABE, EBG, ſunt per prop.13.lib.1.æquales duobus rectis, ergo per 1.ax.libr.1.etiam reliqui duo anguli ABE, ABC, erunt æquales duobus rectis; ergo per propoſ.14.libr.1.duo latera ſeu duæ rectæ EB, BC, erunt in directum, ſeu vnicam efficient rectam lineam EBC. Producantur præterea latera DC, FG, illud vltra C, hoc vltra G, concurrent illa in H, per corollar.1. noſtrum ad prop.42.libr.1. quare etiam parallelogrammum tertium reſultabit BCHG, inter eaſdem parallelas cum parallelogrammo ABCD, & cum parallelogrammo EBGF: vnde per coroll. noſtrum 3.ad prop.1.libri huius, parallelogrammum AC, & parallelogrammum BH, inter ſe erunt vt baſes eorum AB, BG; ſimiliterque parallelogramma CG, BF, inter ſe erunt vt baſes eorum EB, EG.

Demonſtratio primæ partis huius propoſitionis vel primæ aſſertionis. non habeant ſi fieri poſſit latera reciproca, hoc eſt non ſit AB ad BG, ſicut EB ad BC. Cùm dentur parallelogramma AC, BF æqualia, eandem habebunt rationem ad parallelogrammum tertium BH, per 7.prop. libr.5. Sed oſtendimus in fine conſtructionis eſſe parallelogrammum AC ad parallelogrammum BH, vt baſes AB ad baſim BG; tùm eſſe parallelogrammum BF ad parallelogrammum BH, vt baſis EB ad baſim BC; ergo per 11.prop.libr.5.erit latus ſeu baſis AB ad latus ſeu baſim BG, ſicut latus EB vel baſis EB ad baſim ſeu latus BC, contra poſitionem aduerſarij negātis primam hanc partem ſeu aſſertionem: igitur verum erit quod propoſitum vel aſſertum fuit in hac prima parte.

Demonſtratio ſecundæ partis vel aſſertionis. Quandoquidem datur eſſe AB ad BG, ſicut EB ad BC; & per 1.prop. lib. huius ſit parallelogrammum AC ad parallelogrammum BH, vt AB ad BG, & ſit parallelogrammum BF ad parallelogrammum BH, vt EB ad BC; erit per prop.11.lib.5. parallelogrāmum AC ad parallelogrammum BH, vt parallelogrammum BF ad parallelogrammum BH; ergo per prop.9.lib.5. erunt æqualia parallelogramma AC, BF. quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM I.

### NOSTRVM.

*Si duo parallelogramma æquales angulos habentia ita componantur vt latus vnius in directum ponatur lateri alterius parallelogrammi, circa angulos æquales commune punctum habentes; reliqua latera illorum circa illos dictos angulos æquales, etiam in directum erunt.*

COROL-

### COROLLARIVM II. NOSTRVM.

*Si ad aliquam rectam lineam & ad eius punctum duæ rectæ lineæ ad partes diuerſas ducantur, angulos ad verticem æquales fecerint; ipſæ rectæ lineæ erunt in directum.*

Fig.146. PRimum fuit in conſtructione demonſtratum. Alterum eſt ferè idem: nam in figura huius propoſitionis, cùm ad rectam lineæ ABG punctum B, duæ rectæ BE, EC, ad partes diuerſas ductæ ſint, efficiantque angulos ABC, EBG, ex datis æquales ad verticem; & oſtenderimus in conſtructione rectas BC; BE, eſſe in directum, oſtenſum erit propoſitum in hoc ſecundo corollario.

## PROPOSITIO XV.

Æqualium & vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca ſunt latera quæ circum æquales angulos.

Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.

Fig.146. SVppoſitio. Æqualium ABC, EBG, triangulorum, æquales angulos in B, habentium, erunt reciproca latera circum æquales angulos B, id eſt, erit AB ad BG, vt EB ad BC. Et ſi eorundem triangulorum ABC, EBG, ſint reciproca latera circum æquales angulos B, id eſt ſit AB ad BG, vt EB ad BC; erunt ipſa triangula æqualia.

Conſtructio. Anguli æquales in B iuxta ſeinuicem componantur, ita vt vnum latus primi trianguli, putà AB, ſit in directum alterius lateris BG ſecundi trianguli; & per ea quæ diximus in lemmate primò ad lib. 2. perficiatur parallelogrammum ſub AB & BC, cùm aliud parallelogrammum ſub EB, BG; & producantur latera DC, FG, illud vltra C, hoc vltra G, concurrent in H, & latera EB, CB, erunt in directũ vti oſtendimus in conſtructione propoſitionis præcedentis: eritque parallelogrammum ABCD, duplum trianguli ABC, per 41. prop. libr. 1: Similiter parallelogrammum EFGB duplum erit trianguli EBG.

Demonſtratio primæ partis. Dantur æqualia triangula ABC, EBG, ergo eorum dupla, nempe parallelogramma AC, BF, erunt æqualia per 6. axio. libr. 1. ſed hæc parallelogramma cùm habeant angulos in B æquales, habebunt per 1. partem prop. præced. 14. latera reciproca, hoc eſt AB ad BG, vt EB ad BC, quæ ſunt latera datorum triangulorum: ergo etiam habebunt latera reciproca AB ad BG, ſicut EB ad BC, quemadmodum fuit in hac prima parte propoſitum.

Demonſtratio ſecundæ partis. Per ſecundam partem prop. 14. præcedentis, parallelogramma AC, BF, cùm habeant ex datis latera reciproca AB ad BG, vt EB ad BC, circum æquales angulos in B, ipſa erunt æqualia: Sed hæc latera reciproca ſunt etiam latera reciproca datorum triangulorum ABC, EBG, circum æquales angulos in B, & per propoſ. 41. lib. 1. illa triangula ſunt ſubdupla æqualium parallelogrammorum AC, BF, oſtenſorũ; ergo etiam ipſa triangula ABC, EBG, erunt æqualia per 7. ax. lib. 1. ſicuti fuit in hac ſecunda parte propoſitum.

## PROPOSITIO XVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum; æquale eſt ei quod ſub mediis comprehẽditur rectangulo.

Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei quod ſub mediis continetur rectangulo; illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SVppoſitio. Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB prima, BC ſecunda, BD tertia, BE quarta: Dico rectangulum AE ſub extremis prima AB, & BE quarta, eſſe æquale rectangulo BD ſub mediis hoc eſt ſub BC ſecunda, & BD tertia. Quod ſi rectangulum AE ſub extremis rectis AB, BE, fuerit æquale rectangulo BD ſub mediis BC, BD, Dico quatuor illas rectas AB, BC, BD, BE eſſe proportionales. Fig.147.

Con-

Conſtructio. fiat rectangulum A E ſub prima AB, & quarta BE, tum rectangulum aliud C D, ex ſecunda C B & tertia BD, per ea quæ diximus.

Demonſtratio primæ partis. Rectangula A E, C D, æquales habebunt angulos in B, rectos, per 12. axio. libr. 1. & eorum reciproca erunt latera circa angulos B æquales, videlicet A B ad B C, vt BD ad BE, per conſtructionem ipſam: ergo per 2. partem propoſit. 14. libri huius, æqualia erunt rectangula AE, CD, illud ſub extremis rectis AB, BE, iſtud ſub mediis BC, BD. quod erat demonſtrandum ac propoſitum in prima parte.

Demonſtratio ſecundæ partis. Dantur rectangula A E, C D, æqualia, illud ſub extremis datis rectis A B, B E, iſtud ſub ſecunda BC & tertia BD; & per conſtructionem ſunt æquales anguli in B, vtpote recti: ergo per 1. partem prop. 14. libri huius, reciproca erunt latera illorum circa æquales angulos in B; hoc eſt erit AB ad CB, vt BD ad BE: erunt ergo quatuor rectæ lineæ datæ proportionales, prima AB, ſecunda BC, tertia BD, quarta BE. quod erat concludendum in hac ſecunda parte.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Eiſdem poſitis quæ in prima parte propoſitionis parallelogrammum ſub extremis rectis lineis, erit æquale parallelogrammo æquiangulo alteri prædicto ſub mediis.*

*Et ſi ſub extremis comprehenſum parallelogrammum ſit æquale parallelogrammo ſub mediis æquiangulo alteri prædicto; illæ quatuor rectæ lineæ erunt proportionales.*

Fig. 147. ANguli enim in B æquales erunt ex datis; vnde demonſtratio ſuperior concludet intentum in hoc corollario noſtro.

## PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ ſint proportioproportionales; quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod à media deſcribitur quadrato.

Et ſi ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale ſit ei quòd à media deſcribitur quadrato; illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

SVppoſitio. Sint tres rectæ lineæ AB prima, BC media, BE tertia, proportionales: Fig. 148. Dico rectãgulum AE ſub extremis AB, BE, æquale eſſe quadrato ſub media BC. Quod ſi rectangulum AE ſub extremis AB, BE, ſit æquale quadrato ſub media BC: dico tres illas rectas AB, BC, BE, eſſe proportionales ordine prædicto.

Conſtructio. Concipiatur recta alia BD æqualis mediæ BC, & rectangulum factum AE ſub extremis A B, B E, & rectangulum CD ſub mediis duabus BC, BD, æqualibus, quod erat quadratum rectæ BC datæ mediæ per coroll. noſtrum 2. ad propoſ. 46. lib. 1. Eruntq; quatuor rectæ lineæ AB, BC, BD, BE, proportionales eodem ordine, quandoquidem duæ æquales BC, BD, eandem habeant rationem ad BE per 7. prop. lib. 5.

Demonſtratio primæ partis, quia habemus quatuor rectas proportionales AB, BC, BD, BE, erit rectangulum AE ſub extremis AB, B E, æquale rectangulo CD ſub mediis BC, BD, hoc eſt quadrato mediæ BC datæ, per 1. partem prop. præcedentis 16.

Demonſtratio ſecundæ partis. Quia datur rectangulum A E ſub extremis AB, BE, æquale rectangulo CD ſub mediis BC, BD, hoc eſt quadrato mediæ BC; erunt per 2. partem prop. 16. præcedentis, quatuor rectæ lineæ proportionales hoc ordine AB, BC, BD, BE; ſed ſecundæ BC poſuimus æqualem tertiam BD, & per propoſ. 7. libr. 1. æquales ad eandem BE habente eandem rationem; ergo tres rectæ lineæ AB prima, BC ſecunda, BE tertia erunt proportionales, quod erat in hac ſecunda parte propoſitum demonſtrandum.

COROLLARIVM.

*Qualibet recta linea, quæ eſt latus quadrati æqualis rectangulo ſub duabus rectis; eſt media proportionalis inter illas rectas.*

HOc corollarium ſequitur ex demonſtratis in ſecunda parte huius propoſitionis.

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales; rhombus ſub media æqualis erit parallelogrammo ſub extremis æquiangulo ipſi rhombo.*

*Et ſi fuerit rhombus æqualis parallelogrammo æquiangulo ipſi rhombo; tres rectæ lineæ erunt proportionales, media latus rhombi, extrema alia duo latera parallelogrammi circa vnum angulum.*

Hoc

HOc corollarium noſtrum primum. Manifeſtum eſt ex corollario noſtro propoſitionis præcedentis 16, & ex demonſtratis in hac propoſitione, & ex natura rhombi æquilateri quidem ſed non rectanguli.

COROLLARIVM NOSTRVM

I I.

*Qualibet recta linea qua eſt latus rhombi æqualis parallelogrammo æquiangulo ipſi rhombo ſub duabus alijs rectis, eſt media proportionalis inter illas rectas.*

EXplicatio huius noſtri corollarij dependet ex corollario huius propoſitionis, & corollario noſtro primo præcedente.

## PROPOSITIO XVIII.

### Super data recta linea, dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere.

Fig.149. SVppoſitio. Super data recta linea E F, deſcribendum ſit rectilineum AIGH, ſimile rectilineo dato A B C D, ſimiliterque poſitum iuxta definitionem vltimam libri huius.

Conſtructio. Producto latere AB rectilinei dati vltra B, electo pro ſimili poſitione reſpectu alterius datæ rectæ E F, ſi maior ſit quam latus AB, quod ſi ſit minor quàm latus A B, non erit opus producere latus AB vltra B. Simili ratione producatur aliud latus AD vltra D, & rectæ ducendæ ex angulo A ad reliquos angulos rectilinei dati, v.g. AC, ſi EF data recta ſit maior quam latus AB: quod ſi fuerit minor, non erit opus producere latus AD, nec rectas eductas ab angulo A ad angulos reliquos rectilinei dati. Præterea ex latere AB per 3. prop. lib. 1. reſecetur portio AI æqualis rectæ datæ EF; & per propoſ. 31. libr. 1. ex I puncto ducatur recta IG parallela lateri BC rectilinei dati, quæ ſecabit rectam AC in G per coroll. noſtrum 1. ad propoſ. 42. libr. 1. tùm ex G puncto ducatur altera recta GH parallela lateri CD rectilinei dati, quæ etiam ex dictis ſecabit latus AD in H. Dico rectilineum AIGH eſſe deſcriptum ſupra rectam EF, vel ipſi æqualem ſimile dato rectilineo ABCD, ſimiliterque poſitum.

Demonſtratio. Quia per conſtructionem ſunt parallelæ rectæ lineæ BC, IG, erunt per coroll. propoſ. 4. libr. huius triangula ſimilia BAC, IAG, quare per 1. def. libri huius, erit AB ad BC, ſicut AI ad IG; & BC ad CA, vt IG ad GA. Simili diſcurſu quia rectæ GH, CD, ſunt parallelæ, erunt triangula CAD, GAH ſimilia per corollar. prop. 4. libr huius, vnde per defin. 1. erit AC ad CD, vt AG ad GH; & CD ad DA, vt GH ad HA: quare ex æquo per propoſ. 22. lib. 5. erit BA ad BD, vt IA ad AH: ergo per prop. 16. libr. 5. viciſſim erit BA ad IA, vt DA ad HA; & per propoſ. 17. libr. eiuſdem, erit per diuiſionem rationis BI ad IA, vt DH ad HA: erunt igitur latera AD, AB trianguli DAB, diuiſa proportionaliter in H & I; quare per 2. propoſitionem huius libri, rectæ lineæ ducédæ DB, HI, erunt parallelæ, ideoque anguli ADB, AHI, erunt æquales per prop. 29. libr. 1. tùm etiam alij anguli ABD, AIH, erunt æquales: Quod ſi illos primos ademerimus ex æqualibus angulis ADC, AHC per eandem prop. 29. citat. an non relinquentur anguli æquales CDB, GHI? per 3. ax. libr. 1. Et ſi illos ſecundos ſuſtulerimus ab æqualibus angulis ABC, AIG per cit. prop. 29. remanebunt anguli æquales CBD, GIH. Denique ſi angulos æquales ACD, AGH, per cit. prop. 29. addiderimus æqualibus angulis ACB, AGI, per eandem prop. 29. an non fient æquales anguli BCD, IGH; ideoque æquiangula erunt triangula BCD, IGH, & per 4. prop. lib. huius erit BC ad CD, vt IG ad GH. Cùm ergo oſtenderimus rectilineum poſitum AIGH, habere omnes angulos æquales rectilinei dati ABCD angulis reſpectiuè, & circa æquales illos angulos latera proportionalia lateribus rectilinei dati, erit iuxta def. 1. libri huius ſimile illi. Denique cum oſtenderimus ſuper data recta EF, vel æquali illi AI, conſtitutos eſſe angulos æquales angulis conſtitutis ſuper latere electo AB rectilinei dati; & tam reliquos angulos æquales, quam latera proportionalia in vtroque rectilineo dato & facto, continuo ordine ſe mutuo ſubſequi, rectilineum factum ſimiliter poſitum erit dato rectilineo per defin. vltimam huius libri. Fecimus ergo imperatum.

## PROPOSITIO XIX.

### Similia triangula, inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SVppoſitio. Similia ſint duo triangula ABC, DEF: Dico eandem habere inter ſe rationem, quam habet latus homologum vnius Fig.150.

vnius ex illis triãgulis ad tertiã proportionalem lineam, medio poſito alterius ex illis triangulis latere etiam homologo : hoc eſt ſumptis BC, E F, latcribus homologis datorum triangulorum ſimilium ABC, DEF, & inuenta recta tertia linea proportionali B G per propoſ. 11. huius libri; ita eſſe triangulum A B C ad triangulum DEF, vt latus BC ad tertiam proportionalem rectam lineam BG. Quod latus BC cùm haebat ad tertiam BG proportionalem rectam lineam, rationem duplicatam ex def. 10. libr. 5. ideò etiam triangulum ABC ſuper prima recta BC conſtitutum obtinere dicitur rationem duplicatam ad triangulum ſimile ſimiliterq́ue poſitum ſupra ſecundam rectam E F; & propterea eandem rationem hæc duo triangula babere dicuntur, quàm prima recta AB ad tertiam BG. Quæ explicatio etiam conuenit omnibus figuris rectilineis multilateris ſimilibus ſimiliterq́ue poſitis.

Duos caſus habet hæc propoſitio, Primùm quando latera homologa BC, EF, ſunt æqualia inter ſe. Alterum quando ſunt inæqualia.

Demonſtratio primi caſus. Concipiatur bis recta EF, Cumq́ue quatuor habeamus rectas proportionales BC primam, EF, ſecundam, EF tertiam, BG quartam, primaq́ue BC ponatur æqualis ſecundæ E F, erit & tertia EF æqualis quartæ BG, iuxta coroll. noſtrum 2. ad propoſ. 14. libr. 5. Cumque prima BC, & vltima BG ſint æquales eidem rectæ EF, erũt prima BC & vltima BG æquales inter ſe per 1. ax. libr. 1. & omnes inter ſe æquales. Quare cùm eadem ſit ſecunda & tertia proportionalis recta E F, ſi fuerint tres rectæ proportionales BC, EF, BG, ſi prima fuerit æqualis ſecundæ EF, erit & ſecuuda EF æqualis tertiæ BG, & per 1. axio. lib. 1. prima etiam BC æqualis tertiæ BG & omnes tres æquales BC, EF, BG. Iam vero cùm tres rectas BC, EF, BG proportionales habeamus, prima BC ad tertiam BG obtinebit proportionem duplicatam, iuxta defin. 10. libr. 5. & quidem in genere & ſpecie æqualitatis in hoc caſu, quia oſtendimus illas tres rectas æquales eſſe: Cumq́ue in hiſce duobus triangulis ſimilibus dentur anguli B, C, æquales angulis E, F, vterque vtrique, & latera æqualia homologa BC, EF, erunt per propoſ. 26. lib. 1. ipſa data triangula ſimilia ABC, DEF, æqualia, hoc eſt habebunt inter ſe rationem æqualitatis, quam oſtendimus habere primam rectam BC ad tertiam BG. Demonſtratus igitur remanet primus iſte caſus.

*Fig. 151.* Conſtructio pro demonſtratione ſecundi caſus. Inuentâ recta linea tertia BG proportionali, datis duobus inæqualibus lateribus homologiis BG, EF, per 11. prop. lib. huius; quæ tertia BG proportionalis erit minor quam prima BC, Si prima BC detur maiot ſecunda EF; nam ſi concipiatur tertia EF eadem quæ ſecunda, erit tertia BG quarta, ergo per coroll. noſtrum 2. ad prop. 14. lib. 5. tertia EF maior erit quarta BG, hoc eſt ſecunda EF maior erit tertia BG; ergo multo maior erit prima BC, tertiâ BG. Igitur per 3. prop. lib. 1. accipiemus partem BG ex maiore BC, æqualem ipſi BG tertiæ proportionali : & ducendo rectam AG, totum triangulum BAC, erit eiuſdem altitudinis cum triãgulo BAG, per coroll. noſtrum 2. ad propoſ. 1. libri huius; eritq́ue triangulum B A C ad triangulum BAG, vt latus BC ad latus BG, per cit. prop. 1. libri huius.

Demonſtratio huius ſecundi caſus. Quandoquidem dantur triangula ABC, DEF ſimilia, ſimiliterq́ue poſita ſupra latera homologa BC, EF, erit per def. 1. libri huius, AB ad BC, vt DE ad EF: & viciſſim per propoſ. 16. lib. 5. AB ad DE, vt BC ad EF: eſt autem per naturam trium proportionalium vt BC ad EF, ita EF ad BG; ergo per prop. 11. lib. 5. erit AB ad DE, vt EF ad BG: Cùm igitur in triangulis A B G, DEF, hahentibus vnum angulum B æqualem angulo E, ex datis, ſint latera oſtenſa reciproca circa illos, ipſa erunt æqualia triangula ABG, DEF, per prop. 15. libri huius : oſtendimus autem in conſtructione eſſe triangulum BAC ad triangulum BAG, vt latera BC ad latus BG, ſed latus BC eſt prima recta proportionalis & latus ſeu recta BG eſt tertia proportionalis, ergo triangulum BAC, ad triangulum BAG ſe habebit vt prima BC proportionalis ad tertiam BG: ſed paulo ante demonſtrauimus triangula BAG, DEF, eſſe æqualia; ergo per 7. propoſ. libr. 5. triangulum BAC habebit ad triangula illa BAG, DEF, eandem rationem; ſed ratio trianguli BAC ad triangulum BAG oſtenſa eſt eadem quæ primæ rectæ BC proportionalis ad tertiam BG; ergo per propoſ. 11. libr. 5. erit eadem ratio trianguli BAC ad triangulum DÊF, quæ primæ proportionalis BC ad tertiam BG: Deniquequia ratio primæ rectæ proportionalis ad tertiam eſt duplicata per def. cit. 10. libr. 5. ideò etiam ratio trianguli BAC ad triangulum EDF ſimile, habebit rationem duplicatam ſuorum laterum homologorum BC, EF, hoc eſt vti initio diximus, habebit triangulum ABC ad triangulum DEF ſimile, vti latus BC ſeu prima recta proportionalis ad tertiam BG, interpoſita media EF quæ eſt latus homologum alterius trianguli dati DEF. quæ omnia erant declaranda & confirmanda ratione.

COROL-

## COROLLARIVM.

*Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint: erit triangulum ſupra primam deſcriptum, ad triangulum ſupra ſecundam ſimile ſimiliterq́; illi poſitum, vt eſt prima ad tertiam ex illis tribus proportionalibus.*

HOc corollarium fuit in demonſtrationibus allatis probatum. Eſt enim eadem ferè propoſitio; niſi quod proponatur ſub duplicata ratione laterum homologorum, quæ eſt dum duobus ſumptis lateribus homologis, tertia recta proportionalis inuenitur per prop.11.libri huius; & refertur prima ad tertiam, inter quas duæ intercedunt rationes eædem & quæ inter primam & ſecundam. Porrò ratio quæ eſt inter primam ac tertiam, eſt inter triangulum ſupra primam deſcriptum ad triangulum ſupra ſecundam ſimile ſimiliterq́ue poſitum, vti probatum eſt.

## COROLLARIVM I.

## NOSTRVM.

*Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, & prima fuerit æqualis ſecundæ, erit tertia æqualis prima tum etiam ſecundæ, denique tres illæ æquales inter ſe.*

## COROLLARIVM II.

## NOSTRVM.

*Si fuerint quatuor rectæ lineæ proportionales, & ſecunda ac tertia æquales, & prima æqualis ſecundæ; erit & quarta æqualis primæ, & omnes æquales inter ſe.*

## COROLLARIVM III.

## NOSTRVM.

*Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, & prima maior quàm ſecunda, erit & ſecunda maior quam tertia, & prima maior tertia.*

DVo prima corollaria demonſtrata ſunt in demonſtratione primi caſus: Tertium in conſtructione demonſtratione ſecundi caſus. Sed age demonſtramus hoc quod proponemus tamquam

## COROLLARIVM IV.

## NOSTRVM.

*Si fuerint tres rectæ proportionales & prima minor quàm ſecunda, erit & ſecunda minor quàm tertia, & prima minor quàm tertia, & inæquales inter ſe.*

SI ſecunda bis ſumatur, erunt quatuor rectæ proportionales, & media erit ſecunda & tertia, è tribus erit quarta; Igitur cùm detur prima minor quàm ſecunda, erit per coroll. noſtrum 2. propoſ.14.libr.5. tertia quæ erat media ſeu ſecunda è tribus, minor quàm quarta è quatuor, vel minor quàm ſecunda è tribus, ideoque prima multo minor quàm tertia ſeu vltima: vnde & inæquales inter ſe. illæ tres rectæ proportionales.

## COROLLARIVM V.

## NOSTRVM.

*Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, erit triangulum ſupra ſecundam ad triangulum ſupra tertiam ſimile ſimiliterq́; deſcriptum, vt eſt prima linea ad tertiam.*

DAtis tribus rectis cùm prima ad ſecundam habeat eandem rationem quam ſecunda ad tertiam; & prima ad tertiam habeat rationem duplicatam primæ ad ſecundam, per def.10.lib.5. ergo ſecunda ad tertiam habebit rationem duplicatam primæ ad ſecundam. Sed per prop.iſtam 19. triangula ſimilia ſimiliterq́ue conſtituta ſupra primam & ſecundam ſunt ſicut prima ad tertiam, ergo etiam conſtituta eodem modo ſupra ſecundam ac tertiam erunt ſicut prima ac tertiam.

## COROLLARIVM NOSTRVM VI.

*Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, & prima æqualis tertiæ; erit & ſecunda ſeu media æqualis tàm primæ quàm tertiæ; hoc eſt tres illæ erunt æquales inter ſe.*

REctangulum enim ſub extremis æqualibus erit quadratum, quod erit æquale quadrato rectæ mediæ per prop.17.lib.huius; & quia per noſtr.coroll. ad propoſ.46.libr.1. quadrata æqualia habent latera æqualia, media rectalinea erit æqualis tàm primæ, quàm tertiæ, ideoq; per 1.ax. lib.1.æquales inter ſe.

## COROLLARIVM NOSTRVM VII.

*Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, & prima maior quàm tertia; erit & ſecunda maior quam tertia: & prima maior quàm ſecunda, treſq; erunt inæquales.*

QVandoquidem eſt prima ad ſecundam, vt ſecunda ad tertiam, erit iuxta coroll. propoſ. 4. libr. inuertendo vt ſecunda ad primam, ita tertia ad ſecundam: ergo ſi ſecunda non ſit maior quam tertia, erit vel illi æqualis vel minor; quare iuxta prop. 14. lib. 5. erit prima æqualis vel minor tertia, cõtra datum, quod eſt abſurdum, falſa igitur iſta poſitio, & prima aſſertionis vera. Iam verò ſi non ſit prima maior quàm ſecunda, ſit illi æqualis vel minor; ſi primùm, erit per corollar. noſtr. 1. prima æqualis tertiæ, quod deſtruit datum; ſi ſecundum erit per coroll. noſtr. 4. erit prima minor quàm tertia. quod eſt abſurdum: falſa igitur erit poſitio contradicens ſecundæ parti huius coroll. Relinquitur ergo vt cùm prima ſit oſtenſa maior quam ſecnnda, & ſecunda maior quàm tertia, deturque prima maior tertia, ſint tres datæ rectæ inæquales. quod erat poſtremum demonſtrandum.

## COROLLARIVM NOSTRVM VIII.

*Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, & prima minor quàm tertia; erit & ſecunda minor quàm tertia, & prima minor quàm ſecunda, treſq; erunt inæquales.*

SI ſumantur tres datæ rectæ inuerſo ordine iuxta coroll. propoſ. 4. lib. 5. erit tertia ad ſecundam, vt ſecunda ad primam; & ſic ſumptæ, erit prima maior quàm tertia, hoc eſt vltima è primis datis maior quàm prima: ergo per coroll. præced. 7. erit ſecunda maior quàm tertia, & prima maior quàm ſecunda; treſque inæquales; ergo reſumptum vt prius datæ erant, ſecunda erit minor quàm tertia, & prima minor quàm ſecunda, treſque inæquales. quod erat oſtendendum.

## COROLLARIVM NOSTRVM IX.

*Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, & ſecunda maior quàm tertia; erit prima maior quàm ſecunda, & maior quàm tertia, treſq; inæquales.*

QVia eſt ſecunda ad tertiam, vt prima ad ſecundam, daturque ſecunda maior quàm tertia, erit per noſtr. corollar. 2. ad prop. 14. lib. 5. prima maior quàm ſecunda; ideoque per ax. lib. [illegible] multo maior quàm tertia; ideoque inæquales inter ſe.

## COROLLARIVM NOSTRVM X.

*Si fuerint tres trectæ lineæ proportionales, & ſecunda minor quàm tertia; erit & prima minor quàm ſecunda, & minor quàm tertia, treſq; inæquales.*

CVm enim ſit ſecunda ad tertiam, vt prima ad ſecundam, conſiderari poſſunt vt quatuor propoſitæ magnitudines proportionales; datur autem prima minor ſecunda ſub hoc ordine, ergo per noſtr. coroll. 2. ad prop. 14. libr. 5. tertia erit minor quarta; hoc eſt prima erit minor quàm ſecunda; & per 1. ax. libr. 1. erit prima multò minor quàm tertia: ideoque tres inæquales.

## COROLLARIVM NOSTRVM XI.

*Si fuerint quatuor rectæ lineæ continuè proportionales, duæq; ex illis qualibet æquales inter ſe; erunt omnes inter ſe æquales.*

SInt quatuor rectæ lineæ A.B.C.D. cõtinuè inter ſe proportionales, duæque ex illis quælibet æquales inter ſe; Dico omnes eſſe æquales inter ſe.

Aut enim prima A æqualis erit ſecundæ B, vel tertiæ C, vel quartæ D: Aut ſecunda B æqualis tertiæ C, vel quartæ D: Aut tertia C æqualis quartæ D.

Sit A prima æqualis ſecundæ B. Cùm ſit A ad B, vt B ad C, & detur A æqualis ipſi B; erunt per coroll. noſtr. 1. tres A, B, C, æquales inter ſe. Cumque ſit B ad C, vt C ad D, & B ſit æqualis oſtenſa ipſi C; erunt per idem corollar. cit. s. tres B, C, D, æquales: & per s. àx. lib. s. omnes æquales inter ſe.

Sit

Sit vero A prima æqualis tertiæ C. cùm ſint tres A,B,C, proportionales, & prima A æqualis tertiæ C; erunt per corollar. noſtr. 6. omnes æquales inter ſe. Cumque ſit B ad C, vt C ad D, & prima B ſit æqualis oſtenſa ſecundæ C; erunt per coroll. noſtr. 1. æquales inter ſe: ideoque per 1. ax. lib. 1. quatuor datæ æquales inter ſe.

Sit vero A prima æqualis D quartæ. Cùm per def. 10. lib. 5. ſit prima ad vltimam in triplicata ratione primæ ad ſecundam, deturque proportio æqualitatis primæ A ad quartam D, erit eadem proportio æqualitatis primæ ad ſecundam: quare prima & ſecunda erunt æquales; ideoque per 1. partem huius erunt omnes quatuor A.B.C.D. æquales inter ſe.

Sit vero ſecunda B æqualis tertiæ C: erit per coroll. noſtr. 2. prima A, & ſecunda B, & tertia C, æquales inter ſe: cumque ſit etiam B ad C, vt C ad D; erunt per coroll. noſtr. 1. æquales inter ſe, tres iſtæ B,C,D; & per 1. ax. lib. 1. omnes æquales inter ſe datæ quatuor.

Sit etiam ſecunda B æqualis quartæ D; cùm ſit B ad C, vt C ad D, & dentur B & D æquales; erunt per coroll. noſtram 6. æquales omnes inter ſe. Cumque ſit A ad B, vt B ad C, & B & C ſunt æquales oſtenſæ; erunt A,B, C, æquales; ideoque per 1. axio. libr. 1. erunt quatuor datæ æquales inter ſe.

Sint denique C & D æquales. Cùm ſit B ad C, vt C ad D, denturque C & D æquales; erunt B,C,D, æquales inter ſe, per coroll. 2. noſtrum. Sed etiam eſt A ad B, vt B ad C, ergo cùm B & C, ſint æquales oſtenſæ, erunt per idem coroll. cit. 2, tres A,B,C, æquales: & per 1. axio. æquales inter ſe datæ quatuor. Demonſtrauimus ergo propoſitum.

## COROLLARIVM NOSTRVM XII.

***Si fuerint quatuor rectæ lineæ continuè proportionales, duaq; ex illis quælibet inæquales; omnes erunt inæquales inter ſe, in continua proportionis maioris inæqualitatis, vel minoris inæqualitatis.***

AVt enim prima erit maior quàm ſecunda, vel quàm tertia, vel quàm quarta: Aut ſecunda maior quàm tertia, vel quàm quarta: aut tertia maior quàm quarta. Datæque ſint A. B. C. D. continuè proportionales.

Sit prima maior ſecunda. Cùm ſit A ad B, vt B ad C, & A maior quàm B; erit per corol. noſtr. 3. ſecunda maior quam tertia, & prima maior quàm tertia, omneſque inæquales ideoque in continua proportione maioris inæqualitatis: Cumque ſit B ad C, vt C ad D, & prima ſit maior oſtenſa quam ſecunda; erit per citat. corollar. ſecunda maior quam tertia, & prima maior quàm tertia, omneſque inæquales; ideoque in continua proportione maioris inæqualitatis: quare demonſtrauerimus intentum in hoc caſu.

Sit prima maior quàm tertia, hoc eſt A maior quàm C; tunc cùm ſit A ad B vt B ad C, erit per corollar. noſtr. 7. A maior quàm B, & B maior quàm C; ideoq; inæquales in continua proportione inæqualitatis maioris. cumque etiam ſit B ad C, vt C ad D, & B oſtenſa ſit maior quàm C, erit corollar. noſtrum 3. erit C maior quàm D; ideoque inæquales; & in continua proportione maioris inæqualitatis omnes quatuor.

Sit prima A maior quàm D quarta: Cùm dentur quatuor continuè proportionales A, B,C,D, erit per. defin. 10. lib. 5. A ad D in ratione triplicata A ad B, ſed datur ratio A ad D maioris inæqualitatis, ergo etiam ratio A ad B, erit maioris inæqualitatis, maior ergo erit A quàm B; ergo per 1. partem oſtenſam, omnes erunt inæquales in continua proportione maioris inæqualitatis.

Sit ſecunda B maior quàm tertia C. Cùm ſit A ad B, vt B ad C, & detur B maior quàm C; erit per coroll. noſtrum 9. prima A maior quàm B, & quàm C: cumque ſit B ad C, vt C ad D, deturque B maior quàm C; erit per coroll. noſtr. 3, C maior quàm D: ideoque omnes inæquales in continua proportione maioris inæqualitatis.

Sit ſecunda B maior quàm quarta D. Cùm ſit B ad C, vt C ad D, deturq; B maior quàm D; erit per coroll. noſtr. 7. B maior quàm C, & C maior quàm D. Cumque ſit A ad B vt B ad C, & B maior quàm C detur; erit per coroll. noſtrum 7. A maior quàm B: ideoque erunt omnes inæquales, in continua proportione maioris inæqualitatis.

Sit tertia C maior quàm D quarta. Cùm ſit B ad C, vt C ad D, deturq; C maior quàm D; erit per 9. coroll. noſtr. B maior quàm C, & quàm D. Cumque ſit A ad B, vt B ad C, oſtenſaque ſit B maior quàm C, erit per citat. corollar. 9. A maior quàm B: oſtenderimus ergo eſſe omnes inæquales in continua proportione maioris inæqualitatis.

Aut erit prima minor quàm ſecunda, vel quàm tertia, vel quàm quarta: Aut ſecunda minor quàm tertia, vel quàm quarta: Aut tertia minor quàm quarta.

Sit A minor quàm B, cùm ſit A ad B vt B ad C; erit per noſtr. coroll. 4. B minor quàm C: Cumque ſit B ad C, vt C ad D; erit per idem coroll. 4. C minor quàm D: oſtenderimus

mus ergo eas eſſe inæquales in continua proportione minoris inæqualitatis.

Sit A minor quàm C: Cumque ſit A ad B vt B ad C; erit per corollar.noſtr.8. A minor quàm B, & B quàm C minor: Cumque ſit B ad C, vt C ad D; erit per corollar.noſtr.8.C minor quàm D:oſtenderimus ergo eas eſſe inæquales in continua proportione minoris inæqualitatis.

Sit A minor quàm D. erit per def. in libr. 5.ratio A ad D triplicata rationis A ad B, ſed datur ratio A ad D minoris inæqualitatis, ergo erit ratio A ad B, minoris inæqualitatis, ergo A minor erit quàm B, & ſic per 1. partem huius ſecundæ diuiſionis omnes inæquales erunt in continua proportione minoris inæqualitatis.

Sit B minor quàm C; Cumque ſit A ad B vt B ad C; erit per coroll.noſtr.10. A minor quàm B: Cumque ſit B ad C, vt C ad D, ſitque B minor quàm C;erit per coroll.noſtr.4. C minor quàm D,& ſic oſtenderimus omnes eſſe inæquales in continua proportione minoris inæqualitatis.

Sit B maior quàm D:Cumque ſit B ad C, vt C ad D;erit per corollar. noſtr.8.B minor quàm C,& C quàm D minor: Cumque ſit A ad B vt B ad C; erit per corollar. noſtr.4. A minor quàm B, & quàm C: oſtenderimus ergo omnes eſſe inæquales in continua proportione minoris inæqualitatis.

Sit denique C minor quàm D: cumque ſit B ad C,vt C ad D; erit per coroll.noſtr.10.B minor quàm C, & quàm D: Cumque etiam ſit A ad B vt B ad C; erit per cit. corollar. A minor quàm B. oſtenderimus ergo eſſe omnes inæquales in continua proportione minoris inæqualitatis.

Abunde ergo in omnibus caſibus demonſtratum erit hoc corollarium.

## PROPOSITIO XX.

Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis.

Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

*Fig.152.* SVppoſitio. Similia polygona ſiue multilatera rectilinea ABCDE, FGHIK, data ſint. Dico primò diuidi in triangula tot numero in vno quàm in alio. Secundò illa triangula eſſe ſimilia, vnum in vno multilatero, altero in alio, & ſic de aliis ſibi mutuò reſpondentibus. Tertiò quodlibet triangulum in vno multilatero reſpectu ſui trianguli reſpondentis illi in alio multilatero eſſe homologum, vt multilaterum ad multilaterum; hoc eſt eſſe vt multilaterum illud complectés ad multilaterum complectens aliud triangulum ſibi reſpondens. Quartò multilatera illa habere duplicatam rationem laterum ſuorum homologorum; hoc eſt poſitis CD, HI, lateribus homologis, & inuenta tertia proportionali per prop.11.lib.huius, eſſe multilaterum ABCDE ad multilaterum FGHIK; vt prima recta linea CD ad tertiam proportionalem inuentam, poſita ſecunda recta HI.

Conſtructio. Ex vno angulo BAE primi multilateri, deducantur ad angulos C,D, rectæ lineæ AC, AD, alios ad quos non exteoduntur latera AB, AE efficientia angulum BAE electum. Simili modo ex angulo GFK æquali angulo BAE, deducantur rectæ lineæ EH, EI, ad angulos multilateri ſecundi, H, I, alios ad quos nõ terminantur latera FG, FK, componentia angulum GFK prædictum. Et adnotetur quod ſimiles figuræ rectilineæ tot numero angulos & latera debeant obtinere; Cùm enim ex natura illarum propoſita in defin.1.huius libri, debeant eſſe proportionalia latera circa æquales illarum angulos; ſi in vna eſſent plura latera vel anguli, quàm in alia, non poſſent eſſe proportionalia latera circa illos æquales angulos, atque adeo non eſſent ſimiles figuræ illæ, contra ſuppoſitionem.

Demonſtratio primæ partis. Si reſolueretur multilaterum vnum in plura triangula, quàm aliud, ita vt baſes illorum ſint latera multilaterorum, plura latera haberet vnum multilaterum quàm aliud, atque adeo ex dictis in fine conſtructionis, non eſſent multilatera data ſimilia, contra ſuppoſitionem: igitur diuidentur in tot numero triangula, vti aſſertum eſt primò.

Demonſtratio ſecundæ partis. Duo triangula ABC, FGH, angulos obtineot æquales ex datis in B & G, lateraque obtinent circa illos proportionalia, ita vt ſit AB ad BC, vt FG ad GA; ergo per 6.prop.lib. huius, erunt æquiangula triangula ABC, FGH, & anguli BAC, GFH, æquales, & anguli alij BCA, GHF æquales. Conſimili diſcurſu & ex eiſdem principiis, quia triangula AED, FKI, obtinent angulos in E & K æquales ex datis, & latera circa illos proportionalia, ita vt ſit AE ad ED, vt FK ad KI; erunt dicta triangula AED, FKI, æquiãgula, & anguli EAD, KFI, æquales, tùm anguli EDA, KIF. Quod ſi ex æqualibus angulis BAE, GFK, demãtur anguli

anguli æquales oſtenſi, nimirum ex angulo BAE, anguli duo BAC, EAD; & ex angulo GFK, anguli duo GFH, KFI, relatiuè ad alios prædictos duos BAC, EAD; relinquentur per 3. axio. libr. 1. æquales anguli CAD, HFI. Si etiam ex angulis æqualibus datis ACD, GHI, demantur æquales anguli oſtenſi BCA, GHF, remanebũt anguli ACD, FHI æquales. Denique ſi ex angulis æqualibus CDE, HIK datis, tollantur anguli oſtenſi æquales EDA, KIF, reſidui erunt anguli æquales ACD, FIH; Æquiangula ergo erunt triangula CAD, HFI: igitur per 4. propoſ. lib. huius illorum omnium duorum triangulorum æquiangulorum oſtenſorum proportionalia erunt latera circa æquales angulos; videlicet triangulorum duorum ABC, FGH; tùm duorum AED, FKI; tùm aliorum duorum CAD, HFI: ideoque cùm ſint ſic bina & bina ſumpta, æquiangula, & circa æquales angulos obtineant proportionalia latera; erunt per def. 1. libri huius ſimilia: videlicet ſimilia erunt triangula ABC, FGH, tùm ſimilia AED, FKI, tùm ſimilia CAD, HFI, quod erat ſecundo loco aſſertum.

Demonſtratio tertiæ partis. Quia oſtenſa ſunt duo triangula ABC, FGH, ſimilia, erunt per propoſ. 19. in duplicata ratione ſuorum laterum homologorum CA, HF: ſimili modo alia duo triangula CAD, HFI, oſtenſa ſimilia, erunt in duplicata ratione ſuorum laterum homologorum CA, HF, eorundem: Vnde per propoſ. 11. libr. 5. erit triangulum ABC ad triangulum FGH, vt triangulum CAD ad triangulum HFI. Præterea cùm ſint duo triangula AED, FKI, oſtenſa ſimilia, erunt per cit. propoſ. 19. præcedentem libri huius in duplicata ratione laterum ſuorum homologorum AD, FI: tùm etiam quia oſtenſa ſunt triangula alia duo ſimilia CAD, HFI, erunt in duplicata ratione eorundem ſuorum laterum homologorum AD, FI; quare erit per citat. propoſ. 11. libr. 5. triangulum AED ad triangulum FKI, vt triangulum CAD ad triangulum HFI; & per eandem propoſ. 11. erit triangulum ABC ad triangulum FGH, vt triangulum AED ad triangulum FKI: oſtendimus ergo in datis multilateris triangula in vno eſſe proportionalia aliis in altero, ita vt ſint antecedentia in vno multilatero, & conſequentia in altero multilatero: Igitur per propoſ. 12. lib. 5. omnia antecedentia triangula vnius multilateri, erunt ad omnia triangula conſequentia alterius multilateri, vt vnum antecedens triangulum in vno multilatero, ad conſequens ſuum proprium triangulum in altero multilatero. Et quia omnia illa triangula antecedentia in vno ex datis multilateris ſunt ſimul ſumpta æqualia toti multilatero per axioma 19. libr. 1. tùm etiam per idem axioma, ſunt ſimul ſumpta omnia triangula conſequentia alterius multilateri æqualia illi; & æqualia ad æqualia eandem habeant rationem per corollarium noſtrum propoſ. 7. libr. 5. erit multilaterum ABCDE ad multilaterum FGHIK, vt triangulum vnum in vno v. g. AED, ad triangulum ſibi reſpondens ſimileque FKI in altero. quomodo fuit affirmatum in tertia parte huius propoſitionis.

Demonſtratio quartæ partis. Quia in tertia parte demonſtrauimus eſſe totum multilaterum vnum ad aliud, vt vnum triangulum illius ad triangulum ſibi reſpondens ſimile illi in alio multilatero: & per propoſ. præcedentem 19. triangulum ad ſimile triangulum habet rationem duplicatam ſuorum laterum homologorum; etiam per propoſ. 11. libr. 5. multilaterum ad multilaterum ſibi ſimile habebit rationem duplicatam lateris ſui homologi ad latus alterius homologum. quod erat propoſitum in hac quarta & vltima parte.

## COROLLARIVM.

*Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, Multilaterum ſupra primam conſtitutum ad multilaterum ſupra ſecundam ſimile ſimiliterq́, poſitum; eandem habebit rationem, quam prima recta ad tertiam proportionalem.*

*Similiter multilaterum ſupra ſecundam deſcriptum ad multilaterum ſimile ſupra tertiam ſimiliterq́, deſcriptum.*

Demonſtratio huius corollarij eſt eadem quæ corollarij propoſitionis præcedentis 19. quoad primam partem: Et quoad ſecundam, eadem quæ coroll. noſtri 4. propoſ. eiuſdem 19. niſi quod loco propoſ. 19. adhibenda ſit propoſitio iſta 20.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si duæ rectæ fuerint lineæ, vnaq́, dupla alterius: multilaterum ſupra duplam conſtitutum ſimile ſimiliterq́, multilatero ſupra ſubduplam, erit quadruplum huius multilateri ſupra ſubduplam.*

Tertia enim inuenta recta linea proportionali datis tribus prima dupla ſecundæ, ſecunda erit etiam dupla tertiæ inuentæ; cùm ſint in eadem ratione ſecunda ad tertiam, vt prima ad ſecundam; ideoque prima cum ſit dupla ſecundæ & ſecunda dupla ſecundæ, erit quadrupla tertiæ. Datur autem multilaterum ſupra primam conſtitutum ſi-

 mile

mile ſimiliterque multilaterum ſupra ſecundam; ergo per corollar. præcedens, erit illud multilaterum ſupra primam conſtitutum ad multilaterum ſupra ſecundam, vt prima recta ad tertiam prædictam: ſed hæc prima ad tertiam habet ex oſtenſis rationem quadrupli, ergo multilaterum ſupra primam datam poſitum ad multilaterum datum ſupra ſecundam datam, erit quadruplum. quod erat inferendum.

## PROPOSITIO XXI.

### Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

Fig. 153 SVppoſitio. Sint duo rectilinea, puta triangula ABC, DEF, ſimilia eodem rectilineo triangulo GHI: Dico illa duo rectilinea duo ABC, DEF, eſſe ſimilia inter ſe.

Demonſtratio. Quia datur rectilineum triangulum ABC ſimile triangulo rectilineo GHI, erit per def. 1. libri huius, angulus A æqualis angulo G, exempli gratia; & angulus B æqualis angulo H; & angulus C æqualis angulo I. Simili ratione quia dantur rectilinea triangula DEF, GHI, ſimilia; erit exempli gratia angulus D æqualis angulo G; & angulus E angulo H, & angulus F angulo I, per cit. prop. 1. libri huius: Igitur per 1. ax. lib. 1. erunt duo anguli A & D, æquales; tùm duo anguli B & E, denique duo anguli C & F: æquiangula ergo erunt duo rectilinea triangula ABC, DEF; & ſic de aliis multilateris rectilineis datis ſimilibus tertio dato diſcurrendum erit. Sed & per eandem defin. 1. cit. erunt latera AB, BC, proportionalia lateribus GH, HI, circa æquales angulos B & C; tùm etiam erunt latera DE, EF, proportionalia lateribus GH, HI, circa æquales angulos; & ſic de aliis lateribus circa æquales dictos angulos in datis rectilineis oſtendendum erit in vtroque rectilineo, quod ſint proportionalia lateribus rectilinei tertij dati circum æquales angulos: vnde per propoſ. 11. libr. 5. quia proportionalia ſunt latera AB, BC, tùm DE, EF, lateribus tertij rectilinei GH, HI, erunt inter ſe proportionalia latera AB, BC, lateribus DE, EF: & ſic de aliis omnibus reliquis circa æquales angulos. quare per definitionem huius libri primam, data rectilinea ſimilia tertio rectilineo eidem, erunt inter ſe ſimilia.

## PROPOSITIO XXII.

### Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & ab eis ſimilia rectilinea ſimiliterque deſcripta, proportionalia erunt.

### Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint; ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SVppoſitio. Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, EF, GH, ita vt ſit AB ad CD, vt EF ad GH: ſintque ſupra primam AB, & ſecundam CD, rectilinea ſimilia ſimiliterque poſita; tùm ſupra tertiam EF, & quartam GH, alia rectilinea ſimilia ſimiliterque poſita: Dico primò iſta rectilinea eſſe proportionalia; hoc eſt eſſe rectilineum ſupra primam AB deſcriptum, ad rectilineum ſimile ſimiliterque deſcriptum alteri, ſupra ſecundam CB, ſicuti eſt rectilineum ſupra tertiam EF, ad rectilineum ſimile ſimiliterque deſcriptum ſupra quartam GH. Prætereà ſint quatuor rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, ſuper quatuor rectis lineis AB prima, CD ſecunda, EF tertia, GH quarta, vel duos ſimilia ſimiliterque deſcripta ſupra primam & ſecundam, & alia duo ſimilia ſimiliterque deſcripta ſupra tertiam & quartam; proportionalia inter ſe, hoc eſt rectilineum ſupra primam AB ſit ad rectilineum ſupra ſecundam CD, ſicut rectilineum ſupra tertiam EF ad rectilineum ſupra quartam GH: Dico ſecundò, quatuor illas rectas lineas AB, CD, EF, GH, eſſe proportionales. Fig. 154.

Constructio ad primam partem demonſtrandam. Per prop. 11. libri huius, datis duabus primis rectis AB, CD, quæratur tertia proportionalis I; & datis aliis duabus EF, GH, vltimis, inueniatur tertia proportionalis K. Quia ex datis eſt AB ad CD, vt EF ad GH, & per conſtructionem eſt CD ad I, vt GH ad K; erit ex æqualitate iuxta prop. 22. lib. 5. AB ad I, vt EF ad K.

Demonſtratio primæ partis. Rectilineum ſupra AB primam, ad rectilineum ſupra ſecundam ſimilia ſimiliterque poſita, eſt vt AB ad I, per corollar. propoſ. 19. libri huius, ſi fuerint rectilinea triangula; vel per corollar. propoſ. 20. ſi fuerint rectilinea multilatera. Simili modo per eadem corollaria, erit rectilineum

lineum ſuper EG prima, ad rectilineum ſuper GH ſecūda, vt recta EF ad rectam K: Oſtendimus autē eſſe rectam AB ad rectam I, ſicuti eſt recta EF ad rectā K; ergo per prop. 11. lib. 5. erit rectilineum ſuper AB ad rectilineum ſuper CD, vt rectilineum ſuper EF ad rectilineum ſuper GH; videlicet eſſe proportionalia rectilinea ſimilia ſimiliterque poſita ſuper quatuor rectis proportionalibus AB, CD, EF, GH. quod erat in prima parte huius propoſitionis aſſertum.

Conſtructio pro ſecunda parte huius propoſitionis demonſtranda. Prima data recta AB, ſecunda CD, tertia EF, & quarta GH, pro lateribus homologis, ſuper quibus ſimilia ſimiliterque deſcripta ſunt rectilinea data proportionalia: quæratur per prop. 12. libri huius, tribus datis primis AB, CD, EF, quarta proportionalis, quæ vel erit æqualis quartæ datæ GH, vel inæqualis. Si æqualis fuerit ipſi quartæ datæ GH, habebimus intentum, videlicet quatuor illas rectas quæ ſunt latera homologa prædicta rectilineorum ſimilium ſimiliterque poſitorum, inter ſe proportionalia, eſſe quatuor rectas proportionales. Si verò fuerit inæqualis, fiat per prop. 18. libri huius, ſuper hac quarta inuenta recta ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum reſpectu poſiti ſupra tertiam rectam EF: ſitque iſta recta quarta proportionalis inuenta GL, inæqualis ipſi GH, maior vel minor ipſa. Certum eſt ex comparatione laterum proportionalium horum rectilineorum ſimilium ſimiliterque deſcriptorum ſuper rectis GH, GL inæqualibus, reſolutorum in triangula tot numero ſimiliaque, & homologa ſuis correſpondentibus, eſſe inæqualia inter ſe iſta rectilinea, aduocando 14. propoſ. lib. 5. & conſiderationem figuræ propoſ. 18. libri huius. His conſtructis & poſitis, ſequitur euidens

Demonſtratio ſecundæ partis. Eſt ex datis rectilineum ſuper AB, ad rectilineum ſuper CD, vt rectilineum ſuper EF ad rectilineum ſuper GH: & per partem præcedentem, quia ſunt quatuor rectæ proportionales AB, CD, EF, GL, erit rectilineum ſuper AB ad rectilineum ſuper CD, vt rectilineum ſuper EF ad rectilineum ſuper GL: ergo per prop. 11. lib. 5. erit rectilineum ſuper EF ad rectilineum ſuper GH, ſicut rectilineum ſuper GL; igitur per propoſ. 9. libr. 5. erunt rectilinea ſuper GH & ſuper GL, æqualia, contra demonſtrata in conſtructione. Pugnantia iſta coarguunt falſitatis poſitionem contradicentem aſſertioni huius ſecundæ partis, videlicet non eſſe quatuor rectas lineas proportionales AB, CD, EF, GH: erunt ergo proportionales vti adſtruebatur in ſecūda parte huius propoſitionis.

COROLLARIVM I.

NOSTRVM.

*Rectilinea ſimilia ſimiliterq; poſita ſupra duas rectas inæquales lineas, erunt inæqualia; maiuſq; ſupra maiorem, & minus ſupra minorem.*

HOc demonſtratum eſt in ſecundæ partis conſtructione.

COROLLARIVM II.

NOSTRVM.

*Rectilinea ſimilia ſimiliterq; poſita ſupra æquales rectas lineas, ſunt æqualia.*

NAm reſoluta in tot numero triangula ſi triangula non fuerint, ipſa triangula in quæ reſoluentur erunt ſimilia ſi ſumantur correſpondentia, per propoſ. 18. libr. huius; & comparando eorum latera circa æquales angulos, cùm ſint primum & tertium æqualia ex datis, erunt æqualia ſecundum & quartum, per prop. 14. libr. 5. & ſic in reliquis comparationibus latera iſtarum figurarum ſimilium erunt æqualia: ſed & anguli ſunt æquales per def. 1. lib. huius: ergo per 9. axio. libr. 1. latera homologa iſtorum rectilineorum æqualia, & anguli ad illa æquales, congruent, totaque etiam congruent; vnde fit vt ſint æqualia per idem axioma à nobis explicatum.

COROLLARIVM III.

NOSTRVM.

*Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales: erunt rectilinea ſimilia ſimiliterq; poſita ſupra illas proportionalia.*

MEdia enim recta linea repetita bis, quatuor erunt rectæ proportionales, & rectilinea ſimilia ſimiliterque poſita ſuper ſecunda & tertia æqualibus, hoc eſt ſupra repetitam bis ſecūdam è tribus datis, erunt æqualia per coroll. præcedens 2. noſtrum, & ſimile ſimiliterque poſitum ſupra alias datas rectas, per propoſ. 21. præcedentem: atque adeò per iſtius propoſitionis partem primam, erunt proportionalia iſta rectilinea ſupra quatuor iſtas rectas lineas: ſed rectilineum ſupra repetitam rectam cùm ſit æquale & ſimile rectilineo ſupra illam datam, ſimiliterque poſitū vt illud & reliqua, poterit ſumi bis illud quod eſt ſupra datam rectā vt ſit conſequens primæ

 relationis,

relationis, & antecedens alterius relationis; nam per 7.prop. lib.5. eadem quantitas ad æquales quantitates eandem habet rationem,& eadem ad æquales. ergo rectilinea ſimilia ſimiliterque poſita ſupra tres rectas lineas proportionales, erunt proportionalia.

### COROLLARIVM IV.

### NOSTRVM.

*Si fuerint ſupra tres rectas lineas ſimilia rectilinea, ſimiliterq; poſita, proportionalia: tres illæ rectæ lineæ erunt proportionales.*

Repetendo bis mediam è datis tribus rectis, ſi non ſit prima ad ſecundam, vt ſecunda facta tertia ad quartam: redibit diſcurſus ſecundæ partis factus pro demonſtratione illius, & ſic concludetur idē abſurdum indicans negationem propoſiti in hoc corollario eſſe falſam, ideoque propoſitum eſſe verum: ſumendo tamen rectilineum æquale ſuper ſecunda, illi quod ſuper tertia eſt, pro vno tantùm, quandoquidem bis fuit repetita ſecunda recta, & repetitum illud rectilineum.

## PROPOSITIO XXIII.

### Æquiãgula parallelogramma, inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

Fig.146. Suppoſitio. Conſulatur figura propoſitionis 14. libri huius. Sintque duo parallelogramma ABCD, EFGB, æquiangula: Dico illa habere rationem inter ſe, quæ ex lateribus eorum componitur; hoc eſt ſumptis rationibus laterum illorum, AB ad BG, & BC ad BE, & ex eis vna facta ratio, hæc ratio facta erit ratio inter data illa parallelogramma.

Conſtructio. Diſponantur illa duo æquiangula parallelogramma, ita vt æquales anguli in B puncto conueniant, ſintque latus vnum AB vnius, in directum alterius lateris BG, quod fieri poſſe oſtendimus in conſtructione figuræ propoſitionis 14. libri huius; in qua etiam oſtendimus reliqua duo latera EB, BC, circa illos angulos æquales in B, eſſe in directum; & productis lateribus DC, FG, vltra C & G, concurrere in H.

Demonſtratio. Cõſtat ex prop.1.lib.huius, corol.noſt.3.parallelogrãma ABCD, BGHC conſtituta intra eaſdem parallelas AG, DH, eſſe inter ſe, vt baſes eorum AB ad BG; tùm alia duo parallelogramma BGHC, EFGB, eſſe vt baſes eorum CB ad BE: ſed per definitionem 5.lib.huius, ratio parallelogrammi DB ad BF, componitur ex rationibus parallelogrammi DB ad parallelogrammum BH, & parallelogrammi BH ad parallelogrammum BF; quæ rationes ſunt eædem, atque rectæ AB ad BG, & CB ad BE, vti demonſtratum eſt: ergo ratio parallelogrammi ABCD ſeu DB ad parallelogrãmum EFBG ſeu BF, componetur ex rationibus rectarum AB ad BG, & CB ad BE, quæ ſunt latera illorum parallelogrammorum.

## PROPOSITIO XXIV.

### In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt parallelogramma, & toti & inter ſe ſunt ſimilia.

Suppoſitio & conſtructio. In parallelogrammo ABCD, ducta ſit diameter AC, & per quodlibet eius punctum I diuerſum ab extremis ſuis A, C, ductæ ſint per propoſ. 31. libr. 1. duæ diuerſæ rectæ lineæ GIH, EIF, quarum vna ſit parallela lateri BC, & altera lateri CD, parallelogrammi dati efficientibus vnũm angulum eius BCD: prima GIH, etiam erit parallela lateri AD, & altera EIF, parallela erit lateri AB per propoſ. 31. libr. 1. quare reſultabunt parallelogramma GAEI, FIHC, circa diametrum AC dati parallelogrammi. Hæc duo parallelogramma GAEI, FIHC dico eſſe tùm toti parallelogrammo ABCD, tùm inter ſe ſimilia. Fig.155.

Demonſtratio. Imprimis per propoſ. 34. libr. 1. anguli BAD ſeu GAE, BCD ſeu FCH, erunt æquales; tùm etiam anguli GIE, FIH, æquales illis oppoſitis BAE vel GAE, tùm BCD vel FCH: totum ergo datum parallelogrammum datum, & duo circa eius diametrum obtinebunt angulos duos oppoſitos per quos incedit diameter eius AC: ſed & duo oppoſiti B & D anguli ſunt æquales per citat. propoſit. 34. libr. 1. quibus per propoſ. 29. libr. eiuſdem, ſunt æquales AEI, AGI, IHC, IFC oppoſiti alij duo in aliis parallelogrammis circa diametrum: Æquiangula igitur erunt parallelogramma prædicta, tàm circa diametrum totius, quàm ipſum totum primum datum. Iam verò probabimus habere latera pro-

proportionalia circa illos prædictos æquales angulos:quia in triangulo ACD,ducta eſt parallela IH, lateri AD,erit per coroll. prop.4. lib.huius,totum triangulum ACD,triangulo ICH ſimile, ſeu etiam totum triangulum ADC,triangulo IHC: ſed etiam quia in triangulo ADC, ducta eſt parallela EI, lateri DC,erit per cit.coroll.prop.4. libri huius totum triangulum ADC, triangulo AEI ſimile;quare per propoſ.21. libri huius, triangula AEI, IHC, ſimilia erunt inter ſe. Conſimili methodo docebimus eſſe ſimilia triangula ABC,AGI, IFC: nam quia recta GI parallela & lateri trianguli BC, trianguli BAC, erit per citatum coroll. triangulum ABC, triangulo AGI, ſimile; Etiam quia in triangulo ABC, recta IF parallela eſt lateri AB in eodem triangulo ABC,erit per cit.coroll. triangulum totum ABC, triangulo IFC ſimile: ſed per def.1. libri huius,latera circa illorum triangulorum ſimilium ſunt proportionalia. Erit igitur vt AD ad DC, ita AE ad EI, & ita IH ad HC,ideoque per 11.prop.lib.5.erit AE ad EI,vt IH ad HC:Eodem diſcurſu erit AG ad GI, vt AB ad BC;& IF ad FC,vt AB ad BC,& per cit.propoſ.11.vt AG ad GI,ſic IF ad FC. Denique per propoſ.43. lib.1.ſunt æqualia parallelogramma BI, ID, & æquales habent angulos in I,habebunt ergo per prop. 14.lib.huius,reciproca latera, hoc eſt erit GI ad IE, vt HI ad IF; verum per 34.prop.lib.1. latus AE æquale eſt lateri GI, & latus AG lateri EI, & per coroll.noſtrum prop.7.lib.5. eſt vt GI ad IE, ita EA ad AG, erit per 11. prop.libr.5. EA ad AG, vt HI ad IF: ſed etiam latus FC æquale eſt lateri HI, & latus HC æquale lateri IF, per cit.prop.34. libr.1. ergo etiam erit per 7.& 11. prop.lib.5.vt GI ad IE, ita FC ad CH. Inſuper quia per citat. propoſ.34.lib.1. IH,ED ſunt æquales rectæ, tùm IF,GB,& oſtendimus eſſe EA ad AG,vt HI ad IF, erit etiam per prop.7. & 11.libr.5. EA ad AG,vt DE ad GB; & per propoſ.16. libr.5. erit viciſſim vt AE ad ED, ſic AG ad GB; & per coroll.prop.18.lib.5. componendo erit AD ad ED,vt AB ad GB, & viciſſim per prop.16.lib.5. AD ad AB,vt ED an GB, vel vt æquales HI ad IF per 7.& 11.prop.lib. 5. & per eaſdem vt BC ad CD, ſic FC ad CH: & per eaſdem, vt FC ad CH, ſic GI ad IE: & ſic demonſtrauerimus prædicta parallelogramma eſſe æquiangula, & circa æquales angulos habere proportionalia latera: ideoque per def.1.libri huius eſſe ſimilia.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I.

*Si in parallelogrammo, vnum parallelogrammum ſit circa diametrum illius, & communem angulum cum illo habeat; erit illi toti ſimile.*

HOc eſt, in parallelogrammo ABCD, circa illius diametrum AC, exiſtens parallelogrammum AGIE, communem angulum GAE cum illo habens, erit toti parallelogrammo ſimile. hoc demonſtratum eſt. Fig. 155.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## II.

*Si duo parallelogramma fuerint ita compoſita vt duæ eorum diametri vnam componant lineam, vnius quę latera duo circa vnum eius angulum producta, ſint in directum aliorum duorum laterum alterius parallelogrammi è datis circa vnum eius angulum; ipſa duo data parallelogramma erunt ſimilia.*

QValia ſunt duo parallelogrāma AGIE, IFCH. Producta enim latera AE, CH, occurrent in D,per coroll. noſtrum 1.ad prop. 42.lib.1.tùm etiam producta latera AG,CF, concurrēt in B: reſultabitque parallelogrammum totale ABCD; nam CH & EIF ſunt parallelæ inter ſe & ipſi AGB, tùm etiam FC,IH, AD;ex ipſis datis, ſaltem partes eorum. Cùm ergo duo data parallelogramma AGIE, IFCH,ſint circā diametrum AC,totius parallelogrammi ABCD, & demonſtrauerimus, illa eſſe ſimilia inter ſe; manifeſtum erit corollarium iſtud. Fig. 155.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## III.

*Parallelogramma prædicta in hac propoſitione 24. & corollariis noſtris duobus, ſunt ſimiliter poſita.*

SVnt enim ſimilia oſtenſa, & ex modo demonſtrandi & conſtruendi ſunt anguli ſupra eorum latera, æquales relatiuè, & reliqui anguli æquales relatiuè ordine conſequenti, & latera circa illos proportionalia: igitur ex def. vltima huius libri addita à nobis, erunt ſimiliter poſita.

COROL-

## COROLLARIVM NOSTRVM IV.

*Dato parallelogrammo, aliud ſimile ſimiliterq; poſitum deſcribemus ſuper data recta linea, ac demonſtrabimus aliter quàm per propoſ. 18. libri huius.*

Fig.155. SVppoſitio. dato parallelogrãmo IFCH, oporteat aliud parallelogrammum deſcribere ſimile ſimiliterque poſitum illi, ſuper data recta linea CK, maiore quàm latus FC dati parallelogrammi.

Conſtructio. Ducta IC diameter dati parallelogrammi producatur vltra I, & ex latere CF producto vltra F, detrahatur recta CK æqualis datæ CK per propoſ. 3. libr. 1. & per propoſ. 31. lib. eiuſdem, ex puncto K ducatur recta KL quæ occurret in L diametro CI productæ; nam in triangulo IFC, duo anguli IFC, ICF, ſunt minores duobus rectis per prop. 17. lib. 1. ergo cùm angulus CKL ſit æqualis angulo IFC per prop. 29. lib. eiuſdem, etiam duo anguli CKL, ICF, erunt minores duobus rectis, ergo per ax. 13. lib. 1. concurrent duæ rectæ lineæ CI, KL in L: tùm ex L puncto ducatur alia recta linea LM parallela ipſi KC, ſecabit in M, rectam CH productam, per 1. coroll. noſtrum ad prop. 42. lib. 1. reſultabitque ex iſta conſtructione parallelogrammum LKCM; & datum parallelogrammum IFCH, erit circa illius LC diametrum.

Demõſtratio. Factum parallelogrammum KCML ſupra rectam KC datam, continebit circa ſuam diametrum LC, datum parallelogrammum IFCH; ergo illa erunt ſimilia per coroll. 1. noſtrum huius propoſitionis; & ſimiliter poſita ſupra latera CK, CF, per 3. coroll. noſtrum. Fecimus ergo imperatum. Eodem modo proportionato fiet parallelogrammum ſimile ſimiliterque poſitum dato parallelogrammo ſuper data recta linea minore quàm ſit latus CF dati parallelogrãmi.

## PROPOSITIO XXV.

**Dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituere.**

Fig.156. SVppoſitio. Dato rectilineo A ſupra latus CD, oporteat conſtituere aliud rectilineum ſimile ſimiliterque poſitum ipſi A, & æquale dato rectilineo alteri B.

Conſtructio. Si datum rectilineum A fuerit triangulum, fiat ſupra datam rectam CD, parallelogrammum DCFG æquale ipſi A dato in quocumque angulo æquali ipſi DCF, per prop. 44. libri 1. & ſi fuerit aliud rectilineum multilaterũ, fiat idem parallelogrammum, per propoſ. 45. libri eiuſdem. Tùm per eaſdem propoſitiones proprias ad rectam DG fiat aliud parallelogrammorum DEHG, æquale alteri dato rectilineo B, ad angulum DCF: Tunc cùm per propoſ. 29. lib. 1. anguli DCF, CDG, parallelogrammi CDGF, ſint æquales duobus rectis, & angulus EDG ſit factus æqualis angulo DCF; erunt duo anguli CDG, EDG, æquales duobus rectis; ideoque per prop. 14. lib. 1. rectæ duæ CD, ED, erunt in directum & duo parallelogramma CG, DH, erunt per coroll. noſtrum 3. ad 1. prop. 1. lib. huius, inter ſe vt baſes eorum CD, DE. Denique per propoſ. 13. libr. huius. reperiatur media recta proportionalis IK, ſupra quam conſtituatur per prop. 18. libri huius, rectilineum L, ſimile ſimiliterque poſitum ipſi rectilineo dato A. Hoc rectilineum L Dico eſſe æquale ipſi rectilineo dato alteri B.

Demonſtratio. Per coroll. noſtrum ad propoſ. 7. lib. 5. Quia rectilineum datum A, & factum parallelogrammum CG, ſunt æqualia per conſtructionem; tùm etiam per eandem conſtructionem, rectilineum B, & factum parallelogrammum DH, ſunt æqualia; erit A ad B, vt CG ad DH: ſed CG ad DH, eſt per propoſ. 1. libri huius, vt CD ad DE; eſt autem per coroll. prop. 19. vel 20. libri huius, vt CD ad DE, ſic A ad L; ergo per propoſ. 11. lib. 5. erit A ad B, vt A ad L: ergo per prop. 9. lib. 5. B & L erunt æqualia. ſed factum eſt L ſimile ſimiliterque poſitum ipſi A; poſuimus ergo rectilineum L ſimile ſimiliterque rectilineo A, & æquale rectilineo B.

## PROPOSITIO XXVI.

**Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit, & ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum: hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.**

SVppoſitio. Ab toto parallelogrammo ABCD, ablatum ſit parallelogrammum EFGD. Simile ſimiliterque poſitum, communem cum illo angulum in D obtinens: Fig.157.

Dico

Dico hoc ablatum parallelogrammum conſiſtere circum eandem DFB diametrum totius parallelogrammi ABCD.

Conſtructio. Ducatur diameter DF, ablati parallelogrammi EFDG, ab angulo D communi ipſi toti parallelogrammi ABCD, & producatur donec attingat in aliquo puncto parallelogrammum totum ABCD: Vel attinget illud in angulo B oppoſito communi angulo D; vel in puncto H lateris BC, vel in puncto I, lateris AB: non enim attingere poteſt latera DA, DC, alioqui duæ rectæ lineæ figuram concluderent.

Demonſtratio. Si attingat in angulo B, recta DFB, erit diameter totius parallelogrammi ABCD; atque ita ablatum ab eo parallelogrammum EFGD, circa diametrum eius conſiſtet, quod volumus. Si verò attigerit in puncto H, lateris BC; ſic argumentor. Dantur ſimilia parallelogramma EG, AC, ſimiliterque poſita, ergo per definitiones 1. & vltimam huius libri, erit DG ad GF, vt DC ad CB; ſed quia in triangulo DCH ducta eſt parallela FG lateri HC, (eſt enim parallela lateri ED parallelo ipſi CH, ex natura parallelogrammorum, & per prop. 30. libr. 1. rectæ GF, CH, ſunt parallelæ) ergo per coroll. propoſ. 4. libr. huius, erit DG ad GF, vt DC ad CH; ergo per prop. 11. lib. 5. erit DC ad CB, vt DC ad CH; ergo per prop. 9. libr. 5. erunt rectæ CB & CH, æquales, totum & pars, contra libr. 1. axioma 8. Si denique attigerit in puncto I, lateris AB; erunt per eaſdem propoſitiones EF, AI, parallelæ rectæ lineæ: & vt DE ad EF, ſic DA ad AB; tùm vt DE ad EF, ſic DA ad AI; tùm DA ad AB, vt DA ad AI; & per prop. 9. cit. lib. 5. AB, AI, rectæ æquales, totum & pars, contra cit. ax. 8. lib. 1. hæc duo abſurda manifeſtam faciunt falſitatem duarum poſitionum, videlicet rectam DF diametrum ablati parallelogrammi EG, eductam ab angulo D cõmuni, productamq; ad aliud totum parallelogrammum, attingere illud in aliis punctis extra punctum B anguli oppoſiti angulo D communi. reſtat igitur vt attingat in angulo B: & ſic ablatum parallelogrammum EG, ab toto parallelogrammo AC, communemque cum eo angulum D habens, circa diametrum eius DB conſiſtet.

## PROPOSITIO XXVII.

Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis ei, quod à dimidia deſcribitur: maximum eſt illud, quod ad dimidiam applicatur parallelogrammum ſimile exiſtens defectui.

Svppoſitio, & constructionis pars prima. Super recta data AB, deſcriptum ſit parallelogrammum ABDF; diuiſaque recta ab data in C biſariàm per prop. 10. lib. 1. ductâque recta CE parallela lateri BD per propoſ. 31. libr. 1. quæ etiam per 30 erit parallela alteri lateri AF; vnde reſultabunt duo parallelogramma AE, CD, æqualia per prop. 36. lib. 1. propter æquales baſes AC, CB: Quæ quia ſunt anguli A & ECB æquales per 29. lib. 1. tùm etiam anguli F, CED, æquales per eandem prop. quibus per 34. ſunt anguli oppoſiti æquales, erunt horum parallelogrammorum anguli ordine diſpoſiti conſequenter æquales, & latera circa illos proportionalia, cùm ſint relatiuè æqualia, per cit. prop. 34. libr. 1. ideoque per def. vltimam huius libri, erunt ſimilia ſimiliterque poſita ſupra rectas AC, CB æquales: eritque parallelogrammum FC, ſuper dimidia AC deſcriptum, deficiens parallelogrammo CD deſcripto ſuper CB altera dimidia recta totius datæ AB; quod dico eſſe maximum omnium parallelogrammorum quæ deſcribi poſſunt ſuper recta AB data, deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis ei CD, quod ab dimidia CB deſcribitur. Fig. 158.

Demonſtratio cum altera constructionis parte. Si enim non ita ſit, Eſto ſit fieri poſſit, aliud parallelogrammum FMIA, includens parallelogrammum FC, ſupra dimidiam AC rectæ datæ AB: cumque ex datis in propoſitionis, defectus MDBI, parallelogrammi FMIA introducti ab aduerſario, debeat eſſe parallelogrammum ſimile ſimiliterque poſitum ipſi parallelogaammo CD ſuper dimidiata parte CB, totius AB datæ; ſi hunc defectum incluſum in toto CD parallelogrammo, conſideremus ablatum, cùm

obtineat

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig.159. Suppoſitio. Sit data recta linea AB, ad quam ſit applicādum parallelogrammum æquale dato rectilineo C, deficiens figura parallelogramma quæ ſimilis ſit parallelogrammo dato D.

Conſtructio. Per propoſitionem 10. libr. 1. ſecetur recta data AB, bifariàm in E: & per propoſitionem 18. libri huius, ſuper recta ED, quæ eſt ſemiſſis datæ AB, deſcribatur rectilineum EFGB, ſimile ipſi rectilineo dato D, ſimiliterque poſitum: & per lemma 1. noſtrum ad libr. 2. perficiatur parallelogrammum ſub AB, BG, quod erit AHGB. Iam verò ex datis, quia rectilineum C datum, cui applicandum æquale, non maius eſſe debet parallelogrammo EG ſupra dimidiam EB, ſimilique dato parallelogrammo D, quia per præcedentem propoſitionem illud parallelogrammum EG maximum eſt omnium parallelogrammorum ſecundùm eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis ei quod à dimidia deſcribitur: Inquiro an æquale ſit rectilineo dato C, vel maius illo, (non enim eſſe poteſt minus illo, ex conditione prædicta adiuncta) ſi æquale; quandoquidem per corollarium noſtrum præcedentis propoſitionis, duo parallelogramma AF, EG, ſint ſimilia ſimiliterque poſita, & æqualia per corollarium noſtrum 3. ad propoſit. 1. huius libri; & parallelogrammum AF ſit conſtitutum ſupra dimidiam AE rectæ datæ AB, deficiatque parallelogrammo EG ſimili ſimiliterque poſito reſpectu dati parallelogrammi D; erit etiam æquale rectilineo dato C, vt aliud EG ipſi æquale eſt conceſſum: atque ita fecerimus imperatum. Quod ſi parallelogrammum EG ſit maius rectilineo dato C; Reducere poterimus per propoſ. 45. libr. 1. datum rectilineum C, (ſi non fuerit parallelogrammum) ad parallelogrammum; & per corollarium noſtrum 6. ad propoſ. citat. 45. libr. 1. poterimus differentiam in parallelogrammo alio exhibere, quæ eſt inter duo parallelogramma EG, & C; hæc verò differentia ſit parallelogrammum I: cui per propoſ. 25. libri huius, ſimile ſimiliterque poſitum dato parallelogrammo D, æquale parallelogrammum KLMN, conſtituendum erit, quod minus erit totali parallelogrammo EG continente & rectilineum C, & æqualem quantitatem huic differentiæ. Probo autem hoc parallelogrammum KLMN, habere latera homologa minora lateribus parallelogrammi EG homologis ſibi ſimilis & ſimiliter poſiti: ſi non ita ſit, Eſto latus KN antecedens æquale lateri FE antecedenti, per corollar. noſtrum 2. ad prop. 22. libri huius, erunt æqualia parallelogramma NL, EG, contra conceſſa. Eſto inſuper latus KN, maius latere FE, erit per corollar. noſtrum 1. ad eandem propoſ. citat. 22. parallelogrāmum NL maius parallelogrammo EG, contra demonſtrata: Igitur latus KN, erit minus latere FE: Sumendo autem comparationem horum laterum homologorum, cum aliis lateribus homologis circa æquales angulos FEB, KNM; erit per definit. 1. libri huius KN ad NM, vt FE ad EB, prima quantitas KN, oſtenſa eſt minor quàm tertia FE, ergo etiam ſecunda NM erit minor quàm quarta EB, per prop. 14. libr. 5. latera igitur homologa parallelogrammi KLMN, ſunt minora lateribus parallelogrammi EG homologis circa æquales angulos. His præmonitis poterimus ex maiore latere FG æquali ipſi EB, reſecare partem FQ æqualem lateri KL minori, per propoſ. 3. libr. 1. & ex maiore latere FE, adimere partem FO æqualem minori KN, & perficere parallelogrammum OQ, quod erit æquale & ſimile alteri NL ſimiliterque poſitum, habenſque GFE angulum communem cum parallelogrammo EG, cui etiam erit ſimile ſimiliterque poſitum, per propoſ. 21. libr. 1. cùm ſit ſimile ſimiliterque poſitum parallelogrammo NL ſimili ſimiliterque poſito ipſi toti EG: ergo per propoſ. 26. huius libri, hoc parallelogrammum OQ erit circa eandem diametrum FB, parallelogrammi totius EG. Quod ſi producatur latus, OE, vltra P, occurret rectæ AB in X, per corollarium noſtrum 1. ad prop. 42. libr. 1. tùm etiam producendo latus PO vltra O, occurret in S, lateri AH; & reſultabunt parallelogrammata AO, OR, æqualia per corollarium noſtrum 3. ad propoſ. 1. lib. huius, ob baſes æquales AE, EB, tùm duo complementa EP, PG, æqualia per propoſ. 43. libr. 1. tùm PB parallelogrammum ſimile toti EG per propoſ. 24. libri huius, ideoque dato parallelogrammo dato D per propoſ. 21. libri huius, quo deficit parallelogrammum AP applicatum ad rectam AB. Iam vero demonſtro quod hoc parallelogrammum AP, applicatum ad rectam AB, deficienſque parallelogrammo PB ſimili ſimiliterque poſito parallelogrammo dato D, eſſe æquale dato rectilineo C.

Demonſtratio. Totum parallelogrammum EG, eſt æquale rectilineis C & I ſimul, per conſtructionem: Et rectilineo I æquale factum parallelogrammum NL, cui eſt æquale ablatum OQ parallelogrammum ex toto parallegrammo EG; igitur relinquetur gnomon TRV æquale rectilineo C: ſi enim ex

æqualibus æqualia auferantur, relinquentur æqualia per 3. axio. libr. 1. Sed & oſtendimus eſſe æqualia parallelogrammata EP, PG, quibus ſi addatur commune XR, fient æqualia parallelogrammata ER, XG: eſt autem ER æquale ipſi AO, oſtenſum, ergo etiam ipſum AO parallelogrammum erit æquale ipſi XG, per 1. axio. libri 1. iſtis duobus æqualibus AO, XG, addatur commune EP, fient totus gnomon TRV, & parallelogrammum, AP, æqualia totus autem gnomon TRV oſtenſus eſt æqualis rectilineo C dato, ergo per 1. axio. libr. 1. parallelogrammum AP, erit æquale dato rectilineo C. Igitur ad rectam lineã AB applicauimus parallelogrammum AP dato rectilineo C æquale, deficiens figura parallelogramma XR, quæ ſit ſimilis alteri dato parallelogrammo D: quod erat faciendum, & rectè factum eſſe demonſtrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Similia ſimiliterq́ꝫ poſita parallelogramma inæqualia, habent inæqualia latera homologa circa æquales angulos, maiuſq́ꝫ ſibi vendicat maiora, & minus minora.*

HOc demonſtratum eſt in conſtructione.

## PROPOSITIO XXIX.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato.

Fig.160. SVppoſitio. Ad rectam lineam AB, applicandum ſit parallelogrammum excedens figura parallelogramma ſimili parallelogrammo dato D, & æquale dato rectilineo C.

Conſtructio. Per propoſ. 10. libr. 1. recta AB biſariàm in E diuidatur; & per propoſ. 18. libri huius, ſuper dimidia EB, totius rectæ AB ponatur parallelogrammum EFGB ſimile ſimiliterque ipſi dato parallelogrammo dato D. Tùm per propoſ. 45. libr. 1. corollar. noſtrum 4. ad rectam lineam EB, parallelogrammi EG, applicetur parallelogrammum æquale dato C, rectilineo vt fiat vnum parallelogrammum totale H; cui per propoſ. 25. libri huius faciendum erit aliud parallelogrammum IKLM æquale, & ſimile parallelogrammo EG. Et quia parallelogrammum hoc IKLM maius eſt parallelogrammo EG, continet enim illud & C datum rectilineum ex conſtructione illius, latera huius parallelogrammi IKLM, homologa erunt maiora lateribus homologis alterius parallelogrammi EG, per corollarium noſtrum præcedentis propoſitionis. Productis ergo lateribus FG, FE, vltra G & E, ſumere poterimus per 3. propoſ. libr. 1. rectam FN æqualem IK, & rectam FO æqualem rectæ IM, & perficere parallelogrammum ON, quod erit æquilaterum & æquiangulum ipſi IKLM; ideoq́; ſimile ipſi EG; vt ipſũ IKLM erat ipſi ſimile: Cùm igitur duo iſta parallelogramma EG, ON, ſint ſimi lia ſimiliterque poſita, communemque angulum in F obtineant, vnumque EG ſit pars alterius ON, concipi poterit ablatum ab illo; quare per propoſ. 26. libri huius, erunt circa diametrum FP eandem totius parallelogrammi ON. Iam verò producta recta PO vltra O, & poſita AS parallela ipſi EO, vel FO, quę occurret in S ipſi POS; & producta EB, vſque ad Q donec occurrat ipſi NP lateri in Q: reſultabit primò parallelogrammum RQ circa diametrum FB, ideoque ſimile ſimiliterque poſitum ipſi parallelogrammo EG per propoſ. 24. libri huius, ideoque ſimile ſimiliterque poſitum ipſi D dato parallelogrammo: tum reſultabit aliud parallelogrammum SQ, applicatum ad rectam datam AB, excedens figura parallelogramma RQ ſimili parallelogrammo dato D. Præterea per 43. libr. 1. erunt parallelogramma OB, NB, æqualia, & alia parallelogramma SE, OB, æqualia per corollar. 3. noſtrum ad propoſ. 1. libr. huius, propter æquales baſes AE, EB poſitas. Et quia parallelogrammum OB æquale eſt oſtenſum parallelogrammo BN, erunt per 1. axio. lib. 1. parallelogramma SE, BN, æqualia. Denique quia totum parallelogrammum ON, eſt æquale per conſtructionem rectilineo C dato, & parallelogrammo EG; ſi ademerimus ex hoc toto parallelogrammo ON, parallelogrammum EG, remanebit gnomon TXV, æquale rectilineo dato. His poſitis Aſſero parallelogrammum SQ applicatum ad rectam datam AB, excedenſque figura parallelogramma RQ ſimili dato parallelogrammo D oſtenſo, eſſe æquale gnomoni TXV, ideoque ipſi rectilineo dato C.

Demonſtratio. Parallelogrammata SE, BN,

BN, ſunt oſtenſa æqualia: ergo ſi his adiiciatur commune parallelogrammum OQ; fient æqualia, parallelogrammum SQ, & gnomon TXV. Fecimus ergo imperatum, & rectè factum eſſe demonſtrauimus.

## PROPOSITIO XXX.

### Propoſitam rectam lineam terminatam, extrema & media ratione ſecare.

Fig. 161. SVppoſitio. Secanda ſit recta AB data, ſecundùm extremam ac mediam rationem.

Conſtructio. Per propoſit. 46. libri 1. ſuper data recta AB, fiat quadratum ABCD, eiuſque latus AD producatur vltra D: tùm per prop. 10. libr. 1. diuidatur bifariàm, AD in E; & ducatur recta EC ad angulum oppoſitum ipſi A, ex puncto E: reſultabit triangulum rectangulum CDE, cuius latus EC maius erit latere ED, per 19. propoſ. libr. 1. eo quod ſubtendatur angulo recto CDE, cùm quilibet aliorum angulorum C & E, ſint acuti, per corollar. 2. ad propoſit. 32. libr. 1. Quare ſi ſumamus ab E, productæ rectæ AD vltra D, rectam aliquam EF, æqualem ipſi EC, per 3. propoſit. libr. 1. extremum eius F, erit vltra D, quandoquidem recta EC maior eſt oſtenſa quàm recta ED. Iam verò ex puncto B ad punctum F, recta linea extendatur BF: & per propoſit. 31. libr. 1. ex puncto D, tranſmittatur versùs AB, recta linea DG parallela ipſi FB, quæ occurret in G ipſi AB, per 1. corollarium noſtrum ad 42. propoſit. libr. 1. erit per propoſ. 2. libri huius latus ſeu recta data AB, ſecta proportionaliter vt recta AF, ſeu latus trianguli BAF. Et quia latera ED, DC, trianguli EDC, ſunt maiora ſimul ſumpta reliquo latere EC, per propoſ. 20. libr. 1. ideoque per 1. axioma, libr. 1. recta ED æquali poſitæ ipſi EC; fit vt ſi ex inæqualibus, videlicet ex ED, DC ſimul ſumptis, & ex EDF, dematur communis recta ED; relinquatur DC maior quàm DF, per axiom. 4. libr. 1. & quia DC, & AD ſunt æqualia, fit per 1. axiom. libr. 1. at etiam AD ſit maior quàm DF: Et quia eſt AG ad GB, ſicut AD ad DF, per citat. 2. propoſit. libr. huius, & AD prima maior eſt oſtenſa quàm DF ſecunda, erit per propoſit. 14. libr. 5. corollarium noſtrum 2. tertia AG maior quàm GB quarta. His poſitis Aſſero rectam AB lineam datam, ſectam eſſe in G, extrema & media ratione: hoc eſt iuxta definitionem 3. libri huius, eſſe totam rectam datam AB, ad maius eius ſegmentum AG, vt eſt ipſum maius ſegmentum, ad eius minus ſegmentum GB.

Demonſtratio. Quia recta AD bifariàm in E, ſecta eſt, eique addita recta DF, erit per propoſit. 6. libr. 2. rectangulum ſub tota AF, & ſub DF, vnà cum quadrato mediæ ED, æquale quadrato rectæ EF, hoc eſt quadrato EC æqualis ipſi EF, hoc eſt etiam quadratis rectarum ED, DC, quibus per 47. libr. 1. æquale eſt quadratum rectæ EC: ergo ſi demamus quadratum commune rectæ ED, erit rectangulum ſub AF tota, & minore eius ſegmento DF, æquale quadrato rectæ DC, vel rectæ AD quæ eſt maius ſegmentum totius rectæ AB. Igitur per corollarium propoſit. 17. libr. huius, recta AD, erit media proportionalis inter rectas AF, DF: ergo erit tota AF ad maius ſegmentum ſuum AD, vt maius ſegmentum ipſum AD, ad maius ſegmentum DF, prædictæ totius rectæ AF: ergo per definitio. 3. libr. huius, recta AF diuiſa erit in D, ſecundùm mediam & extremam rationem. Oſtendimus autem in conſtructione, rectam AB ſimiliter eſſe ſectam G, vt eſt recta AF, in D; igitur ſecta erit extrema & media ratione, recta AB in G, & AG, erit maius eius ſegmentum, & GB, minus eiuſdem ſegmentum. Ad praxim ergo reduximus propoſitum.

## PROPOSITIO XXXI.

### In rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, eſt æqualis figuris, quæ priori illi ſunt ſimiles & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

SVppoſitio. Super trianguli rectanguli BAC lateribus deſcriptæ ſint figuræ D, E, F, ſimiles ſimiliterque poſitæ: ſitque figura D, ſuper latere BC ſubtendent angulum rectum A: Dico hanc figuram D eſſe æqualem figuris E, F, deſcriptis ſuper lateribus aliis BA, CA, continentibus angulum rectum A. Fig. 162.

Demonſtratio. Per propoſ. 19. vel 20. libri huius. Quælibet figura ex dictis, & ſimiles aliæ ad quamlibet aliam ex illis, vel ſimilibus, habet duplicatam rationem laterum homologorum, quæ ſunt etiam latera trianguli dati. Quo poſito ſic fit demonſtrationis diſcurſus. Vt quadratum lateris AC, (prima quantitas) ad quadratum lateris BC, (ſecundam quantitatem;) ſic figura E (tertia quantitas) ad figuram D (quartam quantitatem;) ob eandem rationem duplicatam laterum homologorum: Præterea vt quadratum lateris BA (quinta quantitas) ad quadratum BC, (ſecundam quantitatem prædictam;) ſic figura F, (ſexta quantitas) ad figuram D, (quartam quantitatem:) Igitur iuxta 24. propoſit. libri 5. erit vt prima & quinta quantitates ſimul ſumptæ, videlicet quadrata laterum AC, AB, circa rectum A angulum, ad ſecundam quantitatem nimirum quadratum lateris BC ſuppoſiti angulo recto A; ſic tertia & ſexta quantitates ſimul compoſitæ, hoc eſt figuræ E, F, ad quartam quantitatem, ſcilicet figuram D: ſed per propoſit. 47. libri primi ratio quadratorum ſub lateribus AC, AB, angulum rectum A comprehendentibus, ad quadratum lateris BC ſubſtrati angulo ipſi recto A; eſt æqualitatis: ergo etiam ex natura proportionalitatis, ratio figurarum E, F, ſuper lateribus AC, AB, eiſdem, ad figuram D ſuper latere BC prædicto, erit æqualitatis. Quare vti propoſitum fuit, figuræ E, F, ſimul ſumptæ, æquales erunt figuræ D; ſimiles ſimiliterque poſitæ: illæ quidem duæ ſuper lateribus rectum angulum continentibus, hæc verò ſola ſuper latere ſubtenſo recto A angulo.

Hæc propoſitio longè nobilior eſt propoſ. 47. libr. 1. quia eſt vniuerſalior.

## PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundùm vnum angulum compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint etiam parallela: tùm reliqua illorum triangulorum latera, in rectam lineam collocata reperientur.

Svppoſitio. Duo triangula ABC, DCE, habeant duo latera AB, AC, DC, DE, proportionalia, ita vt ſit AB ad AC, vt DC ad DE; & ſint homologa latera videlicet antecedentia AB, DC, parallela inuicem; tùm etiam latera conſequentia AC, DE, parallela; & iſta duo triangula ſecundùm vnum C angulum compoſita fuerint: Dico reliqua illorum latera BC, EC, eſſe in directum. Fig. 163.

Constructio. Si non ſint latera BC, CE, in directum, producto vno illorum puta BC vltra dictum angulum C, tranſibit ſupra aliud latus CE, vel infra illud, vt BCF. Nihilominus quia recta AC incidit in parallela latera AB & DC, erunt per 29. propoſ. libr. 1. anguli A, & ACD æquales: ſimiliter quia recta DA, incidiriu latera AC, DE, parallela, erunt anguli ACD, & D æquales: ergo per 1. axiom. libr. 1. erunt anguli A & D æquales. Et ideò per propoſ. 6. libr. huius, iſta duo triangula data BAC, CDE, erunt æquiangula, æqualeſque habebunt angulos B & DCE, ſub homologis lateribus AC, DE: tùm per propoſ. 29. libr. 1. erunt anguli B, & DCF, æquales.

Demonſtratio. Anguli B, & DCE, ſunt oſtenſi æquales; tùm etiam anguli B & DCF: ergo per 1. àxioma libri primi anguli DCE, DCF erunt æquales, contra 8. axiom. libri primi totum & pars. hoc abſurdum conſequens ad poſitionem contradicentem aſſertioni huius propoſitionis, accuſat falſitatis ipſam poſitionem, & manifeſtam facit aſſertionem.

## PROPOSITIO XXXIII.

In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis quibus inſiſtunt, ſiue ad centra ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant: Inſuper verò & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt.

Svppoſitio. In æqualibus circulis ſint anguli BGC, EHF, ad centra eorum G, H, conſtituti, ſiue ad peripherias eorum in A, & D, Fig. 164.

& D, inſiſtentes arcubus BC, EF; Tùm etiam ſint ſectores BGC, EHF. Dico primò angulos illos BGC, EHF, vel alios angulos BAC, EDF; eandem rationem habere inter ſe, quam habent arcus BC, EF, quibus inſiſtunt. Dico ſecundò, etiam ſectores illos BGC, EHF, eandem habere rationem, quam arcus BC, EF, quorum ſunt baſes.

Conſtructio. Sumantur per prop. 23. libr. 1. anguli æquales CGK, KGI, ſinguli ipſi angulo BGC in centro G circuli BAC, poſſent ſumi plures aut pauciores numero: certum eſt tot numero eſſe arcus eis ſuppoſitos angulis æqualibus, videlicet BC, CK, KI; qui erunt æquales inter ſe per propoſ. 26. libr. 3. corollar. noſtr. vnde totus angulus BGI, & totus arcus BCKI, erunt æquemultiplices, ille anguli BGC, iſte arcus BC. Eodem modo ſumantur anguli æquales FHL, LHM, ipſi angulo EHF in centro H, alterius circuli, quocumque etiam numero: certum eſt etiam tot numero arcubus æqualibus inſiſtere EF, FL, LM, hos angulos æquales, per cit. propoſ. 26. libr. 3. corollarium noſtrum. Iam vero in circulo primo cuius G centrum, ſi angulus BAC in circumferentia eius datus ſit; eodem ſumendi erunt arcus quocumque numero, v. g. CC, KI, æquales arcui BC, & rectæ AK, AI, ducendæ; tunc anguli BAC, CAK, KAI, æquales erunt per cit. propoſ. 26. libr. 3. corollarium noſtrum, totque erunt anguli, quot arcus, vnde totus angulus BAI, & totus arcus BI, erunt æquemultiplices ſuorum propriarum quantitatum, ille anguli BAC, hic arcus BC. Simili ratione in circulo ſecundo, cuius centrum H, ſi angulus EDF ſit datus in circumferentia; ſumendi erunt arcus æquales arcui EF, quocumque numero, v. g. FL, LM; ducendæque rectæ DL, DM; eruntque vti antea oſtendimus anguli EDF, FDL, LDM, æquales inter ſe; totque numero arcus, quot anguli; vnde totus angulus EDM, & totus arcus EM, erunt æquemultiplices ſuarum propriarum quantitatum, ille anguli EDF, hic arcus EF. Quod ſi etiam ex centris G, & H, emittantur ſemidiametri ad extremitates arcuum prædictorum in circulis illis, reſultabunt anguli in centris æquales, & ſectores diuerſi, eritque ſector BGI, tàm multiplex ſectoris BGC in primo circulo, cuius centrum G, quam multiplex eſt totus arcus BI, arcus BC partialis: Tùm etiam in circulo cuius centrum H, ſector totus EHM tàm multiplex ſectoris EHF partialis, quàm multiplex eſt totus arcus EM, ipſius particularis EF.

Demonſtratio primæ partis. Quidem anguli dati BGC, EHF, in centris, vel anguli BAC, EDF, in circumferentiis circulorum æqualium, ſunt prima & ſecunda magnitudines ſeu quantitates datæ; tùm arcus BC, EF, ſunt tertia & quarta quantitates datæ: ſumpſimuſque æquemultiplicia primæ & tertiæ quantitatum, hoc eſt BGI, vel BAI, & BI; tùm æquemultiplicia ſecundæ & tertiæ quantitatum, hoc eſt EHM, vel EDM, & EM: Si mente ſuperponamus circulum cuius centrum G, ſupra circulũ cuius centrum H, ita vt centrũ G, centro H reſpondeat, & B initium arcus BI, reſpondeat initio E arcus EM; congruent iſti circuli æquales, per axio. 9. lib. 1. Iam verò vel totus arcus BI toti arcui EM æqualis eſt congruentibus circumferentiis circulorum dictorum æqualium, vel maior eſt, vel minor eſt arcus BI, arcui EM: quidquid acciderit ſimiliter angulus AGI, erit æqualis angulo EHM, vel maior vel minor, prout ſe habuerit arcus BI ad arcum EM. Cùm ergo BGI angulus, & BI, arcus æquemultiplicia primæ & tertiæ, anguli BGC, & arcus BC, vnà excedant, vel deficiant, vel æqualia ſint, reſpectu EHM anguli, & EM arcus, æquemultiplicium ſecundæ & quartæ, & anguli EHF, & arcus EF; erit per definit. 6. libr. 5. BGC angulus ad angulum EHF, ſicut arcus BC ad arcum EF. Et quia per propoſ. 20. libr. 3. anguli BGC, EHF, ſunt dupli angulorum ſuorum propriorum BAC, EDF, erit per propoſit. 15. libr. 5. angulus BAC ad angulum EDF, vt angulus BGC ad angulum EHF; oſtendimus autem eſſe angulum BGC ad angulum EHF, vt arcus BC ad arcum EF; ergo per propoſ. 11. libr. 5. erit etiam angulus BAC ad angulum EDF, vt arcus BC ad arcum EF.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Hæc propoſitio vera eſt etiam in eodem circulo.*

NAm ſumi poterunt æquemultiplices angulorum datorum, & eodem modo erunt æquemultiplices arcuum: & ſimiliter ſe habebunt vti diximus in conſtructione ac demonſtratione. quare concludemus in eodem circulo anguli eandem habebunt rationem quàm circumferentiæ quibus inſiſtunt; & ſectores etiam.

Denique quia in prædicta ſuperpoſitione, circumferentiæ circulorum congruunt, & rectæ BG, EH, etiam congruant, totus ſector BGI, toti ſectorio congruit EHM, vel illum excedit, vel deficit ab illo; eodem modo arcus BI, ad arcum EM, ſe habebit.

Ergo cùm BGI ſector, & arcus BI, æquemultiplicia primæ & tertiæ quantitatis, videlicet ſectoris BGC, & arcus BC, vnà excedant, vel deficiant, vel æqualia ſint, reſpectu EHM, ſectoris, & arcus EM, æquemultiplicium ſecundæ & quartæ quantitatis, videlicet ſectoris EHF, & arcus EF; erit per 6. definit. libr. 5. ſector BGC ad ſectorem EHF, vt arcus BC ad arcum EF. ſicuti fuit in ſecunda parte propoſitum.

## COROLLARIVM I.

*In Inæqualibus circulis, eſt ſector ad ſectorem, vt angulus vnius ad angulum alterius.*

CVm enim ex prima parte huius propoſitionis ſit angulus vnius ad angulum alterius, vt arcus cui vnus inſiſtit ad angulum alterius cui inſiſtit, ſi prout debent ſumantur: & per 2. partem ſit ſector vnus ad ſectorem alterum, vt arcus eius ad arcum alterius: erit per propoſit. 11. libr. 5. ſector ad ſectorem, vt angulus eius ad angulum alterius.

## COROLLARIVM II.

*Vt eſt angulus in centro circuli ad quatuor rectos, ita eſt arcus illi angulo ſubtenſus ad totam circumferentiam circuli.*

NAm per corollarium noſtrum erit angulus in centro circuli, ad quatuor rectos in eodem centro exiſtentes, ſicut arcus ſubtenſus illi angulo ad totam circumferentiam cui inſiſtunt quatuor recti anguli.

COM-

# COMMENTARIVS
## IN
# LIBRVM SEPTIMVM ELEMENTORVM GEOMETRICORVM EVCLIDIS,
## DIGRESSIO VNICA

In qua variis propoſitionibus explicantur multa communia magnitudinibus & numeris: & ſocietas magnitudinum & numerorum oſtenditur: & alia ſcitu neceſſaria ad notionem horum librorum 7. 8. & 9. de numeris.

### PROPOSITIO I.

*Vnitates ex quibus omnis numerus componitur, vel ſunt indiuiſibilia puncta, vel magnitudines, vel abſtrahunt ab indiuiſibilibus punctis, & magnitudinibus.*

TAM enim ex indiuiſibilibus vnis punctis, quàm ex diuiſibilibus vnis quibuſcumq; magnitudibus ſeu continuis quantitatibus, quàm etiam ex vnis abſtrahẽtibus ab indiuiſibilibus pũctis & diuiſibilibus cõtinuis quibuſcumque, ſuſſiciẽtem habet anſam Intellectus formandi conceptum numeri compoſiti ex illis vnis ſeu vnitatibus; Exempli gratia numeri ternarij ex tribus punctis indiuiſibilibus, vel ex tribus magnitudinibus, vel ex tribus vnis abſtrahentibus ab illis punctis indiuiſibilibus, & diuiduis magnitudinibus. Quid enim conceptui ſormali ternarij quem intellectus format ſibi, præbent magis indiuiſibilia tria puncta, quàm tres magnitudines diuiduæ, vel quàm tria vna præciſa ab indiuiſibilibus punctis ac ſectilibus magnitudinibus? Igitur vnitates ex quibus numerus omnis efficitur, vel ſunt puncta indiuidua, vel magnitudines multæ vnæ, vel multa vna ſeparata ab indiuiſibilibus vnis & magnitudinibus.

### PROPOSITIO II.

*Si vnitates, ex quibus componitur numerus, fuerint puncta indiuiſibilia: quælibet vnitas ex illis, erit indiuiſibilis.*

NAm ſi eſſet diuiſibilis, ſequeretur contra definitionem libri primi primam, punctum eſſe diuiſibile. hoc abſurdum conſequens indicat falſitatem poſitionis contradicentis huic propoſitioni, quæ ideo declarata & ſtabilita relinquitur.

## PROPOSITIO III.

*Si vnitates, ex quibus Componitur numerus, fuerint magnitudines: qualibet vnitas ex illis, erit diuidua.*

SI enim eſſet indiuidua, magnitudines, hoc eſt quantitas continua minime eſſet ſectilis, contra communem omnium conceptum, & naturam continui. Hoc abſurdum conſequens, condemnat falſitatis antecedens è quo profluit contradicens aſſertioni huius propoſitionis, quæ ideo demonſtrata remanet.

## PROPOSITIO IV.

*Si vnitates, ex quibus componitur numerus, fuerint vna præciſa ab indiuiduis punctis & magnitudinibus diuiduis: abſtrahent ab diſcretione vel in diſcretione ſingulæ illæ vnitates; hoc eſt quælibet illarum iuxta naturam propriam poterit diuidi vel non diuidi, non autem diuidi & non diuidi.*

CVm omnia quæ componunt conceptum vnum intellectus induant naturam illius; & vnitates componentes conceptum numeri abſtrahant ex ſuppoſitione ab indiuiſibilibus punctis, ac diuiſibilibus magnitudinibus: certè illa omnia vna ſeu vnitates illæ omnes componentes conceptum hunc numeri præſcindent ab diuiſibilitate & diuiſibilitate. Cumque in iſta præſciſione ſecundum intellectum formaliter non ſint diuiſibiles aut indiuiſibiles, non poterunt dici diuiſibiles & indiuiſibiles: ſed iuxta naturam ſuam ſpectatæ non autem iuxta hanc præſciſionem, quædam erunt diuiſibiles, videlicet magnitudines, aliæ vero indiuiſibiles nimirum puncta indiuiſibilia.

## PROPOSITIO V.

*Vnitas ſi fuerit punctum indiuiſibile, vel Angelus aut Anima rationalis; diuidi non poterit: Quod ſi fuerit magnitudo aliqua, vel quidpiam ſectile, ſecari poterit.*

QVod nullas habet ex ſe partes, diuidi non poteſt, Punctum indiuiſibile ſeu mathematicum tale eſt, & ſubſtantiæ illæ ſpirituales ergo diuidi nequeunt: ergo neque etiam vnitas ſumpta pro huiuſmodi puncto vel ſubſtantiis ſecari non poteſt. Quia vero magnitudo ſeu quælibet quantitas continua eſt ſectilis in infinitum, tùm etiam infinita ſectilia ratione ſubiecti quanti parteſque habet infinitas ſyncathegorematicè, in quaſlibet diuidi poterunt. Relinquitur ergo manifeſta propoſitio.

## PROPOSITIO VI.

*Si numerus componatur ex vnitatibus indiuiſibilibus omnino; infiniti numeri erunt indiuiſibiles in partes æquales, quando vnitas vna ex illis diſpeſci debet.*

SInt diuidendi numeri 3.5.7.9.&c. bifariàm in duas æquas partes; neceſſariò erit diuidenda vnitas vna ex illis bifariàm. Sint etiam diuidendi hi numeri 5.7.8. trifariàm, neceſſario etiam diuidere oportebit vnitatem ex illis, vel bifariàm, vel trifariàm; ſed hæc per præcedentem propoſitionem eſt indiuiſibilis; ergo illi numeri erunt indiuiſibiles in partes æquales, quando vnitas vna ex illis ſubdiuidi debet. Et ſic etiam de infinitis huiuſmodi numeris.

## PROPOSITIO VII.

*Si numerus componatur ex vnitatibus diuiſibilibus: numeri omnes erunt diuiſibiles in partes æquales quotcumq́.*

CVm enim vnitas quælibet componens illos numeros ſit in infinitum ſyncathegorematicè diuiſibilis ex natura quantitatis continuæ;

continuæ; vnitas quæcumque ſi opus ſit, vel vnitates quæcumque diuidi poterunt quomodocumque in partes æquales per prop. 5. conſtat igitur propoſitum.

## PROPOSITIO VIII.

*Magnitudines omnes numeris expreſſæ, conſiderari poſſunt vt numeri.*

NAm per primam propoſitionem, vnitates ex quibus componitur numerus poſſunt eſſe magnitudines diuerſæ: ergo ſi adueniat operatio Intellectus formans conceptum vnum numericum ex illis conſiderari poterunt, vt numeri.

## PROPOSITIO IX.

*Definitiones, axiomata, & propoſitiones libri quinti ſuorum Elementorum, inſeruire poſſunt numeris; ſi oſtenderimus loco magnitudinum expreſſarum in illis; quantitatis abſtractæ ab continua & diſcreta, hoc eſt à magnitudinibus & numeris, nomine ſubintellecto, omnia illa communia eſſe & magnitudinibus & numeris.*

INductione per omnes definitiones, axiomata & propoſitiones, probari id poſſet, ſed ne longior ſim, ſuperſedeo, & conſideranti Lectori id relinquo. Vtar verò argumentis iſtis, Commentatores omnes & Geometræ Euclidiani, vtuntur in demonſtrationibus numerorum, definitionibus multis libri quinti, præſertim modis argumentandi, inuertendo, alternando, componendo, diuidendo, perturbando ſine vlla alia declaratione cur eis potius vtantur, quàm aliis definitionibus; ſignum ergo eas omnes applicari poſſe numeris, ſi loco magnitudinis, nomen quantitatis abſtractæ ab continua & diſcreta ſubintelligatur. Quoad axiomata noſtra attinet, cùm oſtenderimus in illo libro quinto, dependere ab vniuerſaliſſimis in primo libro aſſumptis; cur non etiam numeris comparabilibus applicari poterunt? Supereſt vt idem demonſtremus de propoſitionibus: Imprimis illæ omnes nituntur immediatè vel mediatè, vel principiis ſeu axiomatibus, ſeu definitionibus prædictis, vel multiplicati vel æquemultiplicati: ſed illæ definitiones, & axiomata, & multiplicitas & æquemultiplicitas tàm bene conueniunt numeris quàm magnitudinibus; imò multiplicitas & æquemultiplicitas primò & per ſe numeris conuenire videtur, quæ fit per denominatores qui ſunt numeri: igitur fatendum eſt, omnes illas definitiones, & axiomata, & propoſitiones libri quinti inſeruire poſſe numeris, ſi loco nominis magnitudinis, nomen quantitatis abſolutæ, hoc eſt abſtrahentis ab continua & diſcreta, vel magnitudine & numero ſubintelligatur. Hinc eſt vt operâ datâ, ſæpe in demonſtrationibus & declarationibus vſi fuerimus nomine quantitatis abſolutæ, non autem contractæ ad magnitudines: tùm etiam in exemplis propoſuerimus ſolas figuras alphabeticas, quæ applicari poſſunt tam quantitati continuæ quàm diſcretæ.

## PROPOSITIO X.

*Non erunt inutiles definitiones variæ, & axiomata numeris propria; licet ab quinto deſumi poſſint vniuerſalia.*

NAm præter illa vniuerſalia iuxta præcedentem propoſitionem 9. erunt particularia numeris ipſis. Quis autem multiplicatas oculis intellectus luces queratur, niſi lucifugus imperitus?

## PROPOSITIO XI.

*Numeri conſiderari poſſunt vt magnitudines commenſurabiles.*

NVmerus omnis, cùm ſit compoſitus ex vnitatibus; & per prop. 1. vnitas poſſit ſumi vt magnitudo aliqua diuiſibilis, quæ vel eſt linea, vel ſuperficies, vel corpus; numerus omnis conſiderari poterit vt multitudo vel linearum, vel ſuperficierum, vel corporum, commenſurabilium, vt excludantur magnitudines incommenſurabiles quæ ſub numeris exponi non poſſunt. Igitur numeri conſiderari poterunt vt magnitudines commenſurabiles diuiſæ in multas.

PRO-

## PROPOSITIO XII.

*Definitiones & propoſitiones libri ſecundi horum elementorum applicari poſſunt numeris; ſi ſumantur illæ lineæ de quibus agitur in illo libro ſub numeris expreſſæ, & poſſint exprimi numeris.*

NAm per propoſ. præcedentem, Numeri conſiderari poſſunt vt magnitudines commenſurabiles ſeu numeris expreſſæ: ergo ſi definitiones & propoſitiones libri ſecundi de magnitudinibus ſeu lineis numeris expreſſis ſumantur, applicari poterunt numeris.

## PROPOSITIO XIII.

*Oſtendere multas affectiones numeris & magnitudinibus communes.*

PRima, magnitudines ſeu quantitates continuæ ſunt ſectiles in partes ex quibus componuntur. Numeri ſunt ſectiles in vnitates ex quibus componuntur.

Secunda. Lineæ rectæ ductus ſeu motus conſiſtentis ſupra rectam lineam aliam rectam manente eodem angulo quem efficiebat, ſuperficiem deſcribit in eodem plano in quo exiſtebat cum alia recta, & ſupra quod mouetur. Numerus quicumque ductus per alium numerũ, efficit alium numerum ſuperficialem planum. Quod ſi linea prædicta recta mota ſit æqualis alteri ſupra quam mouetur ad angulos rectos ſemper inſiſtens vno ſuo extremo, efficiet quadratum: Sic etiam Numerus ductus in ſeipſum vel alium æqualem numerum, progignet numerum planum quadratum. Et ſi lineæ illæ duæ fuerint inæquales, reſultabit per motum alterutrius ſupra aliam parallelogrammum altera parte longius vel rhomboides; ſic etiam ex ductu vnius numeri per alium inæqualem, producetur numerus planus altera parte longior.

Tertia. Si ſuperficies concipiatur moueri ſecundùm rectam lineam angulum efficientem cum illa, ſolidum producetur. Si numerus planus ducatur per numerum quemcumque ſolidus numerus efficietur. Quod ſi ſuperficies mota fuerit quadrata, & recta linea illi ad angulos rectos inſiſtens ſecũdùm quam mouetur, fuerit æqualis vni lateri dictæ ſuperficiei quadrata, ſolidum cubicum fiet: ſic etiam ſi numerus quadratus per eundem numerum multiplicetur qui ductus in ſeipſum quadratum effecerat ipſum, ſolidus numerus cubicus reſultabit. Quod ſi dicta linea fuerit inæqualis lateri ſuperficiei motæ, ſolidum parallelepidedum producetur: ſic etiam ſi numerus multiplicans alium quadratum numerum fuerit diuerſus ab eo qui ductus in ſeipſum, quadratum effecerat, ſolidus non cubicus numerus reſultabit.

Quarta. multiplicari poſſunt magnitudines quæcumque, & numeri quicumque, per quoſcumque denominatores; Nihilominus videntur numeri primò multiplicabiles, quàm magnitudines: nam denominatores multiplicantes ſunt numeri ipſi. In hac proprietate communi inferere poſſumus æquemultiplicitatem, ſubæquemultiplicitatem, inæquemultiplicitatem, & ſubinæquemultiplicitatem, quæ primò etiam numeris conuenit, ob denominatores harum proprietatum, qui ſunt numeri; deinde verò magnitudinibus.

Quinta. Sunt comparabiles numeri inter ſe, & magnitudines etiam inter ſe. Illi primariò in ſpeciebus generis rationalis tantùm, iſtæ ſecundariò: quia denominatores omnium ſpecierum rationis rationalis, ſunt numeri, ex dictis in digreſſione noſtra ſecunda ad librum quintum.

Hæ proprietates communes numeris & magnitudinibus ex infinitis aliis ſufficiant ad probationem propoſitionis præſentis.

## PROPOSITIO XIV.

*Oſtendere quòd propoſitiones 16. 17. & poſtrema pars 20, cum corollariis illarum, poſſunt applicari numeris; tùm etiam propoſitio 22. & 23. lib. ſexti.*

QVoad propoſitiones 16. & 17. attinet cum ſuis corollariis, manifeſtum eſt, ex propoſitione 11. huius digreſſionis, qua conſtat numeros conſiderari poſſe vt magnitudines numeris expreſſæ: ergo quod inferunt illæ propoſitiones circa rectas lineas numeris expreſſas, in numeris concedendum erit compararabilibus vt lineæ illæ.

Quoad poſtremam partem ſpectat propoſitionis 20, & totam propoſitionem 22. explicatione iſta indiget, ſupponendo tamen rectas illas lineas ſub numeris expreſſas, vt in præcedente diſcurſu oſtendimus. Quadrata numerorum exprimentium rectas lineas iſtarum propoſitionum, conſiderari poſſunt vt polygona

polygona ſimilia ſimiliterque deſcripta; nam latera eorum ſumptorum ſeorſim æqualia ſunt, atque ita rationem inter ſe habebunt æqualitatis, tam in vno, quàm in alio; poſſuntque concipi circa angulos omnes rectos; ſeque mutuò conſequentur eodem ordine comparationes illorum laterum huiuſmodi circa æquales angulos; aſſumendo quodlibet latus in vno & altero illorum quadratorum, ſupra quod fiat illud & illud quadratum ſimile: & ſic ex definitione vltima libri ſexti, erunt ſimilia ſimiliterque poſita iſta quadrata numerorum ſupponentium pro lineis rectis. Quare quæ inferunt iſtæ propoſitiones & corollaria propria, circa polygona rectarum linearum, applicari poterunt, quadratis exempli gratia numerorum exprimentium illas rectas, tùm etiam aliis polygonis ſimilibus, de quibus agit Euclides def. 21. huius libri.

## PROPOSITIO XV.

*Contemplatio numerorum conducit ad multarum magnitudinum proprietates explicãdas, præſertim ſolidorum.*

CVm enim innumeræ lineæ ſint commenſurabiles, & incommenſurabiles aliæ; & aliæ Rationales, & aliæ irrationales, de quibus tractatur libro decimo; & plurimorum ſolidorum latera ſint irrationalia vel incommenſurabilia, alia vero rationalia vel commenſurabilia: Et hæ quantitates intelligi non poſſint, neque explicari, niſi per reſpectum ad numeros: ideo neceſſarium fuit inter elementa Geometrica immiſcere hos tres libros ſequentes, ſeptimum, octauum, & nonum, eoſque præmittere libro decimo & ſequentibus ſolidorum. Vnde conſtat contemplationem numerorum conducere ad multarum magnitudinum proprietates explicandas, præſertim ſolidorum, ſicuti fuit propoſitum.

Atque hæc ſatis ſint iuxta noſtrum inſtitutum ad eximendos ſcrupulos qui occurrere poſſent inter explicandas definitiones & propoſitiones horum librorum Euclidianorum de numeris: quæ vix abſque reprehenſibili confuſione intermiſceri inter demonſtrationes poterant. Fateor etiam nonnulla alia præmitti potuiſſe ad maiorem lucem; ſed quia ab definitionibus ſequentibus dependent, ordine doctrinæ iudicauimus dum occaſio ſe offerret in ipſis definitionibus, illa eſſe promenda & exponenda. Sit igitur commentarius noſter in horum librorum de numeris definitiones Euclidianas.

# DEFINITIONES.

### I.

*Vnitas eſt, ſecundùm quam vnumquodq; eorum quæ ſunt, vnum dicitur.*

VNum Philoſophi Peripatetici dicunt, quod indiuiſum in ſe eſt, & diuiſum ab quolibet alio: Porrò illud vnum dicitur ab vnitate denominante, quæ ſi afficiat quodcumque ſubiectum, illud vnum denominabit; exempli gratia, vnum lapidem, vnum animal, vnum mundum, &c.

### II.

*Numerus autem, Eſt ex vnitatibus compoſita multitudo.*

INtellige accedentem operationem intellectus formantis conceptum vnum illius multitudinis vnitatum, exempli gratia ternarij ex tribus vnitatibus diſcretis & ſeparatis: ita vt numerus ſit operatio intellectus circa multas vnitates conceptas vt vnum quid. Videturque particula illa, compoſita multitudo, indicare conceptum illum ad modum vnius.

### III.

*Pars [ propriè dicta ] eſt numerus numeri, minor maioris, cùm minor metitur maiorem.*

HÆc definitio ſimilis definitioni primæ lib. 5. partis nimirum in magnitudinibus, differuntque ſolùm in eo quod in hac aſſumitur numerus minor maiorem numerum metiens; in illa vero ſumitur magnitudo minor maiorem menſurãs. Vniuerſaliſſima partis definitio eſſet huiuſmodi, Eſt quantitas quantitatis, minor maioris, cùm minor metitur maiorem. Et reſtringeretur ad magnitudines & numeros in allatis definitionibus: in quibus vti monuimus in 1. lib. 5. ſubintelligi debet adæquata menſuratio.

Sequitur primo ex hac definitione quod vnitas non ſit pars propriè dicta vllius numeri, nam non eſt numerus ex definitione 2.

Sequitur ſecundo, numerum bifarium non poſſe

poſſe diuidi in partes duas æquales, quia vnitas non eſt pars definita hoc loco, cùm non ſit numerus.

Sequitur tertio, nullum numerum poſſe diuidi in tot numero partes æquales quot continet vnitates: ſequeretur enim vnitatem eſſe partem propriè dictam, contra conſecutionem primam; vel eſſe numerum ex def. 2. & præſenti: quæ ſunt abſurda. Igitur legitima eſt conſecutio iſta tertia.

Quod ſi aliquis definire vellet partem impropriè dictam, ſiue in magnitudinibus, ſiue in numeris: ita dicere poſſet. Eſt aliquid eorum ex quibus componitur quantitas.

## I V.

*Partes autem, cùm non metitur.*

SVbintelligendæ particulæ præcedentis definitionis, hoc eſt numerus numeri, minor maioris. Vide quæ diximus in definitionibus digreſſionis noſtræ primæ ad librum 5. de partibus magnitudinum, & applica proportione ſeruata partibus numerorum: & collige definitionem vniuerſalem partium, Partes, eſt quantitas quantitatis, minor maioris, cùm minor non metitur maiorem, quæ reſtringetur ad magnitudines, per ipſam vocem magnitudinis; & ad numeros, per vocem numerorum.

## V.

*Multiplex verò, maior minoris, cùm maiorem metitur minor.*

INtellige particulas numerorum, ita vt multiplex numerus ſit, maior numerus minoris numeri, cùm maiorem numerũ metitur minor. Conſule definitionẽ ſecundam lib. 5. in qua explicauimus naturam multiplicis magnitudinis, quæ lucem afferet huic definitioni multiplicis numeri. Ex quibus colligetur definitio vniuerſaliſſima multiplicis, hac ratione, eſt maior quantitas reſpectu minoris quantitatis, cùm minor maiorem metitur. Conſule etiam definitiones noſtras omnes digreſſionis primæ ad librum 5. quæ proportione ſeruata applicari poſſunt numeris.

## V I.

*Par numerus eſt, qui biſariàm diuiditur.*

SI biſariàm diuidi, eſt in duas æquas partes diuidi, ſumendo partem definitam in numeris, definitione 3. Binarius numerus non poterit biſariàm diuidi hoc eſt in duas æquas partes, vel duos æquales numeros; vnitas enim non eſt numerus: quæ indicaueramus conſecutionibus prima & ſecunda ad definitionem 3.

Si biſariàm diuidi eſt in duo reſolui æqualia ex quibus componebatur, binarius erit capax diuiſionis biſariæ: vnitas enim & vnitas componentes binarium poſſunt dici vt ſic æquales; & ſic in duo æqualia reſolui poterit binarius.

Infiniti ſunt numeri pares, exempli gratia, 4. 6. &c. ille enim biſariàm diuiditur in duos numeros æquales 2, & 2. Iſte verò in duos 3 & 3, æquales partes ſeu numeros. Ad maiorem lucem huius definitionis conſidera quæ afferemus in fine explicationis ſequentis definitionis.

## V I I.

*Impar verò, qui biſariàm non diuiditur. Vel qui vnitate differt à pari.*

AD intelligentiam huius & præcedentis definitionis, & aliarum multarum difficultatũ in numeris, ſciendum eſt ex Arithemetica alios eſſe numeros integros, alios verò fractos; Integri numeri ſunt, qui in ſuo cõceptu formali numeri vt numeri non referũtur ad vllam entitatẽ diuiſam, vt 2. 3. 20. & ſic de infinitis huiuſmodi. Fracti verò numeri ſunt, numeri quidem relati ad entitatem aliquam diuiſam in partes: Exemplum ſit inſtar omnium horum fractorum tres quintæ, hoc eſt tres vnitates ſeu entitates ex vna diuiſa in quinque partes æquales; quæ ſic ſolent notari $\frac{3}{5}$ ponendo minorem numerum 3 ſupra maiorem 5, interiecta lineola recta: vocariq́ue ſolet numerus ſuperior 3, numerator, & inferiot denominator; hic quia denominat vnam entitatẽ diuiſam in quinque partes æquales; ille verò numerator, quia indicat ſuis vnitatibus tribus, tres fuiſſe ex illis quinque aſſumendas: & ſic de aliis proportione ſeruata diſcurrendum erit. Porrò quia oriuntur hi numeri fracti ex diuiſione vnius entitatis integræ componentis cum aliis numerum diuiſibilis ex natura ſua; manifeſtum eſt poſſe diuidi biſariàm: quod ſi illa entitas componens cum aliis numerum ſit indiuiſibilis ex natura ſua, vt punctum mathematicum, vel ſpiritus, certum eſt non poſſe diuidi vlla ratione neque biſariàm neque quomodocumq́ue. his poſitis explicabuntur multa dubia circa parem & imparem numerum.

Impares erunt numeri v. g. iſti 3. 5. 7. 9. 11. 13. &c. quia differunt vnitate ab paribus antecedentibus iſtis 2. 4. 6. 8. 10. 12. vel conſequen-

conſequentibus iſtis 4.6.8.10.12.14. eodem ordine poſitis, hoc eſt 3 differt vnitate à pari 2. antecedente, vel ab pari 4 conſequente propriò; & ſic de aliis.

Iidem numeri & alij huiuſmodi impares erunt, ſecundùm primam definitionem, quia bifariàm in duos numeros integros diuidi nequeunt; vel in duas partes æquales, nam 5. v.g. licet componatur ex entitatibus quinque diuiſibilibus, & vna illarum diuidi poſſit bifariàm, vnde reſultant $2\frac{1}{2}$ pro ſemiſſe totius quinarij impropriè dicta; non dicetur propriè diuidi bifariàm quia ſi vnitas non dicitur pars numeri propriè dicta ex dictis in def. 3. multò minùs ſemiſſis illius vnitatis ingredietur in ratione partis totalis ſemiſſis cum aliis vnitatibus duabus non diuiſis; pars enim in numeris eſt numerus minor qui repetitus & inuariatus metitur numerum maiorem; & $2\frac{1}{2}$ eſt numerus minor varius compoſitus ex vnitatibus duabus, & ſemiſſe vnitatis; vnde pars propriè ſeu ſemiſſis eſſe nequit. Ad hæc quia vt plurimum Arithmetici conſiderant numeros compoſitos ex indiuiſibilibus, certum eſt tunc vnitatem indiuiſibilem diuidi non poſſe, ideoque numerum imparem bifariàm eſſe indiuiſibilem. Impropriè tamen poteſt diuidi bifariàm ſi componatur ex entitatibus diuiſibilibus.

Obiicies primò in conſecutione ſecunda ad explicationem partis numerorum in definit. 3. aſſeruimus numerum binarium non poſſe diuidi in duas partes æquales, vnde bifariàm ſecari nequit; ergo erit numerus impar iuxta hanc definitionem. Reſpondeo verum quidem eſſe binarium non poſſe diuidi bifariàm in duas partes æquales propriè dictas definitas defin. 3. quæ numeri eſſe debent, & quia vnitas numerus eſſe non poteſt, ideò pars binarij dici non poteſt propriè dicta. Nec ſequitur propterea binarium eſſe numerum imparem hic definitum; quia quando dicitur impar numerus diuidi non poſſe bifariàm, intelligi in duos numeros æquales; vnde quia binarius non poteſt diuidi in numeros duos æquales, non poteſt dici numerus impar; licet diuidatur in duas vnitates quæ impropriè dici poſſunt partes componentes ipſum binarium materialiter.

Obiices ſecundò. Multi numeri impares diuidi poſſunt in duos numeros æquales, v.g. quinarius in $2\frac{1}{2}$, & $2\frac{1}{2}$ ergo erunt pares iuxta definitionem numeri paris. Reſpondeo illos numeros $2\frac{1}{2}$ & $2\frac{1}{2}$, & ſic aliis huiuſmodi, eſſe quidem æquales ſi conſiderentur integri & fracti reducti ad eandem denominationem denominatoris fractionis adiunctæ, & conſiderentur ſolum numeratores illorum, exempli gratia in propoſito caſu, ſi reducantur $2\frac{1}{2}$ ad eundem denominatorem, erunt $\frac{5}{2}$ & $\frac{5}{2}$, & numeratores 5 & 5, erunt æquales. Verum duo numeri illi, non propriè dicentur numeri æquales, quia non ſunt vnitatum multitudines, ſed ſimul vnitatum duarum, & ſemiſſis vnius; iſtæ verò ſemiſſes vnitatum non efficiunt naturam numerorum definitorum in def. 2. libri huius.

Itaque tàm in definitione paris, quàm imparis numeri, particula (bifariàm) debet intelligi pro duobus æqualibus numeris propriè dictis qui ſint ſinguli vnitatum ſolarum multitudines, ſine vlla alia vnitatis particula vel particulis. Et ſic verè & propriè binarius nō poteſt dici par, quia nō poteſt diuidi in duos numeros æquales, qui ſint ſinguli vnitatum multitudines. Similiter ternarius non erit propriè numerus impar, quia non poteſt diuidi in duos numeros licet inæquales, nec vlla ratione in duos æquales; nam licet 2, & 1, cōponant ternarium, tamen vnitas cùm non ſit nurus, licet binarius ipſe numerus ſit, non poſſunt ambo 2, & 1, dici numeri. Impropriè tamen dici poteſt impar 3, ſicuti impropriè 2, dici poteſt par numerus. Reliqui autem numeri maiores binario & pares, ſinguli diuidentur in duos numeros & æquales, propriè dictos; & reliqui omnes numeri impares maiores ternario, ſinguli diuidentur in duos numeros propriè dictos, ſed non æquales inter ſe, qui componant ipſos numeros impares ſeorſim ſumptos. Exempli gratia, Quinarius diuidetur in 3, & 2, qui ſunt duo numeri propriè dicti, reficientes ipſum quinarium, verum ſunt inæquales inter ſe.

## VIII.

*Pariter par numerus eſt, quem par numerus metitur per numerum parem.*

EXempli gratia 8, erit pariter par numerus, quia 4, numerus par eum metitur per 2, numerū parem licet impropriè dictum: ſi definitio iſta intelligatur de pari etiam impropriè dicto. Similiter etiam 4, erit pariter par numerus, quia eum metitur numerus par binarius, per binarium, hoc eſt par impropriè dictus per parem impropriè dictum. Quod ſi par intelligatur propriè dictus, neq; 8, neque 4, erunt pares pariter numeri; quia ille 8 licet mēſuratus ab pari 4 propriè dicto, tamen non menſuratur per parem propriè dictum: hic verò 4, neque menſuratur ab numero pari propriè dicto, neque per numerum parem propriè dictum. Verùm 24 erit pariter par numerus propriè dictus, quia menſuratur ab

T 6, per

6, per 4, qui duo numeri ſunt numeri pares propriè dicti. Et ſic de aliis numeris diſcurrendum erit.

### I X.

*Pariter autem impar, eſt numerus quem par numerus metitur per numerum imparem.*

SVmendo parem numerum 5 & imparem numerum, propriè, vti definiuimus & explicauimus illos in defin. 7. Numerus 6, non erit propriè pariter impar, nam binarius impropriè par, eum metitur per numerum 3 imparem impropriè, vti docuimus in citata def. 7: Dicetur tamen impropriè pariter impar, quia illum metitur 2, per 3, par numerus impropriè per imparem impropriè. Simili modo numeri omnes quos metietur binarius, quem quemcunque numerum imparem propriè ſumptum, erit ex hoc ſolo capite, pariter impar impropriè, quod eum binarius impropriè par metiatur, licet per numerum propriè imparem; vnde ex hoc etiam vltimo capite dici poterit propriè inadæquatè pariter impar. Exempli gratia numerus 10, quem metitur binarius, per quinarium. Proportione ſeruata, numerus quem metietur par numerus propriè dictus per numerum 3 imparem impropriè dictum, erit ex primo illo capite pariter impar propriè inadæquatè; & ex ſecundo capite impropriè pariter impar: Verbi gratia 12 numerus, quem 4 metitur per 3. At verò numeri iſti & infiniti alij huiuſmodi 28. 30. erunt propriè pariter impares, quia primum metitur 4 propriè par, per 7 numerum propriè imparem: & ſecundum metitur 6 numerus propriè par, per numerum 5 propriè imparem.

Colligitur ex his poſtremis duabus definitionibus multos numeros eſſe poſſe & pariter pares, & pariter impares, pro diuerſis menſuris numerorum eos metientibus, per diuerſos alios numeros. Exempli gratia Numerus 36, quia eum metitur numerus 6, par, per 6 numerum parem; dici debet ex definitione præcedente, numerus pariter par, propriè. Et quia eundem metitur 4, numerus propriè par, per 9 numerum propriè imparem; nuncupari poterit numerus propriè pariter impar. Et ſic de aliis: tùm etiam impropriè dictis pariter paribus, aut pariter imparibus.

### X.

*Impariter verò impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.*

EXempli gratia 35. erit numerus impariter impar, quia eum 5 numerus impar metitur per numerum 7 imparem: Et quia illi duo numeri 5 & 7, ſunt propriè impares, ideo iſte numerus 35 erit numerus impariter impar propriè: & ſic de aliis huiuſmodi ferendum erit iudicium. Quod numerus vterque ſit impropriè impar, metiens, & per quem metitur, erit menſuratus numerus adæquatè impariter impar propriè: qualis eſt numerus 9. quem 3 metitur per 3. Quod ſi alteruter numerorum, menſura vel ille per quem menſurat, ſit impropriè impar, altero exiſtente propriè impari; menſuratus numerus erit inadæquatè impropriè impariter impar: vt numerus 15, quem 3 impropriè impar menſurat per 5 propriè imparem.

### X I.

*Primus numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.*

HVjuſmodi ſunt numeri ſequentes, 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. quos ſola vnitas metitur. & infiniti alij.

Ex hoc ſequitur nullum primum numerum eſſe parem, nam eum metiretur binarius. tùm nullum huiuſmodi primum numerum eſſe pariter parem, aut pariter imparem, aut impariter parem, nam eum metiretur aliquis numerus & non ſola vnitas: aſſumptum manifeſtum eſt ex definitionibus præcedentibus.

### X I I.

*Primi inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura metitur.*

PRimi numeri, vt ſunt multi, ſinguli referuntur ad omnes ſeorſim primos datos numeros; dicenturque omnes primi inter ſe numeri, quos nulla communis menſura præter vnitatem metiri poſſit, licet ſeorſim ſumpti, aliquis numerus eos metiatur. Exempli gratia 2 & 3, primi inter ſe numeri erunt, quia nullus numerus tanquam communis menſura metiri poteſt, eoſque ſola vnitas veluti menſura communis metiatur. Sic etiam 8 & 13, erunt primi inter ſe numeri, quia nullus numerus tanquam communis menſura metiri poteſt, præter vnitatē, licet primum 8, metiatur numerus aliquis 4, vel 2. Sic etiā iſti tres numeri 7. 10. 15. erunt inter ſe primi, quia nullus numerus eos metiri poteſt communis menſura, licet duos poſtremos 10 & 15; metiatur numerus 5; quia non comparantur ſolum iſti duo 10 & 15 numeri inter ſe, ſed tres dati 7. 10. 15. Aduertēdum eſt impropriè dici poſſe

poſſe quemlibet numerum, & vnitatem, eſſe primos inter ſe numeros, nã eos vnitas communis menſura metietur: ſed quia vnitas non eſt numerus, ideò impropriè dicentur vnitas & quiuis numerus primi inter ſe numeri.

## X I I I.

***Compoſitus numerus eſt, quem numerus quiſpiam metitur.***

EXempli gratiâ numerus 12 erit compoſitus, quia quilibet iſtorum numerum 2. 3. 4. 6. eum metitur, diuerſi ab illo: ſi enim vt numerus eſſet compoſitus, ſufficeret vt ſeipſum metiretur, omnes numeri primi eſſent compoſiti ſeorſim ſumpti; hoc eſt quilibet primus numerus eſſet compoſitus; & ſic non diſtingueretur primus numerus ab compoſito, contra datas definitiones diuerſas.

Conſequitur ex hac definitione omnes numeros pares, excepto binario eſſe compoſitos; hoc eſt quemlibet parium excepto binario, eſſe compoſitum, quia binarius numerus eum metietur, & binarium nullus præter vnitatem.

Conſequitur etiã ex definitione 11. quemlibet primum numerum excepto binario eſſe imparem, ſi enim par eſſet eum metiretur binarius, & ſic eſſet compoſitus contra hypotheſim.

## X I V.

***Compoſiti autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura metitur.***

DEbet numerus qui eſt menſura communis compoſitorum numerorum, omnes ſeorſim numeros datos compoſitos metiri; poteſtque ipſa menſura communis metiens huiuſmodi, annumerari inter datos compoſitos numeros, quia quilibet numerus ſeipſum metitur. Exempli gratiâ 9. & 15, erunt compoſiti inter ſe numeri, quia numerus 3, eos metitur. Etiam iſti numeri erunt compoſiti inter ſe, 7. 14. 21. 28. quia eos communis menſura numerus 7. metitur, ſeipſum etiam metiens, licet ipſe ſolus ſit numerus primus.

## X V.

***Numerus numerum multiplicare dicitur; cùm toties compoſitus fuerit is qui multiplicatur, quot ſunt in multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis.***

***Vel multiplicatio numeri in numerum, eſt inuentio numeri qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quàm alter multiplicantium ad vnitatem.***

Prima definitio eſt Euclidis, altera eſt commentatorum illius recentiorum deducta ex priore, quæque eſt magis conformis praxi. Primam primò loco declarabimus. Imprimis nomen compoſiti numeri in hac definitione indicat additionem numeri multiplicati ad ſe ipſum, toties quot ſunt vnitates in alio numero multiplicante; ſummamque huiuſmodi totalem factam, vocat Euclides, numerum procreatum, vel vt alij volunt, progenitum, vel factum. At verò in ſuperiore definitione 14. pro numero menſurato ab alio numero, diuerſo ab illo. Alij dicunt ducere numerum in alium, pro multiplicare numerũ per alium; metaphora deducta ab effectione & generatione parallelogrammi vel rectanguli, ex motu ſeu ductu vnius rectæ lineæ ſupra aliam, exiſtente ſemper mota linea vno ſuo extremo ſupra aliam immotam, & ſeruando eundem angulum in motu, quoad vſque perueniat ad extremum aliud immotæ; de quibus egimus in lemmate noſtro primo ad lib. 2. ita vt numerus ductus ſeu multiplicatus ſit ille qui mouetur ſeu additur, ſupra ſeu iuxta vnitates alterius multiplicantis immoti. Exemplum vnum proferam, ſit multiplicandus numerus 4 per 3, ſeu ducendus in 3. repetitur multiplicandus 4, ſeu ducitur, iuxta vnitates ternarij; & fit ſumma totalis procreata 12, quæ etiam numerus planus dicetur defin. ſeq. 16. tanquam planum parallelogrammum factum ex motu prædicto rectæ lineæ ſupra aliam.

Ex dictis & definitione 20. & 24. libri huius, colligitur explicatio ſecundæ definitionis datæ, multiplicationis numeri in numerum: Cùm enim ducitur vnus in alium; vel additur ſibi ipſi vnus iuxta vnitates alterius; & fit numerus alius: productus toties continebit multiplicatum, quot vnitates continet multiplicans; vnde conferendo productum numerum cum multiplicato, & multiplicantem cum vnitate, eandem habebit rationem productus cum multiplicato, quàm multiplicans cum vnitate: Et quia multiplicatus numerus poteſt eſſe multiplicans, & multiplicans ipſe poteſt eſſe multiplicatus; ex quorũ ductu vel multiplicatione procreatur vnus numerus; rectè dicitur in hac ſecunda definitione multiplicatio numeri in numerũ Inuentio numeri qui ad alterutrum multiplicantiũ eandem proportionem habet, quàm alter multiplicãtium ad vnitatẽ. Hæc definitio ita propoſita & explicata, ſupponit eũdem

procreari numerum ex ductu vnius in alium è datis, vel alterius in alium; v.g. ex ductu 3 in 4, eundem produci numerum 12, & ex ductu 4 in 3, quod probat Authnr prop. 12. libr. 7. & quod in omnibus exemplis verum eſſe non ita manifeſtum eſt, alioqui fruſtra hoc proponeret demonſtrandum Euclides: quare videtur nobis proponenda definitio iſta ſecunda ſic, in dependens ab illa propoſitione, & dependens ſolùm ab definitione præcedente, & deffinitionibus citatis 20. & 24. huius libri 7. Eſt inuentio numeri qui ad multiplicatum eandem habeat rationem quàm multiplicans ad vnitatem. Si quis voluerit hanc ſecundam definitionem eſſe proprietatem conſequentem ad primam, & ad defin. 20. & 24. per me liceat: Verùm illam citabimus cùm opus fuerit vti ſecundam definitionem.

Conſecutio prima. Vnitas multiplicans ſeipſam, & quemlibet numerum, nihil de nouo producit, nam ſecundùm primam definitionem, vnitas multiplicata per vnitatem non additur ſibi ipſi, niſi ſemel; ſimiliter etiam quilibet alius numerus: quare vllum de nouo producit numerum, vel nihil de nouo producit; relinquitque intactam multiplicatam vnitatem, vel numerum multiplicatum. Et iuxta ſecundam definitionem, cùm vnitas ad ſeipſam habeat rationem æqualitatis, etiam productus numerus ad multiplicatum habebit rationem æqualitatis; vnde erit idem numerus productus, qui multiplicatus.

Conſecutio ſecunda. Vnitas multiplicata per vnitatem, nihil de nouo producit, niſi vnitatem ipſam.

Conſecutio tertia. Quilibet numerus multiplicans vnitatem, producit ipſum numerum multiplicantem. Nam componi debet vnitas multiplicata iuxta vnitates multiplicantis numeri, quare productus numerus eſt ipſe multiplicans. Vel quia debet productus numerus ad multiplicatam vnitatem, eandem habere rationem quàm multiplicans numerus ad vnitatem; multiplicans autem numerus ad vnitatem habet rationem notam multiplicitatis, ergo procreatus numerus ad vnitatem multiplicatam vnitatem eandem habebit; & per coroll. prop. 4. libr. 5. inuertendo erit vt vnitas ad multiplicantem numerum, ita multiplicata vnitas ad productum numerum; & per propoſ. 16. libr. 5. viciſſim vt vnitas ad multiplicatam vnitatem, ita multiplicans numerus ad productum; prima autem ratio eſt æqualitatis, ergo productus numerus ad multiplicantem numerum habebit rationem æqualitatis.

Conſecutio quarta. Quilibet numerus multiplicans quemlibet numerum, producit diuerſum numerum ab multiplicante & multiplicato. Si enim procreatus numerus eſſet idem qui multiplicans, eſſet per propoſit. 7. libr. 5. eadem ratio producti numeri & multiplicantis ad multiplicatum numerum; quare cùm ſit eadem ratio producti numeri ad multiplicatum, quæ multiplicantis ad vnitatem, per 2. defin. traditam, eſſet per 11. propoſit. libr. 5. eadem ratio multiplicantis ad multiplicatum quæ multiplicantis ad vnitatem; vnde per 7. propoſit. citat. libr. 5. multiplicatus numerus & vnitas eſſet æqualia, quod abſurdum eſt; ergo productus numerus ab numero in numerum, diuerſus erit ab multiplicante. Eſto deinde ſi fieri poſſit productus huiuſmodi numerus idem cum multiplicato: tunc per definit. 2. multiplicationis, cùm procreatus ad multiplicatum eandem habeat rationem quam multiplicantis numeri ad vnitatem, & iſta ſit maioris inæqualitatis, illa etiam erit proportio maioris inæqualitatis, poſita ab aduerſario, æqualitatis: contradictio iſta condemnat poſitionem aduerſarij: relinquitur ergo vt multiplicans numerus numerum producat numerum diuerſum ab multiplicante & multiplicato.

***Numerus numerum diuidere dicitur, cùm numerus acceptus fuerit, qui ſuis vnitatibus indicat, quoties numerus diuidens in diuiſo continetur.***

***Vel, Diuiſio numeri per numerum, eſt inuentio numeri qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuiſus ad diuidentem.***

Hæ duæ definitiones diuerſæ diuiſionis ſunt recentiorum Geometrarum, non autem Euclidis, quas explicamus hac ratione in hoc exemplo; & ita proportinne ſeruata intelligendum erit in omnibus aliis numeris.

Exempli gratiâ Diuidendus ſit numerus 12, per numerũ 3. Omnis enim diuiſio quantitatis eſt per aliam quantitatem: Si acceptus fuerit numerus 4, qui ſuis vnitatibus indicet, quoties numerus diuidens contineatur in diuiſo numero 12; diuiſus erit numerus iſte 12, per numerum 3; & numerus ille 4, qui indicat ſuis vnitatibus, quoties 3 numerus diuidens vel diuiſor contineatur in diuiſo vel diuidendo numero 12, nũcupari ſolet numerus quotus vel quotiens, ob illum effectũ prædictum. Et quia ille numerus quotus, toties continet vnitatem quoties numerus diuiſus diuidentem; ideò in ſecunda definitione dicitur, Diuiſio numeri per numerum, eſt inuentio numeri qui ad vnitatem habet eandem proportio-

portionem, quam numerus diuiſus ad diuidentem, iuxta definitionem 20. lib. huius. Dici poteſt etiam diuiſio numeri per numerum, ſubtractio numeri minoris ab maiore, quoties fieri poteſt, & acceptio numeri indicantis ſuis vnitatibus quoties minor ſubtractus fuit à maiore: quæ ſubtractio fieri poteſt continuò, ſi primùm ſubtrahatur minor à maiore, & ex reliquo iterum, & ſic deinceps, donec nihil relinquatur de maiore, vel aliquid minus minore ſubtracto.

## XVI.

*Cùm autem duo numeri mutuò ſeſe multiplicantes aliquẽ fecerint, qui factus erit planus appellabitur. Qui verò numeri mutuò ſeſe multiplicarint, latera illius dicentur.*

Sicut figura plana rectilinea dicitur, quæ fit ex ductu vnius rectæ lineæ, ſeu motu ſupra aliam rectam, vti in definitionis ſuperioris decimæquintæ explicatione docuimus; ita etiam ex ductu vnius numeri in alium numerum, numerus factus, planus appellabitur. Et ſicut duæ rectæ lineæ efficientes planam figuram prædictam, latera figuræ planæ rectilineæ dicuntur; ſic etiam numeri illi ex quorum ductu, planus numerus progenitus eſt, latera illius numeri producti planique vocabuntur.

Arithmetici numeros planos infinitos ſpeculantur, quadrilateros, trilateros, quinquelateros, ſexilateros, &c. ſicuti Geometræ figuras huiuſmodi trilateras, quadrilateras, quinquelateras, ſexilateras, &c. rectilineas omnes. Euclides autem ſolùm agit & proponit quadrilateros planos numeros rectãgulos.

Notandum eſt primò, vnum eundemque numerum planum, ſibi poſſe vendicare diuerſa duo latera; ſicuti in explicatione ſuperioris definitionis monuimus eundem numerum poſſe produci ab pluribus duobus & duobus numeris: v.g. numerus 12, quia producitur ab ductu 2 & 6, tùm ab ductu 3 & 4; planus numerus dicetur iuxta hanc & definitionem, & ſibi vendicabit pro lateribus hos duos numeros 2 & 6, vel 3 & 4.

Notandum eſt ſecundò numerum omnem planum eſſe compoſitum, iuxta def. 13. huius libri, quia eum numerus quilibet ex his lateribus metietur, nimirum toties quot ſunt in alio ſuo latere vnitates, idque iuxta definitionem ſecundam multiplicationis; contineri enim minorem in maiore, & minorem metiri maiorem, idem ſunt materialiter.

## XVII.

*Cùm verò tres numeri mutuò ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: qui autem Numeri mutuò ſeſe multiplicarint, latera illius dicentur.*

Sicut ſolidum ſeu corpus geometricum trinas habet dimenſiones, longitudinem latitudinem, & altitudinem ſeu profunditatem; vel tria latera ſeu rectas lineas quæ metiantur illas tres dimenſiones: ita etiam numerus ſolidus tres numeros laterales obtinet, indicantes illas tres dimenſiones, vnus longitudinem, alter latitudinem, tertius altitudinem ſeu profunditatem. Et ſicut dum recta linea mouetur ſupra aliam cum ea angulum eundem conſtituens, & inſiſtens ſupra eam eodem ſuo extremo, planum efficit; ita etiam numerus in alium ductus, numerum planum producit, vti explicauimus in defin. præced. Et ſicut illud planum motum ſeu ductum ſecundùm aliam rectam lineam inſiſtentem illi plano immotam, corpus efficit ſeu ſolidum, planis terminatum; ita etiam numerus planus ductus in alium numerum, procreabit alium numerum, qui dicetur ſolidus: Nam ſicut ſolidum corpus ſub tribus rectis ſeu dimenſionibus continetur; ita ſolidus numerus dicetur contineri ſub tribus numeris ſe inuicem multiplicantibus, ita tamen vt primus in ſecundum ducatur, & productus ex eis numerus in tertium datum numerum ducatur; vltimus enim numerus productus erit ſolidus, non ſecundus quia planus. Porrò hi tres numeri erunt latera illius ſolidi effecti numeri.

Exemplum ſint hi tres numeri 2. 4. 3. primuſque 2 ductus in ſecundum 4, efficiat 8, & hic productus numerus 8, ducatur in tertium 3 è datis numeris; numerus 24 procreatus erit ſolidus numerus, quia factus eſt modo prædicto ex tribus numeris datis ſeſe mutuò multiplicantibus.

Quicumque numerus erit factus ex tribus numeris modo explicato, ſolidus erit dicendus ex hac definitione; vt 24, nam fiet ex tribus hiſce lateralibus numeris 2. 4. 3.

Notandum eſt primò. Multos numeros ſolidos obtinere poſſe diuerſa latera. Exempli gratia numerus 24, obtinet in exemplo allato hæc latera 2. 4. 3. qui etiam vendicare ſibi poteſt hæc alia 2. 6. 2. nam bis ſex ſunt 12, & bis duodecim ſunt 24. Et ſic de aliis innumeris.

Notandum eſt ſecundò. Multos numeros ſub diuerſis reſpectibus poſſe eſſe & planos, &

ſolidos; hoc eſt poſſe effici ab duobus numeris ſe mutuo multiplicantibus, tùm ab tribus. Exempli gratia idem numerus 24, planus erit, quia fit ex duobus his 2 & 12, vel 3 & 8, tanquam lateribus ductis inuicem: ſed etiam ſolidus erit quia fit etiam ab his tribus numeris 2. 4. 3. modo explicato.

Notandum eſt tertiò. Vnitatem impropriè dici poſſe ſolidum numerum, ſicuti etiam planum: planum quidem quia duæ vnitates ſe paratæ ſe inuicem multiplicantes vnum planum efficient; & tres vnitates diſtinctæ ſe inuicem multiplicantes modo explicato in ſolidis, vnum ſolidum procreabunt. Impropriè quidem, quia tàm planus numerus quàm ſolidus numerus proprius, eſt numerus diſtinctus ab ſuis numeris lateralibus eum producentibus; hic verò eſt eadem vnitas quæ laterales.

Notandum eſt quartò. Euclidem ſolùm agere de numeris ſolidis rectangulis, omiſſis aliis ſolidis de quibus agit Iordanus.

### X V I I I.

*Quadratus numerus eſt, qui æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.*

VT in Geometricis quadratum eſt figura plana ſub duobus ęquis lateribus, hoc eſt factum ab ductu vnius rectæ æqualis alteri immotæ, ſupra illam ſemper inſiſtentis illi ad angulos rectos vno extremo ſuo; ſic numerus planus factus ab ductu duorum æqualium numerorum mutuò, quadratus erit. Et quia laterales illi numeri quadratum efficientes numerum ſunt æquales; ideò dicitur æqualiter æqualis in definitione prima. Sic quadratus numerus 4, factus ex ductu binarij in binarium, vel in ſeipſum: & ſic de aliis huiuſmodi.

### X I X.

*Cubus verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.*

SIcut in Geometricis ſolidum corpus ſub tribus dimenſionibus æqualibus, vel rectis lineis æqualibus ab vno puncto eductis in diuerſas partes, & ad angulos rectos ſibi inuicem inſiſtentes, & planis continetur: ita etiam numerus cubus dicitur qui ſub tribus numeris æqualibus continetur; hoc eſt fit ex ductu numeri æqualis in æqualem vel in ſeipſum, & productus ex illis numerus iterum ductus per alium numerum prædictorum alterutri æqualem, alium gignit numerum: hic vltimus factus numerus nuncupatur cubus. Et quia hi tres prædicti numeri ſunt æquales, ideo dicitur in definitione prima, numerus cubus, qui æqualiter æqualis æqualiter.

Exemplum numerus factus ex his tribus numeris æqualibus 2. 2. 2. videlicet 8; nam bis duo ſunt quatuor, & bis quatuor ſunt octo, erit cubus.

Notandum eſt primò. Alterutrum horum trium numerorum producentium numerum cubum, dici latus cubi numeri, vel radix illius: ſicuti etiam alterutrum numerorum æqualium duorum, efficientium quadratum numerum, nuncupari latus vel radicem quadrati numeri.

Notandum eſt ſecundò. Multos numeros cubos eſſe etiam planos, & planos eſſe cubos; ſub diuerſis tamen reſpectibus. Exempli gratia ſi conſideretur numerus 8 factus ab ductu numeri 4 in 2. productus 8 numerus erit planus iuxta defin. 16. Quod ſi conſideretur ab tribus hiſce numeris æqualibus 2. 2. 2. productus modo explicato erit cubus numerus 8.

Notandum tertiò, eſſe multos alios numeros ſolidos de quibus tractant Algebriſtæ, ad comparationem corporum Geometricorum. Et quia Euclides noſter ſolùm agit de cubo, & quadrato cubo, ideò ſolùm definit numerum cubum, & prætermittit definitionem numeri quadrato cubi, quam leuiter indicat libro 9. prop. 8. qualis eſt numerus 729, qui cubus eſt radicem habens ſeu latus 9. tùm etiam quadratus habens latus 27.

### X X.

*Numeri proportionales ſunt, cùm primus ſecundi, & tertius quarti, æquemultiplex eſt; vel eadem partes.*

*Vel certè cùm primus ſecundum, & tertius quartum æqualiter continet, eandemq́; inſuper illius partem, vel eaſdem partes: (vel cùm primus in ſecundo, & tertius in quarto, æqualiter continetur, eademq́; inſuper illius pars, vel eadem partes ſimul vel diuiſim.)*

CLauius noſter rectè monet mancam eſſe & imperfectam definitionem hanc non incluſam parentheſi vlla, diminutamq́ue vel in curia commentatorum Euclidis, vel librariorum vitio: ſolum enim definiuntur numeri proportionales maioris inæqualitatis in genere proportionis multiplicis in prima parte; & in ſecunda numeri proportionales minoris inæqualitatis, in genere ſubſuperparticularis & ſubſuperpartientis. Addit verò in prima parentheſi aliam definitionem, pro numeris

meris maioris inæqualitatis in genere proportionis multiplicis ſuperparticularis, & multiplicis ſuperpartientis; præmittendo definire numeros proportionales minoris inæqualitatis in genere proportionis ſubmultiplicis ſubſuperparticularis, & ſubmultiplicis ſubſuperpartientis: Quare in ſecunda parentheſi proferimus definitionem numerorum proportionalium in genere proportionis ſubmultiplicis, & in genere proportionis ſubmultiplicis ſubſuperparticularis, & in genere proportionis ſubmultiplicis ſubſuperpartientis.

Hæ definitiones ſolùm conueniunt numeris, & iis quæ diximus in digreſſione noſtra ſecunda ad librum quintum.

## XXI.

*Numeri ſimiles plani, & ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera.*

NVmeros planos & ſolidos definiuit Euclides, illos definitione 16. hos 17. & quinam numeri appellentur eorum latera.

Itaque exempli gratia hi duo numeri plani 24 & 6, ſimiles dicentur; quia illius latera duo 6 & 4, ſunt proportionalia huius duobus lateribus 3 & 2. Sicuti in figuris planis rectilineis in definitionibus lib. 6. dixit ſimiles eſſe figuras, quorum latera circa æquales angulos proportionalia ſunt latera.

Sic etiam hi duo numeri ſolidi 192, & 24. ſolidi erunt ſimiles, quia illius latera iſta 8. 6. 4. ſunt proportionalia huius lateribus 4. 3. 2.

Aduertendum eſt numeros multos planos eſſe ſimiles ob latera eorum aliqua proportionalia, licet ſecundùm alia non ſint proportionalia. nam in exemplo duorum 24 & 6, ſimilium planorum protulimus latera eorum proportionalia aliqua; & tamen primi 24, iſta latera 8. 3. alia non erunt proportionalia aliis duobus 3. 2. alterius numeri 6. Idem dicendum de multis numeris planis ſimilibus: nam latera numeri primi ſolidi 192 prolati, alia latera ſunt iſta 16. 12. 4, non ſunt proportionalia aliis allatis 4. 3. 2. numeri alterius ſolidi prolati 24.

## XXII.

*Perfectus numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis.*

ADuerte hoc loco nomine partis, ſumi partem aliquotam numeri, hoc eſt illamque illum metiatur, etiam comprehendenda vnitatem.

Itaque exempli gratia numerus iſte 6, erit perfectus, quia eſt æqualis hiſce ſuis partibus omnibus, 1. 2. 4. & ſic de aliis.

Nota ab aliis Authoribus numerum dici Abundantem, illum cuius omnes partes aliquotæ ſimul additæ ſummam efficiunt maiorem ipſo numero. Diminutum verò illum, cuius omnes partes aliquotæ vnitæ, ſummam efficiunt minorem. Abundans erit 12, quia eius partes omnes iſtæ aliquotæ 1. 2. 3. 4. 6. ſummam 16, maiorem ipſo numero 12. Diminutus verò erit 8, quia eius omnes partes aliquotæ 1. 2. 4 ſummam efficiunt 7, minorem ipſo numero 8.

Clauius has ſequentes definitiones prudenter iudicat addendas ex Campano & aliis, neceſſariæ ad intelligentiam horum librorum de numeris. Itaque ſit definitio ſequens ne alium inſtituamus ordinem.

## XXIII.

*Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.*

EXempli gratia numerus 5 metiri numerum 15 dicitur per 3 numerum, quia numerus 4 multiplicans numerum 3, producit ipſum 12 numerum menſuratum.

## XXIV.

*Proportio numerorum, eſt habitudo quadam vnius numeri ad alterum, ſecundùm quod illius eſt multiplex, vel pars, partéſve; vel certè illum continet ſemel aut aliquoties, & aliquam inſuper illius partem, vel partes.*

HÆc definitio lucem affert definitioni 20. ſuperiori, & illam hanc illuſtrat. Notandum eſt, definitionem deficere ſubmultiplicium ſubſuperparticularium & ſubſuperpartientium, quæ ſic ſupplebitur. Et vel continetur in illo ſemel aut aliquoties, & aliqua inſuper illius pars, vel partes.

Quæ diximus in digreſſione noſtra ſecunda ad librum quintum, etiam conferunt plurimum ad huius definitionis declarationem.

## XXV.

*Termini ſiue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores ſumi nequeunt.*

PRoportionis quintuplæ, termini ſeu radices erunt ex hac definitione iſti duo numeri

meri 5. 1. ſumendo etiam vnitatem impropriè pro numero, quia in eadem proportione quintupli, minores ſumi non poſſunt. Quod ſi proponerentur alij duo numeri 50. 10. non erunt in proportione quintupli radices, quia alij multi ſunt minores vt 25.5.& 10.2. minimi verò omnium erunt 5 & 1. Quod ſi aliquis putet terminos ſeu radices proportionis debere eſſe propriè numeros, huius proportionis quintuplæ termini erunt 10.2. non autem ali; duo 5.& 1. Et ſic proportione ſeruata de aliis omnibus duobus numeris in quacumque proportione.

## XXVI.

*Cùm tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam habere rationem dicitur eius, quam habet ad ſecundum.*

*At cùm quatuor numeri proportionales fuerint; primus ad quartum triplicatam rationem habet, dicitur eius, quam habet ad ſecundum.*

*Et ſemper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.*

EXplicationem huius pete ab dictis in definitione 10. libri 5. quandoquidem ibi explicatæ ſint in vniuerſum proportiones duplicatæ, triplicatæ, &c. prout conueniunt proportionibus quæ mediant inter magnitudines & numeros.

## XXVII.

*Quotlibet numeris ordine poſitis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad ſecundum & ſecundi ad tertium, & tertij ad quartū; & ita deinceps donec proportio extiterit.*

VIde illa quæ diximus in definitione 5. libri 6. & aſſume ea tantummodò quæ faciunt ad numeros.

Clauius noſter in fine harum definitionum, iudicat poſſe hoc loco referri, libri 5. definitiones inuerſionis, alternationis, compoſitionis, diuiſionis, ex æqualitate, & reliquas huiuſmodi ad proportiones ſpectantes. Verùm quia illas docuimus iam applicari poſſe numeris, tùm propoſitiones libri quinti, in digreſſione vnica ad hunc librum 7. illas hîc conſultò prætermittimus; & mittere poteramus 24. 26. 27. ex his cùm ex eadem digreſſione conſtet alibi explicatas eſſe in vniuerſum.

# PETITIONES.

## PRIMA.

*Poſtuletur, cuilibet numero, poſſe ſumi æquales, vel multiplices.*

## SECVNDA.

*Quolibet numero ſumi poſſe maiorem.*

NEmo inficias ibit has petitiones, quandoquidem numeri augeri poſſunt in infinitum ſyncathegorematicè; non autem minùs, tandem enim deueniemus ad vnitatem quæ ſi indiuiſibilis ſit, non poterit amplius ſubdiuidi. quod ſi fuerit materialiter diuiſibilis, orientur fracti numeri minores & minores in infinitum.

# AXIOMATA.

## I.

*Qui numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem æquemultiplices ſunt; inter ſe ſunt æquales.*

## II.

*Quorum idem numerus æquemultiplex eſt, vel æquemultiplices ſunt æquales; inter ſe æquales ſunt.*

## III.

*Qui numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem, eadem pars, vel eadem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.*

## IV.

*Quorum idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eadem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.*

HÆc axiomata quatuor reuocari poſſunt ad noſtra addita initio libri quinti vniuerſalia;

uerſalia; vel ad vniuerſalia libri primi; vel demonſtrari per propoſitiones libri quinti ſumptas in vniuerſum.

V.

*Vnitas omnem numerum per vnitates qua in ipſo ſunt, hoc eſt per ipſummet numerum metitur.*

V I.

*Omnis numerus, ſeipſum metitur per vnitatem.*

V I I.

*Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit; metietur multiplicans productum per multiplicatum; multiplicatus autem eundem per multiplicantem.*

HOc manifeſtum eſt ex definitione 23. huius libri.

V I I I.

*Si numerus numerum metiatur; & ille per quem metitur, eundem metietur per eas qua in metiente ſunt vnitates, hoc eſt per ipſum numerum metientem.*

VEritas huius axiomatis dependet ex defin. 23. & axiomate præcedente 7.

I X.

*Si numerus numerum metiens multiplicet eum per quem metitur, vel ab eo multiplicetur; illum quem metitur producet.*

DEclarabitur per definitionem 23. citatam huius libri.

X.

*Numerus quotcunq; numeros metiens, compoſitum quotcumque ex ipſis metitur.*

ERit enim compoſitus numerus multiplex ipſius metientis numeros partiales componentes compoſitum numerum, ergo ipſe metiens partiales, erit pars compoſiti, quare ipſum metietur iuxta defin. 2. & 5. libri huius.

X I.

*Numerus quemcumq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum quem ille metitur.*

NAm dimenſus ab dimenſo minore alio, erit multiplex illius minoris per defin. 5. libri huius; diuiſo hoc maiore in partes æquales metienti prædicto, has omnes ſeorſim metietur alter minor metiens prædictum minorem, per defin. 2. ergo per axioma præcedens 10. metietur hic minor numerum maiorem dimenſum ab numero quem metitur hic minor; nimirum compoſitum ex illis partibus dictis.

X I I.

*Numerus metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.*

CVm enim ablatus & reliquus numerus coniuncti efficiant totalem numerum. Si numerus non metietur reliquum, licet metiatur ablatum, non metiretur totum, contra hypotheſim; igitur metietur reliquum.

# PROPOSITIONES.

## P R I M A.

Si duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore; alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad aſſumpta fuerit vnitas: qui principiò propoſiti ſũt numeri, primi inter ſe erũt.

A..........E..G.B

C... F .. D

H

SVppoſitio. Duo numeri inæquales AB maior, CD minor, ſint propoſiti. & quoties fieri poteſt minor CD detrahatur de maiore AB; & reliquus EB, dematur ab alio minore CD, ita vt reliquus ſit FD; & iſte reliquus FD, auferatur ab alio EB ſuperiore, reſiduuſque ſit GB: (ſic enim alterna detractio

ctio fit quoties fieri poteſt: ) & in huiuſmodi detractionibus alternis numerus reliquus nunquam præcedentem à quo detrahitur, metiatur quoad vſque perueniatur ad vnitatem GB deueniatur, quæ per axioma 5. numerum præcedentem à quo tollitur, menſurat. Aſſero duos illos numeros AB, CD, propoſitos inæquales, eſſe primos inter ſe, iuxta definitionem 12. hoc eſt, eos tantummodò vnitatem communi menſura metiri.

Apparatus. Si duo numeri dati AB, CD, non ſint primi inter ſe, metietur illos communis menſura numerus aliquis, exempli gratia H: Si enim numerus aliquis eos non metiatur, erit vnitas eorum menſura communis, & ſic per def. 12. cit. erunt inter ſe primi numeri. Verùm quia illud non manifeſtum eſt intellectui, ſupponendo eos numerum aliquem H menſurare, ſi ad aliquod abſurdum conſequens deducatur diſcurſus, ſignum erit euidens intellectui non poſſe eos numerum aliquem menſurare: quare relinquetur vt vnitas eos metiatur, vnde per def. cit. 12. erunt inter ſe primi numeri.

Demonſtratio. Ponitur H numerus metiri numeros datos AB, CD: ſed CD numerus facta illa detractione antecedente quoties fieri potuit, metitur numerum AE, ergo cùm H metiatur CD, metietur etiam AE, per ax. 11. ſed & H metitur numerum totum AB ex ſuppoſitione, ergo per ax. 12, metietur etiam numerum EB reliquum, quandoquidem oſtêſus eſt metiri ablatum AE. Prætereà numerus EB metitus eſt per detractionem numerum CF, & H numerus oſtenſus eſt menſurare numerum EB, ergo per 11. ax. numerus H metietur numerum CF ablatum ab totali CD iam menſurato ex ſuppoſitione ab eodem numero H; ergo per ax. 12. idem numerus H metietur & reliquum numerum FD. Denique FD numerus per detractionem menſurauit numerum EG, & numerus H oſtenſus eſt metiri numerum FD; ergo per axioma 11. metietur etiam numerum EG ablatum ex EB numero iam oſtenſo dimenſo ab H numero; quare per axioma 12, idem numerus H metietur reliquum GB. metiri autem eſt adæquari ſemel vel pluries: ergo numerus H adæquabitur vnitati GB, numerus non numero, vel totum parti, contra axioma 19. libr. 1. Abſurdum hoc deductum, indicat ſuppoſitionem contradicentem aſſertioni eſſe reſpuendam, & amplectendam propoſitionis huius aſſertionem.

## PROPOSITIO II.

**Duobus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.**

SVppoſitio. Datorum numerorum AB, CD; non primorum, oporteat communem illorum menſuram maximam reperire.

Apparatus. Alterna detractione quoties fieri poteſt dematur minor de maiore, vti facta eſt in prima propoſitione: hoc eſt ex AB detrahatur CD, & reſiduus EB dematur ex CD, reſiduuſque ſit FD numerus aliquis metiens præcedentem EB: ſi enim reſidua eſſet vnitas, dati numeri eſſent primi inter ſe, per prop. præcedentem primam, contra hypotheſim. Aſſero verò vltimum numerum relictum FD, poſt alternas detractiones, eſſe maximam menſuram datorum numerorum AB, CD, non primorum.

A . . . . . E . . . . B

C . . . . F . . D

G

Demonſtratio circa duo diuerſa verſari debet, Primùm, numerum FD, eſſe menſuram communem datorum numerorum AB, CD. Alteram eſſe maximam, ita vt non poſſit dari maior in numeris menſura communis illis. Imprimis numerus FD, ſe ipſum metitur, per axioma 5. Sed & metitur ipſum EB numerum, & EB ipſum CF, per apparatum factum, ergo per 11. ax. metietur idem numerus FD; ipſum CF; & per axioma 10, metietur compoſitum CD ex CF & FD. Sed per apparatum CD numerus menſurauit numerum AE, ergo per 11. ax. numerus FD metiens numerum CD, metietur & numerum AE: oſtenſus verò eſt numerus FD, metiri numeros EB, AE, componentes totum datum numerum AB, ergo per 10. ax. metietur etiam numerus FD, numerum AB: Quare numerus FD menſura eſt communis numerorum datorum AB, CD, cùm oſtenſus ſit eos metiri. Reſtat oſtendere eſſe maximam eorum menſuram: Si non ita ſit, eſto alius numerus G maior eorum menſura communis: Verùm cùm G numerus ex ſuppoſitione aduerſarij metiatur numerũ CD, & CD numerus metietur numerum AE, etiam G numerus

merus

merus metietur numerum AE per 11.ax. Sed & G metitur totum numerum AB ex ſuppoſitione,& oſtenſus eſt metiri ablatū AE,ergo metietur reliquum numerum EB per 12. ax. Sed & EB numerus menſus eſt numerū CF, ergo G metiens EB, metietur & CF per 11. ax. Cùm ergo G metiatur totum numerum CD ex ſuppoſitione, & ablatum CF oſtenſus ſit metiri,metietur etiam per 12.ax.reliquum numerum FD,maior numerus minorem.Hoc abſurdum conſequens ad antecedens contradicens ſecundæ partis aſſertionis huius propoſitionis, condemnat antecedens illud falſitatis,& adſtruit reliquum numerum FD,metientem ambos datos AB, CD numeros, eſſe maximam eorum menſuram.

## COROLLARIVM.

*Numerus metiens duos numeros, metitur quoque maximam eorum communem menſuram.*

HOc demonſtratum in numero G, metiente numeros AB, CD, & maximam eorum menſuram FD.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I.

*Propoſitis duobus numeris inæqualibus, factaq; alterna detractione vti in ſuppoſitione prima propoſitionis tradita eſt; reſiduuſq; fuerit aliquis vltimus numerus præcedentem metiens, ipſe erit maxima communis menſura datorum numerorum inæqualium.*

IStud oſtenſum eſt in numero vltimo FD, metiente ſuum præcedentem EB,facta detractione alterna continua prædicta in duobus numeris datis AB, CD,quorum erit maxima communis menſura, vti demonſtratum eſt.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### II.

*Minor numerus ſublatus quoties fieri poteſt, à maiore nihil relinquens, ipſe erit menſura communis dati maioris & minoris.*

NAm ſe ipſum ille numerus minor metitur, per axioma 5. & ipſum maiorem ex ipſa operatione, ergo per præcedens corol. noſtrum, erit datorum maxima communis menſura.

## PROPOSITIO III.

### Tribus datis numeris non primis inter ſe, maximā eorum communem menſuram reperire.

SVppoſitio. Sint tres dati numeri non primi inter ſe, A.B.C.& oporteat communem eorum maximam reperire.

A..............

B............ D ....

C...... E ..

F

Apparatus. Per præcedentem propoſitionem 2 repėriatur maxima menſura D, communis duobus numeris A, B. Iam verò D ſi non metiatur etiam numerum C,ſaltem D & C numeri erunt compoſiti; quandoquidem A, B, C, dantur inter ſe compoſiti, eorum menſura communis metietur etiam D maximam menſuram numerorum A & B per coroll. prop. 2. ſed & hæc menſura communis etiam metitur numerum C; ergo per def.14. erunt numeri compoſiti D & C: quare per prop.præcedentem reperietur eorum maxima menſura communis E, quam dico eſſe maximam menſuram trium datorum numerorum A, B, C.

Demonſtratio quod E ſit menſura communis datorum numerorum A,B,C, E metitur numeros C & D,D verò metitur numeros A & B ex apparatu; ergo per 11.ax. E metietur numeros A & B; ſed & oſtenſus eſt numerus E metiri numerum C, ergo metietur E tres numeros datos A,B, C. ſupereſt demonſtrandum quod E ſit maxima menſura eorundem trium numerorum A, B, C. Sit ſi fieri poſſit alius numerus F maior numero E, maxima menſura numerorum A,B,C. Iam verò cùm F metiatur A & B duos numeros, metietur per coroll.prop.præc. maximam eorum menſuram repertam D: ſed etiam F metitur C ex ſuppoſitione, & vt oſtendimus metitur etiam D: ergo per cit.coroll. metietur etiam E maximam eorum menſuram communem repertam E, maior numerus minorem, quod abſurdum eſt: Ergo poſitio vnde procedit, falſa erit, videlicet maiorem numerum quàm E, metiri tres numeros datos A, B, C, non primos inter ſe: ergo ipſe numerus E, erit maxima eorum menſura communis.

COROL-

## COROLLARIVM.

*Numerus metiens tres numeros, metitur etiam maximam eorum menſuram.*

HOc oſtenſo in numero F metiente tres numeros A, B, C, & maximam eorum menſuram E.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Tribus datis numeris non primis inter ſe, reperta maxima menſura inter duos illorum, & alia maxima menſura inter vltimum, & illam menſuram inter duos primos: hæc vltima maxima menſura, erit maxima communis omnium trium.*

HOc iam oſtendimus in numero E maxima menſura numeri C vltimi è tribu datis A, B, C, non primis inter ſe, & numeri D, maximæ menſuræ duorum primorum A, & B.

## COROLLARIVM II. NOSTRVM.

*Datis pluribus quàm tribus quocumq; numero, numeris non primis inter ſe, reperietur maxima eorum menſura communis, primo de tribus vti in hac propoſitione: prætereà reperiendo maximam menſuram inter quartum & maximam menſuram trium: & ſi ſint alij, reperiendo ſemper maximam menſuram communem vltimo & maxima menſura ſuperiorum reperta: vltima enim menſura huiuſmodi maxima reperta, erit maxima omnium datorum numerorum menſura communis.*

DEmonſtratio huius erit eadem proportione ſeruata quæ de maxima menſura reperta communis tribus numeris non primis inter ſe.

## PROPOSITIO IV.

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris; aut pars eſt, aut partes.

DEmonſtratio. Numerus quicumque minor r[illegible]ſpectu cuiuſcumque maioris numeri, ita ſe habet vt communis eorum menſura ſit ſolùm vnitas, vel numerus maxima eorum menſura communis. Si primùm, quælibet vnitas minoris erit pars licet impropriè dictæ maioris numeri; quare totus minor numerus erit partes maioris. Si ſecundùm, erunt compoſiti numeri illi duo per defin. 14. Iam verò vel minor numerus metitur adæquatè maiorem, vel non: ſi metitur erit pars illius per def. 3. ſi inadæquatè, reperietur per prop. 2. maxima menſura communis illorum, quæ metietur ambos, ſed pluries maiorem quàm minorem, quare hæc menſura maxima communis dicetur per def. 3. cit. pars maioris numeri; ergo etiam ſingulæ partes minoris correſpondentes maximæ menſuræ illi communi prædictæ, partes erunt maioris numeri; & ſic totus minor numerus erit partes maioris. Cùm ergo probauerimus in omni genere numerorum; primorum videlicet inter ſe, vel compoſitorum, minorem numerum maioris eſſe partem aut partes; tota propoſitio abundè demonſtrata erit.

## PROPOSITIO V.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

DEmonſtratio. Quandoquidem dantur duo numeri minores, qui ſint reſpectu maiorum ſuorum propriorum numerorum eadem pars, eandem habebit rationem primus ad ſecundum, quam tertius ad quartum: ergo per propſit. 12. libr. 5. & prop. 9. digreſſionis noſtræ ad hûc librum 7. primus & tertius numerus videlicet ſimul antecedentes, ad ſecundum quartum numeros ſimul ſumptos, nimirum conſequentes, eandem habebunt rationem vt vnus vnius, hoc eſt erunt eadem pars, quod erat propoſitum.

## PROPOSITIO VI.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes; Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

HÆc propoſitio demonſtrabitur per eandem prop. 12. lib. 5. & prop. 9. digreſſionis noſtræ citatæ in demonſtratione præcedentis propoſitionis: imò demonſtrata manet in illis duabus propoſitionibus citatis.

PRO-

## PROPOSITIO VII.

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit; qualis totus totius.

DEmonſtratio. Cùm detur numeri numerus pars, qualis ablatus ablati: erit totus numerus minor ad totum numerum maiorem, in ratione partis; qualis ablatus ad ablatum: & in genere totus ad totum, vt ablatum ad ablatum: ergo per prop. 19. libr. 5. & 9. propoſ. digreſſionis noſtræ ad hunc librum, erit reliquus numerus ad reliquum vt totus ad totum, hoc eſt erit reliquus numerus reliqui eadem pars, qualis totus totius, ſicuti fuit propoſitum.

## PROPOSITIO VIII.

Si numerus numeri partes fuerit; quales ablatus ablati: Et reliquus numerus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

QVandoquidem propoſitio 19. li. 5. iuxta propoſ. 9. noſtræ digreſſionis ad hunc librum, & vniuerſaliſſima; vera erit in hac ſpecie rationis. quare demonſtrata remanet hæc propoſitio.

## PROPOSITIO IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſsim quæ pars eſt, aut partes, primus tertij; eadem pars erit vel eædem partes, ſecundus quarti.

CVm detur numerus numeri pars, & alter numerus alterius numeri eadem pars; Primus numerus ad ſecundum eandem habebit rationem partis, quàm tertius ad quartum: ergo per propoſ. 16. libr. 5. vniuerſaliſſimè explicatam in propoſ. 9. digreſſionis noſtræ ad hunc librum, viciſſim erit primus tertij eadem pars vel partes, ſicut ſecundus quarti. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſsim quæ partes eſt primus tertij, aut pars; eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

HÆc propoſitio continetur in illa vniuerſaliſſima 16. libr. 5. intellecta iuxta ea quæ diximus in propoſit. 9. digreſſionis noſtræ ad hunc librum. quare in illa demonſtrata relinquitur in hac ſpecie proportionis partium.

## PROPOSITIO XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

HÆc propoſitio intelligenda in numeris, quia de numeris agitur. Et eius firmitas ac veritas continetur ſub vniuerſaliſſima propoſit. 19. libr. 5. cum explicatione propoſit. 9. digreſſionis noſtræ ad hunc librum.

## PROPOSITIO XII.

Si ſint quotcumque numeri proportionales; erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

DEmonſtratio huius propoſitionis manifeſta eſt in demonſtratione prop. 12. libr. 5. iuxta propoſ. 9. digreſſionis noſtræ ad hunc librum.

## PROPOSITIO XIII.

Si quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſsim proportionales erunt.

HÆc propoſitio demonſtrata remanet in propoſitione 16. libr. 5. vniuerſaliſſima, iuxta ea quæ diximus in propoſ. 9. digreſſionis noſtræ ad hunc librum.

## PROPOSITIO XIV.

Si ſint quotcumq́ue numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

NItitur hæc propoſitio in materia numerorum iuxta data, propoſitioni 22. lib. 5. vniuerſaliſſimæ de omni genere quantitatis, iuxta ea quæ explicauimus in propoſ. 9. digreſſionis ad hunc librum. quare demonſtrata relinquitur.

## PROPOSITIO XV.

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſsim, æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

VNitas numerum metiens eſt eius pars impropriè licet dicta, ex dictis in deſ. 3. ſed datur vnitas numerum quempiam metiens, æquè ac alter numerus alium numerum; ergo tam vnitas quàm ille numerus minor metiens, erunt eadem pars ſuorum propriorum maiorum numerorum: ergo per prop. 9. vel 10. libri huius, vel 16. lib. 5. vniuerſaliſſimè explicatam in prop. 9. digreſſionis noſtræ ad hunc librum, & defin. 20. libri huius, viciſſim æquè vnitas tertium numerum metietur & ſecundus quartum, vel erunt eædem partes vel eadem pars illorum propriorum maiorum numerorum.

## PROPOSITIO XVI.

Si duo numeri mutuò ſeſe multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipſis, æquales inter ſe erunt.

SVppoſitio. Numerus A 3. multiplicans B 4, fecerit C 12. Tùm numerus B 4, multiplicans A 3, fecerit D 12: hoc eſt duo numeri A 3. B 4, ſe mutuò multiplicantes, fecerit aliquos numeros C, D: Dico hos progenitos numeros C, D, eſſe æquales inter ſe.

A 3. B. 4

C 12

E 1

B 4. A 3.

D 12.

Demonſtratio. Per ſecundam definitionem multiplicationis numerorum traditam in defin. 15. libri huius, In prima multiplicatione ex A in B fit C, ergo erit C ad B vt A ad E vnitatem; & iuxta corollarium prop. 4. libr. 5. elem. & prop. 9. digreſſionis noſtræ ad hunc librum erit E ad A, vt B ad C; & viciſſim per propoſ. 16. lib. 5. E ad B vt A ad C: Sed etiam in ſecunda multiplicatione ex B in A, dùm fit D, erit etiam per cit. defin. D ad A, vt B ad E vnitatem; & iuxta coroll. propoſit. citat. 4. libr. 5. E ad B vt A ad D: Igitur cùm ſit E ad B vt A ad C; & E ad B, vt A ad D; erit per 11. prop. lib. 5. A ad C, vt A ad D; ideoq́ue per 9. prop. lib. 5. iuxta propoſ. 9. digreſſionis noſtræ ad hunc librum C & D, progeniti numeri æquales erunt inter ſe, ex multiplicatione mutua duorum datorum numerorum A & B.

## PROPOSITIO XVII.

Si numerus, duos numeros multiplicans, fecerit aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quàm multiplicati.

SVppoſitio. Numerus A, multiplicans duos numeros B, C, ſeorſim, fecerit aliquos D & E; D quidem ex B in A; & E ex

E ex C in A. Dico ita eſſe D ad E, vt B ad C.

A 3.
B 2. C 4.
F 1.
D 6 E 12.
17
18 prop.

Demonſtratio. Iuxta definitionem multiplicationis numerorum traditam in defin. 15. libri huius, erit D ad B, vt A ad F vnitatem; tùm erit E ad C, vt A ad F vnitatem: ergo per 11. propoſ. libr. 5. ſecundùm explicationem propoſ. 9. digreſſionis noſtræ ad hunc librum, erit D ad B vt E ad C; & viciſſim per propoſ. 16. libr. 5. erit D ad E, vt B ad C, hoc eſt progeniti numeri D & E, vt multiplicati B & C. quod erat propoſitum.

## PROPOSITIO XVIII.

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

SVppoſitio, B numerus multiplicans A, producat D; & alter numerus C, multiplicans numerum eundem A, producat E: Dico eſſe D ad E, vt B ad C; hoc eſt progenitos numeros eandem habere rationem inter ſe, quam multiplicantes.

Demonſtratio. Ex definitione ſecunda multiplicationis numerorum tradita ad definit. 15. libri huius erit D ad B vt A ad F vnitatem; tùm E ad C, vt A ad F vnitatem: quare per 11. propoſit. libr. 5. erit D ad B vt E ad C; & permutando iuxta propoſit. 16. libr. 5, D ad E, vt B ad C. quod erat propoſitum.

## PROPOSITIO XIX.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo & quarto fit numerus, æqualis erit ei qui ex ſecundo & tertio.

Et ſi qui ex primo & quarto fit numerus, æqualis fuerit ei qui ex ſecundo & tertio fit numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

HÆc propoſitio continetur in vniuerſaliſſima 16. libr. 6. iuxta explicationem traditam in propoſit. 9. digreſſionis noſtræ ad hunc librum.

## PROPOSITIO XX.

Si tres numeri proportionales fuerint; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur.

Et ſi qui ab extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt.

HÆc propoſitio etiam reducitur ad vniuerſaliſſimam 17. libr. 6. prout explicauimus propoſit. 9. digreſſionis noſtræ ad hunc librum.

## PROPOSITIO XXI.

Minimi numeri omnium, eâdem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes; maior quidem maiorem, minor verò minorem.

SVppoſitio. Numeri AB, CD, ſint minimi in eadem proportione quam habent alijduo numeri E, F maiores; ita vt ſit AB ad CD vt E ad F: Aſſero illos minimos numeros AB, CD, æquè metiri ſuos proprios maiores E, F; ita vt maior AB metiatur maiorem E, & minor CD minorem F.

A B. G. C D. H.
E. F.

Demonſtratio. Eſt ex datis AB ad CD vt

E ad F, ergo per propoſ. 13. libri huius, erit AB ad E, vt CD ad F: cumque AB & CD ſint minores reſpectu ſuorum maiorum proriorum E & F, erunt illi minores ſuorum maiorum eadem pars vel eædem partes, iuxta definit. 20. libri huius. ſed non poſſunt eſſe partes illorum ſuorum maiorum; nam ſi reſoluerentur ſinguli illi minores AB, CD, in ſuas partes, quælibet illarum, puta G vna pars ipſius AB, & H vna partes ipſius CD; cùm ſint tot numero partes in AB quàm in CD, reſpectu ſuorum maiorum E, F; eſſet eadem pars G ipſius E, quæ H ipſius F, ac proinde eſſet G ad E vt H ad F, per definit. cit. 20. & viciſſim per 13. propoſ. lib. huius G ad H vt E ad F, minores videlicet G & H, quàm dati minimi AB, CB, haberent eandem rationem quam maiores, contra hypotheſim. igitur non erunt AB, CD, eædem partes maiorum ſuorum E, F; relinquitur ergo vt ſint eadem pars illorum: æquè ergo AB metietur E, vt CD ipſum E, ex definitione partis, & eiuſdem partis. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XXII.

Si fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur & in eadem ratione; fuerit autem perturbata eorum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Hvius propoſitionis demonſtratio continetur in demonſtratione propoſitionis 23. libr. 5. vniuerſalis & abſtrahentis à magnitudinibus & numeris, prout explicauimus in propoſ. 9. digreſſionis noſtræ ad hunc librum.

## PROPOSITIO XXIII.

Primi inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

Svppoſitio. Numeri AB, CD, ſint inter ſe primi: Dico eos eſſe omnium minimos cum eis rationem habentium eandem, puta E & F; ita vt ſit AB ad CD, vt E ad F.

A B. C D.

E. F.

G. H.

I.

Demonſtratio. Si non ſint minimi, ſint alij minores G, H, in eadem proportione qua AB ad CD: Tunc per propoſ. 21. libr. huius, G æquemetietur AB, vt H ipſum CD; atque adeò ſecundùm aliquem numerum puta I, qui indicet ſuis vnitatibus illam æqualitatem in menſuratione: vnde toties G metietur AB, & H metietur CD, quot vnitates continet I numerus; ſed per axioma 5. vnitas numerum omnem metitur per vnitates quæ ipſo ſunt, hoc eſt per ipſummet numerū metitur: ergo vnitas æquè metietur numerum I, vt G numerus ipſum AB; igitur per propoſ. 15. lib. huius, viciſſim vnitas toties metietur G, quoties I ipſum AB. Eodem modo, quia vnitas æquemetitur numerum I, vt H numerus ipſum CD numerum; viciſſim etiam per cit. propoſ. 15. vnitas toties metietur H, quoties I ipſum CD: Numerus igitur idem I, metietur ipſos numeros datos AB, CD; ergo erit eorum menſura communis; ergo per defin. 14. erunt numeri AB, CD, compoſiti inter ſe, qui dati ſunt primi: Cùm igitur ſint diuerſæ ſpeciei numeri primi inter ſe, & compoſiti, & admittat aduerſarios eos eſſe primos inter ſe, & ex ſua poſitione ſequatur eos eſſe compoſitos, ſeu non primos inter ſe: manifeſta fit eius poſitio antecedens falſa, & aſſertio huius propoſitionis ei contradicens vera relinquitur.

## PROPOSITIO XXIV.

Minimi omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

Svppoſitio A & B ſint minimi numeri omnium eandem cum eis rationē habentium: Dico illos numeros A & B, eſſe primos inter ſe.

A. B.

C.

D. E.

Demonſtratio. Si non ſint primi, hoc eſt nullam aliam obtineant menſuram communem ab vnitate; obtineant ſi fieri poſſit dati numeri A, B, aliquam menſuram communem

C quæ

C quæ ſit numerus. Tunc C metietur A numerum maiorem per numerum aliquem D minorem ipſo A; & C metietur B alium datum numerum minorem, per aliquem alium E numerum minorem ipſo B: (nam quando numerus aliquis alium metitur, ipſum metitur per alium numerum minorem ipſo menſurato, quia communis menſura eſt pars menſurati, minorq́; illo, & ideò vices quibus eum menſurat cõficiunt numerum minorem menſurato.) Quod ſi numeri D & E multiplicent C menſuram communem inuectam numerorum A & B minimorum datorum, producent ipſos numeros A & B, iuxta 9.ax. libri huius. Igitur per prop. 18. libr. huius, erit A ad B vt D ad C: Sed numeri D & C, oſtenſi ſunt minores quàm numeri A & B; ergo A & B numeri non erunt minimi eandem cum eis rationem habentium, contra datum. Antecedens igitur poſitio deſtruens datum admiſſum, falſa erit; quare propoſitio vera erit illi contradicens poſitioni.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Numerus metiens alium numerum, ipſum metitur per alium numerum minorem menſurato, vel per vnitatem.*

SI enim menſuratus numerus ſit æqualis menſurati, fiet commenſuratio per vnitatem. Si verò ſit maior menſurante, numerus per quem fiet menſuratio erit minor menſurato, vti oſtendimus in ipſa demonſtratione.

## PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SVppoſitio. A & B numeri ſint inter ſe primi, & vnum illorum puta A metiatur numerus C aliquis: Dico hunc numerum C & reliquum B, eſſe inter ſe primos.

A. B.

C. D.

Demonſtratio. Si C & B numeri non ſint inter ſe primi, eos aliquis numerus tanquam menſura communis metietur, quiq́ue ſit ſi fieri poſſit numerus D. Iam verò D numerus metitur C & B numeros, ſed C numerus metitur A numerum, ergo per 11. axioma libri huius, D numerus metietur numerum A; dat autem aduerſarius etiam metiri numerum B; ergo numerus D metietur duos datos numeros A & B, vnde fit vt per definit. 14. ſint compoſiti, qui fuerunt dati primi. Poſitio igitur aduerſarij deſtruens hypotheſim falſa erit, & propoſitio vera.

## PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint: etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

SVppoſitio. Sint A & B numeri ſeorſim ſumpti ad tertium numerum C primi: Sitq́ue ex A & B, productus D: Dico hunc progenitum numerum D eſſe etiam primum ad numerum C.

A. B.

C.

D.

E. F.

Demonſtratio. Si D & C non ſint primi inter ſe numeri, ſit ſi fieri poſſit menſura illorum communis numerus E, qui metiatur D numerum per numerum F. Iam verò multiplicando E per F, fiet D, per 9. ax. libri huius; fietq́ue idem numerus D, ſi multiplicetur F per E, iuxta prop. 16. libri huius. Sed etiam datur progenitus idem numerus D, per multiplicationem A in B: habemus ergo quatuor numeros E, F, A, B, quos ſi diſtribuamus hoc ordine, ponendo primum E, A ſecundum, B tertium, F quartum; numerus D factus ex E primo in F quartum, erit æqualis progenito numero D, ex ſecundo A in tertium B; ergo per 19. prop. libri huius, erunt proportionales numeri iſti E, A, B, F, ita vt ſit E ad A, vt B ad F. Verùm quia dantur A & C numeri primi inter ſe, & ponitur ab aduerſario numerus E metiri vnum illorum C, erunt per prop. 25. præcedentem primi inter ſe numeri E & A; & per prop. 23. minimi erunt iidem numeri E & A, in ſua proportione: Oſtendimus autem eſſe E ad A, vt B ad F, ergo per prop. 21. libri huius, ipſi numeri E, A, æquemetientur ipſos B, F, proprios numeros maiores eandem proportionem habentes, E quidem ſuum B, & A ſuum F maiorem. Cùm igitur probauerimus E numerum metiri B; &

ponatur ab aduerſario idem numerus E metiri numerum C; non erunt primi numeri B & C, iuxta definitiones 12. & 14. libri huius, contra hypotheſim admiſſam. Conſequens iſtud deductum ab poſitione aduerſarij contradicente aſſertioni huius propoſitionis, manifeſtam facit falſitatem poſitionis, & veritatem aſſertionis.

## PROPOSITIO XXVII.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus, ad reliquum primus erit.

SVppoſitio. Sint A & B primi numeri inter ſe, productuſque ſit C numerus ex quolibet illorum A vel B, hoc eſt eius quadratus numerus: Dico hunc numerum C, eſſe primum ad alium è numeris datis non multiplicatum. Et ne verſemur in ambiguo, ponatur C quadratus numeri A: dico C numerum eſſe primum ad numerum B reliquum.

A. B.

C.

D.

Demóſtratio. Sumatur numerus D æqualis ipſi A, certum eſt numerum C produci tàm benè ex D in A, quàm ex A in ſeipſum. Dantur autem A & B, inter ſe primi; ergo etiam A & D, ad B primi erunt; ergo C productus numerus ex D in A, per præcedentem propoſ. 26. primus erit ad reliquum B: oſtendimus autem eundem numerum C produci etiam ex A in ſeipſum, ergo C numerus primus erit ad alterum B. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XXVIII.

Si duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter ſe erunt.

SVppoſitio. Sit vterque numerus A, B, ad vtrumque C, D, numerum primus; producaturque numerus E, ex A in B; & gignaturque F, ex C in D: Dico E & F productos illos numeros, eſſe primos inter ſe.

A. B.

E.

C. D.

F.

Demonſtratio. Datur vterque numerus A & B, primus ad C, erit per prop. 26. productus numerus E, ex A in B, etiã primus ad C. Præterea cùm A & B ſint primi ad numerum D; erit per eandem prop. cit. numerus E ex ipſis procreatus, etiam primus ad D. Cùm ergo numeri C, D, primi ſint ad numerum E, erit per cit. prop. 26. numerus F ex illis factus per multiplicationem primus ad numerum E: Igitur duo numeri E, F, primi inter ſe erunt, quod erat oſtendendum.

## PROPOSITIO XXIX.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſe ipſum, fecerit aliquem; & geniti ex ipſis primi inter ſe erunt. Et ſi qui in principio, genitos ipſos multiplicãtes, fecerint aliquos; & hi quoq; primi inter ſe erunt. Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SVppoſitio. Duo numeri A, B, ſint primi inter ſe; & A multiplicans ſeipſum, fecerit C; tùm B multiplicans ſeipſum produxerit D: Dico primò quod hi progeniti numeri C, D, ſint primi inter ſe. Quod ſi iidem A & B primò dati numeri primi inter ſe, multiplicando ſuos proprios progenitos numeros C, D, (hoc eſt A multiplicando C, & B multiplicando D,) fecerint aliquos alios numeros E, F; E quidem ex C in A; F verò ex D in B: Dico ſecundò progenitos numeros iſtos poſtremos E, F, etiam eſſe primos inter ſe: & ſic tertiò dico ſemper in infinitum progrediendo illa ratione prædicta, circa extremos numeros factos euenire, vt ſint primi inter ſe.

| | |
|---|---|
| A 5 | B 3 |
| C 25 | D 9 |
| E 125 | F 27 |
| G 625 | H 81 |

Demon-

Demonſtratio primæ aſſertionis. Concipiatur A numerus bis ſumptus A,A; tùm numerus B etiam bis ſumptus. A primò ſumptus erit ad B primum & ſecundum B, primus: eodem modo A ſecundò ſumptus, erit ad B primum & ſecundum primus: ergo per propoſ. 28. præced. producti numeri C,D, ex illis A, & B, hoc eſt ex ſeipſis, erunt primi inter ſe. quod erat concludendum.

Demonſtratio ſecundæ aſſertionis. Dantur numeri A, B, primi inter ſe; ergo per propoſ. 27. libri huius, C numerus factus ex A in ſe ipſum, erit primus ad B; tùm etiam D numerus factus ex B in ſeipſum ex duobus numeris C,& B, primis inter ſe oſtenſis, erit per prop. eandem citat. 27. primus ad alium A numerum.

Quia verò oſtendimus, C numerum eſſe primum ad B;& D numerum eſſe primum ad A; & numeros C, D eſſe primos inter ſe; & dantur A,B, numeri primi inter ſe; erunt numeri duo A, C, vterque vtriuſque B,D, numerorum primus: quare per prop. 28. præcedentem, productus numerus E, ex A in C, erit primus ad numerum F progenitum ex B in D. quod erat ſecundò aſſertum.

Demonſtratio tertiæ aſſertionis. Fiat vlterius ex A in E, numerus G; & ex B in F, numerus H: etiam numeri facti G,H, primi inter ſe erunt. quod ſic oſtenditur. Manifeſtum eſt ex diſcurſu demonſtrationis ſecundæ partis ſeu aſſertionis præcedentis numeros A,C, primos eſſe ad B, ergo per prop. 26. lib. huius, progenitus E, ex A in C, primus erit ad B. Similiter quia B, D, numeri oſtenſi ſunt in ſuperioris aſſertionis demonſtratione, primi ad A, erit per eandem prop. 26. cit. progenitus numerus F, ex ipſis, primus ad eundem numerum A. Iam verò quia A datur primus ad B,& oſtenſus eſt E primus ad eundem B: tùm quia datur B primus ad A, & oſtenſus eſt F primus ad eundem A; & oſtenſi ſunt E, F, primi inter ſe: erit A,E, vterque, ad vtramque B,F, primus: ergo per propoſ. 28. præcedentem, erit G numerus factus ex A, E, primus ad numerum H, factum ex B, F. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XXX.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam vterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit. Et ſi vterque ſimul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; etiam qui in principio numeri primi inter ſe erunt.

SVppoſitio. Duo numeri A, B, primi ſint inter ſe: Dico primò vtrumque ſimul AB, eſſe primum ad A,& ad B. Sit verò A B, vterque ſimul ad quemlibet illorum, v.g. A, primus: Dico ſecundò, illos A,B, numeros primò datos, eſſe primos inter ſe.

A, B,

D.

Demonſtratio primæ aſſertionis. Si A B vterque ſimul non ſit primus ad A; obtineant ſi fieri poſſit menſuram communem, numerum D: Tunc quia D numerus metitur totum numerum AB compoſitum ex A, B, & metitur etiam ablatum A; menſurabit etiam reliquum B, per 12. ax. libri huius: ergo quia D numerus metitur A, & B, numeros, non erunt per def. 14. numeri primi A & B, dati primi. hoc abſurdum conſequens ad poſitionem aduerſarij negantem AB ſimul ſumptos numeros eſſe primos ad A, condemnat illam falſitatis: primus ergo erit vterque ſimul AB ad A vnum illorum.

Demonſtratio ſecundæ aſſertionis. Si non ſint A, & B, numeri primi inter ſe, metiatur illos communis menſura D numerus, ſi fieri poſſit. Iam quia D numerus metitur A & B datos numeros, metietur etiam per 10. axioma libri huius, numerum A B compoſitum ex illis. Cùm igitur D numerus metiatur A numerum vnum ex datis duobus A, B, & compoſitum A B, ex illis, non erunt A,& AB numeri primi inter ſe per def. 14. contra hypotheſim. hoc abſurdum conſequens ad poſitionem aduerſarij contradicentem huic ſecundæ aſſertioni, accuſat illam poſitionem falſi: quare aſſertio vera erit.

### COROLLARIVM.

*Numerus compoſitus ex duobus ſi ad vnum illorum primus fuerit, ad alium etiam reliquum primus erit.*

SI enim A B ſimul vterque primus eſt ad A, erunt A & B, primi numeri inter ſe, per ſecundam aſſertionem huius propoſitionis. Cùm ergo A, B, primi numeri ſint inter ſe, erit vterque ſimul A B, ad B primus per 1. aſſertionem. Numerus igitur A B, compoſitus ex duobus A, B, ſi ad vnum illorum primus fuerit, ad reliquum etiam primus erit.

## PROPOSITIO XXXI.

### Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

SVppoſitio. Primus numerus A, non metiatur numerum B: Dico numerum A eſſe primum ad B numerum, quicumque ſit, etiam compoſitus.

A. B.

C.

Demonſtratio. Si numerus A ad numerum B non ſit primus, illos metietur communis aliquis numerus C; ergo per def. 13. libri huius, numerus A datus primus, non erit primus ſed compoſitus. Abſurdum hoc condemnat falſi poſitionem cõtradicentem huic propoſitioni, quæ ideò vera erit.

## PROPOSITIO XXXII.

### Si duo numeri ſeſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem, genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus; is etiam vnum eorum qui in principio, metietur.

SVppoſitio. Duo numeri A,B, ſeſe mutuò multiplicantes producant numerum C, menſuratum ab numero aliquo primo D: Dico hunc numerum D metiri etiam vnum numerorum datorum A, B, initiò, ſi vtrumque non metiatur.

A. B.

C.

D. E.

Demonſtratio. Numerus D metiens C numerum ex datis, non metiatur A, ſed C, per numerum E: multiplicando D per E, producetur C numerus iuxta 9. ax. libri huius, qui etiam ex datis productus eſt ex A in B: habemus ergo quatuor numeros, A,B,D,E, quorum duo A,B, ſe multiplicãtes,& alij duo D, E, ſe multiplicantes, producunt eundem numerum C: ſi ergo illos ita ordinauerimus vt primus D, ſecũdus A, tertius B, quartus E, ſit: productus numerus C, ex primo D in quartũ E, erit idem qui producitur ex ſecundo A in B tertium: erunt igitur quatuor illi numerĩ D,A,B,E, proportionales per propoſ. 19. lib. huius. Quia verò D ad A primus eſt per prop. 31. præced. quia cum non metiri ponitur, erũt per propoſ. 23. D & A numeri minimi in ſua proportione: & per prop. 21. æquemetientur alios maiores numeros B, E, proprios in ſua proportione; hoc eſt D metietur B. quare ſi D numerus non metiatur A numerum vnum è datis, metietur alterum B. Eodem artificio per eadem principia oſtendetur D numerus metiens C numerum, ſi non metiatur B, metiri alium A. Manifeſtum ergo erit propoſitum.

## PROPOSITIO XXXIII.

### Omnem compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SVppoſitio. Sit A numerus compoſitus: Dico eum metiri aliquem numerum primum.

A.

B. C.

Demonſtratio. Quia datur numerus A compoſitus, eum aliquis numerus metietur, iuxta defin. 13. vel etiam plures. Sit verò omnium illorum minimus B, hunc probo eſſe primum numerum. Si enim B numerus non eſt primus, metietur eum numerus aliquis C. Iam verò quia C numerus metitur B numerum, & B numerus metitur A numerum, metietur C numerus datum numerum A, iuxta 11. axio. libri huius. Sed per corollar. noſtrum propoſitionis 24. libri huius, C numerus minor eſt numero B; ergo C numerus erit minor minimo poſito B, quod eſt abſurdum. ergo & id vnde procedit, videlicet B numerum minimum metientem compoſitum A numerum, non eſſe primum: primus ergo erit. Et ideo vera erat propoſitio.

PRO-

## PROPOSITIO XXXIV.

### Omnis numerus, aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

DEmonſtratio. Omnis numerus aut primus eſt aut compoſitus. Si primus eſt, habemus intentum primum: ſi compoſitus eſt, eum aliquis primus numerus metitur per præcedentem propoſ. 33. Vera eſt igitur propoſitio.

## PROPOSITIO XXXV.

### Numeris datis quotcumque; reperire minimos omnium, eandem rationem habentium cum ipſis.

SVppoſitio. Sint quotcumque numeri A, B, C, habentes quaſcumque proportiones ſiue eadem ſit proportio A ad B, quæ B ad C, vel diuerſa: Et oporteat totidem numero reperire alios numeros, qui ſecundùm eaſdem proportiones ſint minimi numeri.

D.

A. B. C.

E. F. G.

H. I. K.

L.

Apparatus. Dati numeri A. B. C. vel ſunt inter ſe primi, aut compoſiti. Si primi, erunt per propoſ. 23. libri huius, minimi omnium eandem rationem habentium. Si verò ſint compoſiti, reperietur per 2. vel 3. prop. libri huius maxima eorum menſura, numerus D, qui metietur ipſos numeros datos A,B,C; per numeros E, F, G; A quidem per E; B per F, C per G: quare ſi per E multiplicauerimus D, fiet A iuxta 9. ax. & ſi per F multiplicauerimus D, fiet B iuxta idem axioma; & ſi per G multiplicauerimus D, fiet C, iuxta idem axioma; productiq; numeri A,B,C, eandem habebunt rationem quam multiplicantes E, F,G, per prop. 17. Nunc probare nos oportet numeros iſtos E,F,G, minimos eſſe omnium eandem rationem habentium, ſi dati A,B,C, non ſint minimi.

Demonſtratio. Si non ſint minimi, ſint ſi fieri poſſit, alij minores H, I, K, in eiſdem proportionibus: ipſi per prop. 21. libri huius, æquemetiétur ſuos maiores proprios A,B,C, ſitque numerus L per quem illos metiuntur. Ergo per axio. 9. libri huius, iſte numerus L multiplicans illos numeros H, I, K, procreabunt datos numeros A, B, C: tùm per axioma 8. metietur L numerus, ipſos A,B,C, numeros, per H, I, K, numeros. Quia verò in apparatu oſtendimus E numerum multiplicantem D, procreare A numerum; & paulò antea nunc probauimus H numerum multiplicantem L, gignere A numerum; habebimus quatuor numeros E,H,L,D, quos ſi diſpoſuerimus hoc ordine, E primum, H ſecundum, L tertium, D quartum; procreatus numerus A ex primo E & D quarto, æqualis erit ſeu idem erit cum A, progenito ex ſecundo H & L tertio; quare per propoſ. 19. libri huius; illi quatuor numeri E,H,L,D, erunt proportionales, ita vt ſit E ad H, vt L ad D: ſed eſt ex ſuppoſitione aduerſarij primus E maior quàm H ſecundus, ergo etiam L tertius maior erit quàm D quartus, ex natura quatuor proportionalium numerorum. Verùm per ſuppoſitionem aduerſarij L metitur numeros A,B,C, datos, ergo D numerus inuentus in apparatu, & conceſſus ab aduerſario, maxima menſura numerorum datorum A, B, C, non erit ipſa maxima menſura, quandoquidem ex eius poſitione ſequitur L maiorem numerum quàm D, eſſe menſuram eorundem numerorum A,B,C. Hæc contradictio conſequens ad poſitionem aduerſarij negãtem numeros E,F,G, eſſe minimos omnium eandem rationem habentium, indicat eſſe falſam, & ipſos numeros E,F,G, eſſe minimos repertos. quod erat faciendum & probandum.

### COROLLARIVM.

*Maxima menſura quotlibet numerorum, metitur ipſos, per minimos numeros omnium eandem rationem habentium.*

OStendimus enim D maximam menſuram numerorum A, B, C, metiri illos per numeros E, F, G, minimos omnium eandem rationem habentium, vt A ad B, & B ad C.

COROL-

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Datis quotcumque numeris, reperientur minimi omnium eandem rationem habentium; ſi maxima menſura datorum reperiatur per 2. vel 3. prop. huius libri; & ſinguli dati diuidantur per hanc menſuram maximam: quotientes proprij erunt minimi termini ſeu numeri quæſiti.*

NAm ex dictis ad definitionem diuiſionis, numerus diuidens metitur diuiſum numerum per quotientem. Quod ſi quotientes illi non ſint minimi termini quæſiti, redibunt argumenta facta in demonſtratione huius demonſtrationis. Sic in exemplo propoſito. Inuenta D maxima menſura communi numerus A,B,C, datis, & diuiſis ſingulis per D, quotientes erunt E, F, G, per quos metitur D, ipſos A,B,C, & oſtendimus non poſſe eſſe alios minimos ſeu minores.

## PROPOSITIO XXXVI.

### Duobus numeris datis, reperire quem illi minimum metiantur numerum.

SVppoſitio. Dati ſint duo numeri A,B, & oporteat reperire minimum numerum menſuratum ab illis.

Apparatus. Duos caſus habet hæc propoſitio, Primus eſt cùm duo dati numeri A, B, ſunt primi inter ſe. Alter quando ſunt compoſiti. In primo caſu, multiplicentur duo numeri dati A,B, vnus per alium, Productum numerum C, dico eſſe numerum minimum quem metiuntur illi dati primi inter ſe numeri A, B. In ſecundo caſu, reperiantur per noſtrum corollarium ad prop. præced. 35. duo numeri C, D, minimi in eadem proportione A ad B, datorum numerorum cōpoſitorum: & multiplicetur A primus per D quartū; vel ſecundus B per C tertium, ſemper producetur E numerus idem vel æqualis per prop. 19. libr. huius: hunc E numerum aſſero eſſe minimum quem metiantur dati numeri A, B, compoſiti.

A. B.

C.

D.

E. F.

Demonſtratio primi caſus. Imprimis numerus A multiplicans B, metietur numerum C productum per numerum B multiplicatum, iuxta 7. axio. tùm B numerus multiplicatus metietur eundem C productum numerum, per multiplicantem A, iuxta idem ax. citat. ergo iam patet ſingulos numeros datos A,B, primos inter ſe, metiri numerum C productum ex illorum A, B, multiplicatione. Quod verò ſit minimus numerus C, ab illis menſuratus ſic oſtendetur. Si numerus C, nōn ſit minimus, ſit ſi fieri poſſit alter illo minor, v.g. D, quem metiatur A per numerum E, & quem metiatur B per numerum F. Certum eſt per ax. 9. tàm ex A in E, quàm ex B in F, vel è contrario produci numerum D: Ergo habemus D numerum factum ex A primo & E quarto; tùm ex B ſecundo & F tertio; ergo per prop. 19. libri huius, erit A ad B vt F ad E: ſed dati ſunt primi inter ſe numeri A,B; ergo per prop. 23. erunt minimi in ſua proportione; & ideo per 21. prop. æquemetientur ipſos F, E, maiores ſuos, videlicet A æquemetietur maiorem F, vt B maiorem ſuum E. Quia verò oſtendimus numerum A multiplicantem E, producere D numerum; & in apparatu ipſum A multiplicantem B, producere numerum C; erit per prop. 17. C ad D, vt B ad E. Denique quia probauimus B numerum metiri numerum E; metietur & C numerus numerum D, iuxta def. 20. huius libri, maior C numerus minorem D. quod abſurdum eſt: ergo & principium ſeu poſitio aduerſarij, vnde profluit abſurdum erit, & aſſertio primi caſus conformis erit rationi.

A. B.

C. D.

E.

F.

G. H.

Demonſtratio ſecundi caſus. Quod numeri A, B, dati compoſiti, metiantur numerum inuentum E, probatur ſic. A multiplicatus ab D producit E, quem producit etiam B multiplicatus ab C, ex apparatu facto; igitur per axioma 7. metientur ſeorſim ſumpti numeri A, B, numerum E. Supereſt oſtendere ipſum E numerum eſſe minimum. Si non ſit minimus E numerus, quem metiantur compoſiti numeri A, B, dati; ſit ſi fieri poſſit alius numerus F minimus, quem metiatur A per G numerum, & B numerus per H numerum: tunc iuxta 9. axio. produ-

producetur F numerus, ex A in G, tùm ex B in H; eruntque hi quatuor numeri proportionales per prop. 19. A primus, B ſecundus, H tertius, G quartus: ſed inuenti ſunt in apparatu, minimi numeri C, D, in proportione A ad B, vel H ad G; ergo per prop. 21. ipſos H, G, numeros æquemetientur, numeri C, D; C quidem ipſum H, & D ipſum G. Quoniam verò probauimus A multiplicantem D, & G; gignere E & F, erit per prop. 17. E ad F, vt D ad G; ſed D metiri G oſtenſum eſt, ergo etiam E metietur F, numerus maior minorem, quod repugnat rationi: ergo etiam poſitio aduerſarij negans aſſertionem huius caſus etiam repugnabit rationi; quare aſſertio vera erit.

## COROLLARIVM

*Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, minor maiorem, producitur numerus minimus, quem illi metiuntur.*

OStendimus enim in ſecundo caſu, poſitis numeris C, D, minimis in proportione A ad B numerorum; numerum E factum ex A minore in D maiorem; vel ex B maiore in C minorem, eſſe minimum, quem A, B, metiuntur.

## PROPOSITIO XXXVII.

### Si duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus quem illi metiuntur, eundem metietur.

SVppoſitio. Duo numeri A, B, ſeorſim metiantur numerum CFD, & E alium numerum minimum: Dico hunc minimum numerum E, etiam metiri eundem numerum CFD.

A. B.

C F D.

E.

Demonſtratio. Si E numerus non metiatur numerum CFD, auferendo ex CFD numero illum E, quoties fieri poteſt, relinquetur numerus minor illo, ex natura metientium inadæquatè: ſit igitur ablatus ex CFD, CF, & relictus FD numerus minor quàm E. Quia A, & B, ſeorſim metiuntur E numerum minimum, & iſte E metitur CF, etiam per 11. axio. ipſi A & B ſeorſim ſumpti metientur ipſum CF: Sed & A, & B, ſeorſim metiuntur totum numerum CFD ex datis, & ablatum CF vti probauimus; ergo etiam metientur ipſi A & B, ſeorſim ſumpti, reliquum FD minorem quàm E minimus datus: ergo E numerus non erit minimus quem metiantur numeri A, B, ſeorſim ſumpti, contra data. hoc abſurdum conſequens ad poſitionem negantem E minimum dimenſum ab A & B ſeorſim ſumptis, metiri CFD numerum quem metiebantur ipſi A & B ſeorſim, indicat falſitatem poſitionis illius, & manifeſtam reddit veritatem propoſitionis.

## PROPOSITIO XXXVIII.

### Tribus numeris datis reperire, quem illi numerum metiantur minimum.

SVppoſitio. Tres dati ſint numeri A, B, C; & inueniendus numerus minimus quem illi metiantur.

Apparatus. Per propoſ. 36. reperiatur minimus numerus D, quem metiantur duo numeri A, B, ex datis tribus. Hic numerus D, vel menſurabitur ab reliquo C numero è datis tribus A, B, C; vel non menſurabitur. Si primum, Dico D eſſe minimum numerum quæſitum. Si ſecundùm, Reperiatur per cit. prop. 36. numerus E minimus quem metiantur numeri duo C, D; Dico E numerum, eſſe minimum, quem metiantur tres dati A, B, C.

A. B. C.

D.

E

DEmonſtratio primi caſus. Si numerus D non ſit minimus, quem metiantur numeri dati A, B, C; ſit ſi fieri poſſit E minimus ille numerus, minor quàm D. Cùm A, & B, metiantur E minorem numerum quàm D, non erit D minimus inuentus per propoſit. 36. contra conceſſa in apparatu. abſurdum hoc indicat poſitionem aduerſarij eſſe falſam, & aſſertionem primi caſus eſſe veram.

A. B. C.

A. B. C.

D.

E.

F.

Demonſtratio ſecundi caſus. Imprimis quod numerus E menſuretur ab tribus datis A, B, C, ſic oſtendetur: ex apparatu, A & B metiuntur D, & D metitur E, ergo per 11. axio. A & B, metientur E; ſed & C metitur eundem E ex apparatu; ergo tres numeri A, B, C, metiuntur E numerum. Iam probabitur quod E ſit minimus numerus quem metiantur A,B,C: ſi non ita ſit, eſto F numerus minor quam E, menſuratus ab A,B,C: Quia A & B, metiuntur numerum F, etiam ipſum F metietur numerus D minimus inuentus in apparatu quem metiuntur A & B,idque iuxta prop. 37. præced. Cumque D & C numeri metiantur ipſum F numerum ex aduerſario minorem quàm E; non erit E minimus numerus in apparatu, quem metiantur C & D, numeri. hoc abſurdum manifeſtam facit falſitatem aduerſarij ponentis E numerum non eſſe minimum quæſitum ſed F; erit ergo ille numerus minimus E quem metiantur tres dati A, B, C. Quin etiam cùm C & D numeri metiantur ipſum F numerum, metietur quoque iuxta prop. 37. præced. F numerum numerus E minimus quem metiuntur iidem C & D, maior minorem. quòd abſurdum eſt.

### COROLLARIVM.

*Si tres numeri numerum quempiam metiantur: etiam minimus quem illi metiuntur, eundem metietur.*

Nam in poſtremo caſu oſtenſum eſt, ex eo quod A, B, C, numeri ponebantur metiri F, ipſũ etiã F menſurari ab E minimo.

## PROPOSITIO XXXIX.

Si numerum quiſpiam numerus metiatur: ille quem metitur partem habebit denominatam à metiente.

Svppoſitio. Numerum A metiatur numerus B: Dico A habere partem aliquam denominatam à B metiente.

A. B

C.

Apparatus. Metiatur B numerus numerum A toties quot ſunt vnitates in numero C.

Demonſtratio. Vnitas ipſum C, & B ipſum A æquemetiuntur ex apparatu: ergo per prop. 15. vnitas erit eadem pars ipſius B, atque C ipſius A: Eſt autem ex dictis in def. partis, in hoc libro, defin. 2. vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B; ergo C pars erit ipſius A denominata ab ipſo B numero metiente. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XL.

Si numerus partẽ habuerit quamlibet: metietur illum numerus à parte denominatus.

Svppoſitio. Numerus A, partem obtineat B, denominãtem numerum C: Dico numerum C denominatum ab illa parte B, metiri ipſum A numerum.

A. B.

C.

Apparatus. Concipiatur vnitas pars denominata ab eodẽ C numero, vt B ab eodem C.

Demonſtratio. Quandoquidem vnitas eſt eadem pars denominata ab numero C; quæ B pars eſt denominata ab eodem numero C; vnitas æquemetietur C, vt B ipſum A; ergo per prop. 15. vnitas eadem pars erit ipſius B, quæ C pars erit ipſius A: ergo C ipſum A, & vnitas ipſum B metietur. quod erat propoſitum.

## PROPOSITIO XLI.

Numerum reperire, qui minimus cùm ſit, habeat datas partes.

Svppoſitio. Datæ ſint partes A, B, C; & reperiendus minimus numerus qui datas habeat partes.

Apparatus. Sint numeri D, E, F, denominati à partibus datis A, B, C: & per prop. 38. reperiatur minimus numerus G, quem metiantur illi numeri D, E, F: Dico G numerum

eſſe

eſſe minimumque datas habeat partes.

D. A.

E. B.

F. C.

G.

E.

Demonſtratio. Imprimis G numerus datas habebit partes: nam D, E, F, numeri metiuntur G numerum ex apparatu, ergo per prop. 39. habebit G numerus partes denominatas ab ipſis D, E, F numeris metientibus, nimirum partes A, B, C, denominatas prædictas ab prædictis D, E, F, numeris. Quod autem G numerus ſit minimus illas obtinens partes, ſic probatur: ſi non eſt minimus, Eſto ſi fieri poſſit H numerus minor quàm G, prædictaſque A, B, C, partes obtineat H numerus: Iam verò quia H numerus partes habet A, B, C, metientur ipſum numeri D, E, F, denominati ab partibus datis A, B, C, iuxta propoſ. præcedentem 40: ſed H ponitur ab aduerſario minor quàm G, ergo G numerus non erit minimus quem metiūtur numeri D, E, F: contra id quod reperimus in apparatu per prop. 38. Abſurdum hoc indicat, alium numerum præter G, non poſſe eſſe minimum obtinentem datas partes A, B, C. Reperimus ergo numerum minimum datas partes habentem, quod erat faciendum.

# COMMENTARIVS IN LIBRVM OCTAVVM ELEMENTORVM GEOMETRICORVM EVCLIDIS.

## PROPOSITIO I.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi verò ipſorum primi inter ſe fuerint: ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SVPPOSITIO. Sint quotcumque numeri continuè proportionales, exempli gratia, iſti quatuor, A, B, C, D, & extremi A, D, ſint primi numeri inter ſe: Dico ipſos datos numeros A, B, C, D, eſſe minimos omnium eandem rationem habentium.

A, B, C, D.

E, F, G, H.

Apparatus. Si non ſint minimi omnium eandem rationem habentium, ſint ſi fieri poſſit, alij tot numero, minimi; & in exemplo allato, ſint iſti quatuor E, F, G, H, minimi omnium in eadem proportione continuè proportionales.

Demonſtratio. Quia dantur A, B, C, D, quatuor numeri continuè proportionales, & aduerſarius vult alios quatuor E, F, G, H, in eadem ratione continuè proportionales; bini & bini in eadem ratione ſumi poterunt; hoc eſt A ad B, vt E ad F; & B ad C, vt F ad G; & C ad D, vt G ad H: ergo per prop. 14. lib. 7. ex æquo, erit primus A ad D vltimum, vt primus E ad H vltimum: ſed & A & D ex

datis ſunt primi numeri inter ſe, ergo per propoſ. 23, lib. 7. erunt minimi in ſua proportione; igitur per prop. 21. li. 7. A metietur E, & D metietur H; maior minorem, quod abſurdum eſt. Non igitur erunt minimi E. F. G. H inuecti ab aduerſario. Pugnantia iſta conſequentia ab poſitione aduerſarij negante datos numeros A, B, C, D, non eſſe minimos in ſua proportione, manifeſtam reddunt falſitatem ſuæ poſitionis negantis aſſertionem huius propoſitionis, quæ ideò vera erit.

## PROPOSITIO II.

### Numeros reperire deinceps proportionales minimos, quotcumque iuſſerit quiſpiam in data ratione.

SVppoſitio. In ratione numerorum A ad B, ſint reperiendi, duo minimi numeri, tùm, tres tùm quatuor, & ſic deinceps proportionales.

A. B.

C.

D. E.

Apparatus pro duobus numeris minimis reperiendis. Maior è datis diuidatur per minorem, & per reſiduum ſi ſit diuidatur diuiſor præcedens, & ſic deinceps, donec deueniatur ad vnum diuiſorem qui nihil relinquat: ſi poſtremus hic diuiſor fuerit vnitas, duo dati numeri A, B, erunt minimi in data proportione. Si autem poſtremus ille diuiſor nihil relinquens fuerit numerus aliquis C; per illum diuidantur duo A, B, numeri dati; quotientes D, E erunt duo numeri minimi in data proportione.

A. B.

C. D. E.

Apparatus pro tribus reperiendis. Reperi per præcedentem apparatum duos minimos terminos in data ratione, qui ſint A, B; Multiplica præterea A primum per ſeipſum, productus numerus C erit primus è tribus minimis quæſitis: tùm multiplica A per B, productus numerus D erit ſecundus è minimis: Inſuper multiplica B ſecundum è duobus per ſeipſum, productus numerus E, erit tertius è minimis quæſitis numeris in data ratione.

A. B.

C. D. E.

F. G. H. I.

Apparatus pro quatuor reperiendis minimis. Reperi per primum apparatum duos minimos A, B, numeros in data ratione; & per ſecundum apparatum, tres minimos numeros C, D, E, in data ratione: tùm per A primum è duobus multiplica tres inuentos C, D, E, producti numeri F, G, H, erunt tres numeri è quatuor quæſitis; quartus erit progenitus numerus I, ex B in vltimum E.

Apparatus pro aliis quocumque numero huiuſmodi numeris minimis continuè proportionalibus in data ratione. Multiplica, inueniendos tot numero minimos numeros in data ratione, vno minus numero, exempli gratia ſi reperiendi ſint quinque, inueſtiga prius quatuor; per primum è duobus minimis numeris reperiendis in data ratione; producti numeri erunt priores minimi numeri qui quæruntur; vltimus verò erit progenitus ex ſecundo è duobus primis minimus, & vltimo ex illis prioribus tot numero, ſed vno minus, quot quæruntur.

Demonſtratio primæ partis, ſeu concluſionis primi apparatus. Cùm diuiſio illa maioris per minorem, ſit ſubtractio minoris è maiore quoties fieri poteſt, vt diximus in definitione diuiſionis; ſi poſtremus diuiſor nihil relinquens, ſit vnitas, primi duo numeri dati A, B, indicantes rationem datam; erunt per prop. 1. lib. 7. primi inter ſe numeri: quare per propoſ. 23. lib. eiuſdem, erunt minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod ſi poſtremus diuiſor nihil relinquens fuerit aliquis numerus, ipſe diuiſor erit maxima menſura datorũ numerorum datam rationem habentinm, per coroll. noſtrum 2. ad prop. 2. libr. 7. quæ in exemplo datorum numerorum A, B, ſit numerus C: ergo per coroll. noſtrum ad prop. 35. lib. 7. diuidendo per C, ſingulos numeros A, B, datos; quotientes D, E, erunt numeri minimi omnium rationem eandem habentium quæ A ad B habentium. Reperimus ergo duos numeros minimos datam rationem habentes.

Demonſtratio ſecundæ partis, ſeu pro tribus numeris minimis. Imprimis oſtendam quod numeri inuenti C, D, E, tres in ſecundo apparatu, ſint proportionales vt A ad B, hoc eſt in ratione data. Primò ex A in A, factus eſt C; & ex A in B, procreatus eſt D; ergo per propoſit. 17. vel 18. libr. 7. erit C ad D, vt A ad

A ad B: Eodem modo quia ex B in A, genitus eſt D, & ex B in B, factus eſt E; erit quoque per cit. propoſ. 17. vel 18. D ad E vt A ad B: quare erunt continuè proportionales numeri tres inuenti C, D, E, in eadem proportione A ad B. Supereſt oſtendere quod ſint minimi omnium eandem rationẽ habentium A ad B: Quia extremi illorum C, E, facti ſunt ab A & B minimis, ideoque primos inter ſe per 24. prop. lib. 7. in ſeipſos ducti, erunt ipſi C, E, extremi, primi inter ſe numeri per propoſ. 29. lib. 7. cit. quare per præcedentem propoſit. libri præſentis, tres inuenti numeri C, D, E, erunt minimi omnium eandem rationem habentium. Inuenimus ergo tres numeros continuè proportionales minimoſque in ratione data.

Demonſtratio tertiæ partis pro quatuor numeris. Quod tres numeri reperti F, G, H, ſint continuè proportionales, ſicuti A ad B, notum erit ex iſto diſcurſu; A multiplicatus ab C, D, E, tribus antea repertis minimis numeris in eadem proportione continua, qua eſt A ad B, progenuit F, G, H, ergo per prop. 18. lib. 7. iſti progeniti F, G, H, eandem habebunt rationem, quàm multiplicantes C, D, E, ſed iſti multiplicantes per demonſtrationem ſecundæ partis præcedentis ſunt in eadem proportione continuè proportionales, qua A ad B; ergo etiam F, G, H, erunt in eadem proportione A ad B continuè proportionales: Inſuper quia A & B multiplicarunt E, ſeorſim ſumpti, & genuerunt H & I, iſti progeniti H & I, eãdem habebunt rationem quàm A & B multiplicantes per cit. prop. 18: erunt igitur quatuor numeri F, G, H, I, reperti, continuè proportionales in proportione A ad B. Reſtat probare illos eſſe minimos numeros quatuor in illa proportione. ipſi A & B, ex apparatu, ſunt minimi numeri inter ſe, ergo per prop. 24. libr. 7. erunt primi inter ſe; productique ſunt in apparatu, C & E numeri, ex ductu A & B inter ſe ipſos, & facti numeri F, I, extremi è dictis quatuor proportionalibus, ex multiplicatione A, B, in C, E; erunt F & I numeri extremi, inter ſe primi per prop. 29. lib. 7. Igitur per prop. 1. lib. huius, inuenti numeri F, G, H, I, quatuor continuè proportionales in ratione A ad B, erunt minimi omnium eandem rationem habentium. Fecimus ergo imperatum.

Demonſtrabitur quarta pars de quinque numeris, & ſic in infinitum de aliis pluribus, aſſumendo principia & artificium pateſactum in demonſtratione tertiæ partis, & ſic impleuerimus officium imperatum.

## COROLLARIVM I.

*Si tres numeri minimi ſint continuè proportionales, extremi erunt quadrati: ſi autem quatuor, cubi erunt: ſi quinque, quadratorum quadrati: & ſic in infinitum, ſemper extremi erunt ſolidi continui numeri quos Arithmetici præſtantes ſpeculantur.*

Corollarium hoc notum eſt ex praxi apparatus, & natura illorum numerorum à Geometricis figuris denominatorum, quorum definitiones non tradidit Euclides, niſi quadratorum & cuborum, def. 18. & 19. li. 7.

## COROLLARIVM II.

*Extremi numeri continuè proportionalium quotcumque minimorum in data ratione; ſunt ſemper inter ſe primi.*

Eodem artificio id demonſtrabitur, quo oſtenſi ſunt in ſecunda parte, in inuentis tribus C, D, E, eſſe extremos C, E, primos inter ſe; tùm in tertia parte extremos F, I, ex quatuor inuẽtis F, G, H, I, eſſe inter ſe primos.

## COROLLARIVM III.

*Duo minimi numeri in data ratione, metiuntur omnes medios numeros minimos quotcumque in eadem ratione proportionales continuè.*

Hoc manifeſtum eſt ex axiomate 7. lib. 7. quia ex apparatibus producuntur illi medij ex illorum multiplicatione minimorum duorum, in alios quoſdam numeros. Sic A, & B, metiuntur D medium è tribus C, D, E, inuentis: Tùm etiam A & B metiuntur G, H, duos medios, è quatuor F, G, H, I, inuentis. & ſic deinceps.

## PROPOSITIO III.

**Si ſint quotcumque numeri deinceps proportionales, minimi omnium eandem cum eis rationem habentium: Illorum extremi ſunt inter ſe primi.**

Svppoſitio. Sint quatuor numeri exempli gratia continuè proportionales, minimi

 omnium

omnium eandem cum eis rationem habentium: Dico A & D, extremos illorum, eſſe inter ſe primos.

A, B, C, D,

E, F.

Apparatus. Per prop. 35. libr. 7. Reperiantur duo minimi numeri E, F, in ratione A ad B, vel B ad C, vel C ad D.

Demonſtratio huius propoſitionis dependet ex coroll. 2. propoſ. præcedentis ſecundæ declarato in demonſtratione ſecundæ & tertiæ partis citatæ prop. 2.

## PROPOSITIO IV.

Rationibus datis quotcumque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SVppoſitio erit varia pro rationibus datis. Prima cùm dantur duæ rationes; Altera cùm dantur tres; Tertia cùm dantur quatuor; & ſic deinceps.

Suppoſitio prima, ſint datæ duæ rationes in minimis numeris A ad B, & C ad D: oporteatque reperire minimos numeros deinceps proportionales in illis datis rationibus.

A ad B. C ad D.

F. E. G.

H.

I. K. L.

Apparatus. Per prop. 36. libr. 7. reperiatur E minimus numerus quem metiantur B & C, ſecundus & tertius è datis A, B, C: & vide per diuiſionem quoties B contineatur in E, & per quotientem multiplica A numerum, productus erit F numerus primus è quæſitis; ſecundus verò erit E inuentus numerus. Tùm etiam aduerte per diuiſionem quoties C contineatur in E, & per quotientem multiplica D numerum, productus G numerus erit tertius quæſitus numerus: & Dico F, E, G, eſſe numeros minimos tres in datis rationibus A ad B, & C ad D.

Suppoſitio ſecunda. Sint datæ tres rationes A ad B, C ad D, E ad F, in minimis numeris: & oporteat reperire quatuor minimos numeros deinceps proportionales in illis datis rationibus tribus.

A. ad B. C. ad D. E. ad F.

H. G. I. K.

M. L. K. N.

O. P. Q. R.

Apparatus. Per prop. 36. lib. 7. reperi minimum numerum quem metiantur B & C, ſecundus & tertius è datis, inuentus ille numerus G erit ſecundus è quæſitis. Præterea inueſtiga per diuiſionem quoties B contineatur in G, ſeu illum metiatur, & per quotientem multiplica A, producetur H numerus primus è quæſitis: tùm etiam per diuiſionem inquire quoties C contineatur in G, ſeu illum metiatur, & per quotientem multiplica D; productus numerus I erit tertius è quæſitis. Iam verò vel numerus E metitur I numerum modò inuentum, vel non metitur: ſi metiatur, vide per diuiſionem quoties ipſe E metitur ipſum I, & per quotientem multiplica F numerum poſtremum è datis; productus numerus K erit quartus & poſtremus è quæſitis. Si verò E non metiatur I, quod per diuiſionem inueſtigabitur & concludetur, tùm alius caſus quod metiatur; Inueſtiga per prop. 36. libr. 7. numerum K minimum quem metiantur E & I, iſte numerus K erit tertius è quæſitis quatuor: Præterea vide per diuiſionem quoties I metiatur K, & per quotientem multiplica G inuentum prius ſecundum numerum, productus numerus L erit ſecundus è quæſitis quatuor; tùm multiplica per hunc eundem quotientem, numerũ H prius inuentum primum, productus numerus M erit primus è quatuor quæſitis: denique vide quoties E metitur K quartum prius numerum inuentum, & per quotientem multiplica F numerum, productus numerus N, erit quartus numerus è quæſitis quatuor: Et dico hos numeros M, L, K, N, in hoc caſu ſecundo eſſe deinceps proportionales minimos in datis tribus rationibus A ad B, C ad D, E ad F: Tùm dico quatuor numeros H, G, I, K, eſſe etiam minimos deinceps proportionales in datis eiſdem rationibus tribus, in primo tamen caſu.

Demonſtratio aſſertionis in duabus rationibus datis, in minimis numeris A ad B, & C ad D; quod ſint numeri E, F, G, inuenti minimi in proportionibus datis. Imprimis quod datas habeant deinceps proportiones: Quia ex natura diuiſionis, & axiomate 7. libr. 7. A & B numeri æquemetiuntur ipſos F & E numeros; illos per eundem numerum, puta H, metiantur: ipſique A & B multiplicantes ipſum H, producent F, E, per 9. axio. lib. 7; vnde erit

[illegible] per prop.18.lib.7.vt A ad B,ita F ad L. Eodem diſcurſu facto,quia C & D æquemetiuntur ex natura diuiſionis & ax.7.lib.7. ipſos E & G, illos per eundem numerum puta H,metientur;ipſique C,D,multiplicantes H, producent E,G,per 9.ax.lib.7.vnde erit per prop.18. eiuſdem lib.vt C ad D ita E ad G: Quare inuenti numeri tres F, E,G, erunt deinceps proportionales in rationibus datis duabus A ad B, & C ad D. Quod vero ſint minimi numeri in illis rationibus, probatur. Si non ſint minimi, ſint alij minores, ſinguli ſingulis in eiſdem datis rationibus, ſi fieri poteſt,I.K.L. Ergo quia A & B minimi numeri dati ſunt in ſua proportione, ipſi per prop.21.lib.7. æquemetientur ſuos proprios maiores I,K, in eadem proportione inuectos ab aduerſario, A ipſum I,& B ipſum K:ſimili modo C & D æquemetientur ſuos maiores in eadem proportione inuectos K,L,C ipſum K, D ipſum L: Cùm ergo habeamus duos numeros B, C, eundem numerum K metientes,eũdem etiam metietur E numerus quem B & C metiuntur ex apparatu, idque per propoſit. 37. libr. 7. ergo E numerus maior metitur minorem K inuectum ab aduerſario, ex eius poſitione inuecta:hoc abſurdum condemnat ipſam poſitionem negantem repertos tres numeros F, E, G, eſſe minimos in datis duabus rationibus: erunt igitur minimi quod erat probandum.

Demonſtratio aſſertionis primi caſus in datis tribus rationibus, in minimis numeris A ad B, C ad D,E ad F; quando E metitur tertium I numerum è quæſitis. Primum autem oſtendere oportet H,G,I,K, quatuor repertos numeros, eſſe deinceps proportionales in illis tribus datis rationibus:A & B,per naturam diuiſionis & 7. axio.libr.7.ipſos H,G, numeros æquemenſurant, erit vtendo eiſdem principiis citatis in demõſtratione præcedentis aſſertionis,vt A ad B,ita H ad G : tùm vt C ad D,ita G ad I:tùm vt E ad F,ita I ad K: quia tàm C & D,ipſos G,I; quàm E, & F,ipſos I & K æquemetiuntur , vnde erunt deinceps proportionales per 18.prop.lib.7. dicti numeri H,G,I,K,in datis rationibus.Sed quod ſint minimi ſupereſt demonſtrandum: ſi non ſint minimi ſunt ſi fieri poſſit alij quatuor minores L, M, N,O, ſinguli ſingulis, in eiſdem datis rationibus : Iam verò quia A & B minimi dati ſunt in ſua proportione, ipſi per prop.21. libr.7. æquemetientur ſuos maiores L & M, videlicet L,ſuum maiorem M: Ita etiam C & D, ſuos maiores, nimirum C minor, ſuum M maiorem : Quia autem B & C,ipſum M menſurant,metietur per 37.libr. 7. eundem M, numerus G minimus quem B & C metiuntur,maior minorem,quod repugnat;ergo falſa erit poſitio inuecta ab aduerſario, quod ſint alij minimi numeri ab inuentis H,G,I,K,quatuor; vnde erunt ipſi minimi rectè inuenti in datis proportionibus tribus. Age verò demonſtremus in ſecundo caſu, quando E non metitur I numerum, quod inuenti alij quatuor numeri M,L,K,N,ſint deinceps proportionales in datis eiſdem tribus rationibus;& quod ſint minimi numeri:eritq́.

Demonſtratio aſſertionis ſecundi caſus. Quandoquidem H,G,I, ipſos M,L,K, æquemetiuntur ex natura diuiſionis & ax.7.lib.7. erit vt H ad G,ita M ad L,& vt G ad I,ita L ad K:Sed eſt etiã vt H ad G,ita A ad B; & vt G ad I,ita C ad D;quia A ad B,ipſos H & G; & C & D,ipſos G & I æquemetiuntur: Ergo erit vt A ad B,ita M ad L;& vt C ad D,ita L ad K,per 11.prop.lib.5.Sed eſt vt E ad F,ita K ad N,quia E & F,æquemetiuntur ipſos K, N: ſunt igitur quatuor numeri inuenti M,L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus tribus,quod erat primò probandum. Quod ſi non ſint minimi,ſint ſi fieri poſſit alij minores O,P,Q,R,in eiſdẽ datis rationibus: Cùm A & B ſint ex datis minimi in ſua proportione,ipſi per prop.21.lib.7.æquemetientur O & P,in eadem ratione numeros, videlicet in noſtra re,B ipſum P:tùm etiam C & D minimi, æquemẽſurabunt ſuos maiores P,Q, nimirum ad rem noſtram, C minor ſuum P maiorem:cùm ergo B & C, ipſum P menſurent,etiam G minimus menſuratus ab B & C, eundem P menſurabunt per propoſit. 37. libri ſeptimi. Sed & probauimus eſſe vt G ad I, ita L ad K, hoc eſt ita P ad Q ; erit viciſſim per 16.prop.lib.5.vt G ad P,ita I ad Q:quare cùm G menſuret ipſum P,metietur & I ipſum Q:verum metitur E eundem Q, per 21. propoſ.libr.7.quia E & F in ſua proportione minimi, æquemenſurent Q & R eiuſdem rationis,nimirũ in re noſtra E minor, maiorem ſuum Q: quia igitur I, & E metitur Q, ipſum etiam Q menſurabit numerus K menſuratus ab I,& E;maior nimirum minorem. hoc abſurdum quia procedit ab inuectis aliis numeris O,P, Q,R, minoribus quàm inuenti M,L, K , N , manifeſtam facit abſurditatem illorum O,P,Q,R, numerorum,& ab ſigno veritatem aliorũ quatuor M,L,K,N, videlicet quod ſint minimi in datis rationibus tribus.

Quod ſi quatuor dentur rationes. Oportebit prius inuenire numeros deinceps proportionales minimos in tribus rationibus ex illis, vti præſtitimus in ſecundo apparatu & demonſtratione ſuperioris aſſertionis: Tùm pro quarta inuenienda vtendum erit artificio eodem tradito in ſuperioribus duobus caſibus

X 3 ad

ad tertiam inueniendam. Quæ omnia eiſdem principiis innituntur citatis in ſuperiore demonſtratione.

## PROPOSITIO V.

### Plani numeri rationē inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

HÆc propoſitio demonſtrata remanet in propoſ.23.lib.6.prout explicauimus in digreſſionis noſtræ ad librum 7. propoſit.14.

## PROPOSITIO VI.

### Si ſint quotcumque numeri deinceps proportionales; primus autem ſecundum non metiatur, neque alius quiſpiam vllum metietur.

CVm dentur numeri continuè proportionales, primus ſecundi, & tertius quarti, & ſic de aliis, (intelligendo antecedentes & conſequentes in rationibus eiſdem) æquemultiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes; vel ſubæquemultiplex, iuxta def.20.lib.7. Ergo cùm in numeris continuè proportionalibus, ſit primus ad ſecundum, vt ſecundus ad tertium, & ſic deinceps; ſi primus non metiatur ſecundum, neque ſecundus metietur tertium, & ſic deinceps: quocirca neque alius quiſpiam antecedens ſuum conſequentem metietur.

Quod ſi propoſitio intelligatur, quod nullus numerus è datis, vllum alium metiatur, licet non ſit ſuus conſequens, ita demonſtranda erit.

A. B. C. D.

E. F. G.

Suppoſitio. Sint iſti numeri A, B, C, D, continuè proportionales, & primus A non metiatur B ſecundum: Dico nullum ex his, vllum quemlibet alium metiri poſſe.

Apparatus, per prop.2.libri huius, ſumantur tres numeri E, F, G, minimi in ratione A ad B. probandum quod A primus non metietur tertium C.

Demonſtratio. Quia vt eſt A ad B, ita eſt E ad F; & vt B ad C, ita F ad G; erit ex æqualitate per prop.14.libr.7. vt A ad C, ita F ad H: Sed eſt vt A ad B; ita F ad G; & non metitur A numerus numerum B, ergo neque numerus F menſurabit numerum G: ſed neque F erit vnitas, alioqui vnitas omnem numerum metiens iuxta 5.axio.libr.7.metiretur G. Iam verò cùm ſint ſumpti numeri tres F, G, H, minimi deinceps proportionales, extremi illorum F & G, erunt primi inter ſe, per 3.prop.lib. huius, & non ſit vnitas F, non metietur F, ipſum H, ex defin.12.lib.7. quare neque A metietur C, cùm ſit A ad C, vt F ad H, vti oſtendimus. Eodem artificio probabimus, quod neque B ſecundus, numerum tertium C, metietur. Quod ſi quatuor numeri minimi ſumantur per propoſ.2.libr.huius, in ratione A ad B, demonſtrabimus ex eiſdem principiis quod neque A quartum D; neque B ipſum D, neque E metietur: & ſic in infinitum de reliquis. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO VII.

### Si ſint quotcumque numeri deinceps proportionales: primus autem extremum metiatur: is etiam metietur ſecundum.

SVppoſitio. Sint iſti numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, primuſque A metiatur vltimum E; Dico quod etiam metiatur ſecundum B.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit, primus A non metiatur ſecundum B; ergo per præced.prop.6. neque metietur A primus extremum E, contra ſuppoſitionem conceſſam ſeu admiſſam. abſurdum hoc conſequens ad poſitionem contradicentem aſſertioni, indicat ipſam poſitionem repugnare rationem, & aſſertionem propoſitionis rationi eſſe conformem.

## PROPOSITIO VIII.

### Si inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri: quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri; tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

SVppoſitio. Sint duo numeri A, B, & duo alij numeri E, F, ſitque eadem ratio A ad

B, quæ

B, quæ E ad F: cadantque inter duos primos A, B, medij numeri C, D, duo, continuè proportionales: Dico etiam inter alios duos E, F, cadere etiam duos alios L, M, numeros medios continuè proportionales.

Apparatus. Per prop. 2. libr. præſentis. Sumatur quatuor numeri minimi deinceps proportionales in ratione A primi ad C, ſecundum, quia dantur quatuor numeri A, C, D, E, continuè proportionales: ſintque iſti minimi quatuor G, H, I, K.

A 24. C 36. D 54. B 81.

G 8. H 12. I 18. K 27.

E 32. L 48. M 72. F 108.

Demonſtratio. quia dantur A ad C, & C ad D, & D ad B, in eadem ratione; & ſumpti ſunt minimi G, H, I, K, in eadem ratione prædicta deinceps proportionales; erit per 14. prop. libr. 7. ex æquo A ad B, vt G ad K: ſed datur E ad F, vt A ad B; ergo per prop. 11. lib. 5. erit vt E ad F ita G ad K: Sunt autem per 3. prop. libr. huius G & K primi inter ſe, quia extremi ſunt minimorum ſumptorum deinceps proportionalium, erunt ergo iidem G & K minimi in ſua proportione iuxta propoſ. 23. lib. 7. quare per prop. 21. lib. 7. cit. metientur æquè ſuos maiores prædictos E, F, in ſua eadem proportione exiſtentes, G quidem menſurabit E ſuum maiorem, & K ſuum maiorem F. Iam verò ſi ſumantur L, M, æquemultiplices H, I, vt eſt multiplex E ipſius I, vel F ipſius K; erunt E, L, M, F, æquemultiplices ſuorum minimorum G, H, I, K, eodem ordine: Cumque ſit G ad H, vt H ad I, & ſumpti ſint æquemultiplices illorum E, L, L, M, eodem ordine; erit E ad L, vt L ad M, per 4. prop. libr. 5. elem. Cumque etiam ſit H ad I, vt I ad K, & ſint illorum æquemultiplices L, M, M, F, erit per cit. 4. prop. L ad M, vt M ad F: ſunt igitur continuè proportionales quatuor numeri E, L, M, F; totque cadunt numeri intermedij L, M, inter E & F, quot cadebant C, D, inter duos alios A, B. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Inter duos numeros proportionis duplæ, vel ſuperpartucularis cuiuſuis, vel ſuperbipartientis, non poteſt medius incidere numerus.*

Nam per hanc prop. caderet medius numerus proportionalis inter 1 & 2. vel inter duos numeros ſola vnitate differentes, vel inter duos numeros differentes binariò; quod fieri nullo modo poſſe manifeſtum eſt: nullus enim eſt talis numerus inter vnitatem & binarium minimos terminos proportionis duplæ; ſed neque inter duos vnitate differentes; & qui medius eſſe poteſt inter duos binariò differentes, impertinens eſt vt ſit medius proportionalis.

COROLLARIVM NOSTRVM

I I.

*Latus quadrati & eius diameter non poſſunt numeris exprimi ambo.*

Nam per 47. prop. lib. 1. cùm quadratum diametri ſit æquale quadratis duobus laterum, erit duplum vnius, hoc eſt vt 2. ad 1. eſt autem per coroll. prop. 20. libr. 6. quadratum ſuper primam rectam lineam è tribus proportionalibus, ad quadratum ſuper ſecundam. Sicut prima recta 2 ad tertiam 1, in noſtro caſu: ergo ſi ſecunda recta hoc eſt latus quadrati numeris exprimi poſſet, eſſet medius proportionalis inter 2 & 1. quod cùm nullus numerus talis eſſe poſſit, per coroll. præcedens noſtrum; latus quadrati numeris exprimi non poterit ſicuti latus aliud ſeu diameter vt 2.

## PROPOSITIO IX.

Si duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij cõtinua proportione ceciderint numeri: quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri; totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem, medij continua proportione cadent.

Suppoſitio. Inter duos numeros A, B, primos inter ſe, cadant medij continuè proportionales numeri C, D: Aſſero tot etiam medios incidere numeros continuè proportionales inter Vnitatem & A primum è datis; tùm etiam totidem inter vnitatem & alterum B è datis.

Apparatus. Per 2. propoſ. libri huius, reperiantur duo numeri E, F minimi in ratione A primi è datis, & primi C intermediorum cadentium: Tùm etiam, ſumantur in eadem proportione A ad C, tres minimi numeri G,

H,I,tùm quatuor alij K,L,M,N, minimi numeri in eadem proportione A ad C,& ſic deinceps quouſque tot numero ſint minimi numeri, quot ſunt in datis & medijs intercidentibus inter illos: Vt in exemplo propoſito A, C, D, B; nam inter datos A & B primos, poſiti ſunt duo C, D, continuè proportionales tùm datis A, B.

A.8. C.12. D.18. B.27.

Vnitas

E.2. F.3.

G 4. H 6. I 9.

K 8. L 12. M 18. N 27.

Demonſtratio. Dati ſunt A & B extremi, primi inter ſe,ergo per prop.1.lib.huius,quatuor numeri A,C,D,B, erunt minimi & quidem in proportione A ad C; & quia E ad F, eſt ex apparatu vt A ad C; erunt per 11.prop. libr.5.quatuor illi A,C,D,B, in proportione E ad F, minimi ſemper: Verùm per apparatum ſunt totidem ſumpti numeri minimi, K, L,M, N, in eadem proportione A ad C, vel E ad F; ergo iſti K,L,M,N, erunt æquales illis A,C,D,B, ſinguli ſingulis; v.g. K, & A; L & C; M & D; N & B: Quod ſint æquales probatur; Si enim eſſent inæquales, cùm ſint minimi in eadem proportione, aliqui eſſent minores minimis, contra omnem rationem. Iam verò, cùm ex apparatu demonſtrationis propoſ.2.lib. huius, E multiplicans ſeipſum, genuerit G; & multiplicās idem E,ipſum G, produxerit K; metietur iuxta 7.axio.lib.7.E numerus numerum G, per E; & G ipſum K per E eundem: ſed per 5. axioma vnitas ipſum E metitur per E; ergo vnitas æquemenſurabit ipſum E; & E, ipſum G; & G, ipſum K: quare per 20. def.libr.7. cùm eadem pars ſit vnitas ipſius E, & E ipſius G, & G ipſius K, proportionales erunt deinceps vnitas & numeri E, G, K. Artificio eodem & ex eiſdem principiis oſtendentur proportionales continuè vnitas & F, I, N: Sunt autem A & K æquales ſeu iidem numeri; tùm etiam B,N; vti probauimus; tot igitur cadent numeri continuè proportionales inter vnitatem, & quemlibet extremorum A & B datorum, quot ceciderint numeri proportionales inter A & B. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO X.

Si inter duos numeros & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri; totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

SVppoſitio. Inter vtrumque numerum A, B,& vnitatem,medient quotcumque numeri continuè proportionales;puta inter vnitatem & A, iſti tres C, D, E: & inter vnitatem & B, iſti alij tres F,G,H, illis multitudine æquales: Aſſero totidem mediare numeros, videlicet in exemplo dato, tres M,N,O, continuè proportionales inter A & B.

Apparatus. Multiplicetur C per F, generetur que I numerus: tùm C multiplicet I,& G, ſeorſim, fiantque K, L. Inſuper C multiplicans ipſos K,L,H,ſeorſim,producat M,N, O, numeros totidem inter A & B,quot ſunt medij inter vnitatem & A,vel B.

Demonſtratio. Ex datis, eſt vnitas ad C, vt C ad D, & D ad E, & E ad A; ergo per def.20. lib.7.æquemetietur vnitas ipsū C,& C ipſum D, & D ipſum E,& E ipſum A: ſed per 5.ax.libr.cit. vnitas metitur C per ipſum C, ergo & C metietur ipſum D per C, & D ipſum E per C, & E ipſum A per C: vnde C multiplicans ſeipſum, genuit D, & C multiplicans D fecit E, & C multiplicans E fecit A,iuxta 9.ax.libr.7. Ex eiſdem principiis ſequitur quòd F multiplicans ſeipſum, genuit G, & multiplicans G produxit H, & multiplicans H procreauit B. Cùm ergo C & F, ſe-

A 81. M 162. N 324. O 648. B 1296.

E 27. K 54. L 108. H 216.

D 9. I 18. G 36.

C. 3. Vnitas F. 6.

ipſos multiplicantes genuerint I, & G multiplicans C genuerit D, erit per 17.prop.lib.7. vt C ad F, ita D ad I. Eodem modo quia F multiplicans C & F, produxit I & G, erit per eandem propoſit. 17. vt C ad F, ita I ad G: erunt igitur continuè proportionales D, I, G, in ratione C ad F: Inſuper

Inſuper quia C multiplicauit D,I,G,genuitque E,K,L; erunt EKL, eandem continuam proportionem quam D,I,G,per 15.prop.lib. 5.& 16. eiuſdem libri, hoc eſt quàm C ad F: Prætereà quoniam C & F multiplicantes G, produxerunt L & H, erit per 18.prop.libr.7. vt C ad F, ita L ad H: habemus igitur quatuor numeros E, K, L, H, continuè proportionales in ratione C ad F. Denique quoniam C multiplicans E,K,L,H,genuit A,M,N,O, iſti poſtremi erunt in eadem ratione atque multiplicati E,K,L,H,per prop.17. libr.7.& vt C ad F, per 11.propoſ.lib.5. Simili modo quia C & F multiplicantes H, procrearunt O & B, erit per 18. lib.7. vt C ad F,ita O ad B: Quinque ergo habemus numeros continuè proportionales A,M,N,O,B, in ratione C ad F. Quare tot intermedij proportionales erunt inter A & B,quot inter H vel B,& vnitatem; quandoquidem tot facti ſunt M, N, O, quot erunt C,D,E, vel F,G,H. Demonſtrauimus ergo propoſitum.

## PROPOSITIO XI.

### Duorum quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

Svppoſitio. Duo ſint quadrati numeri A, & B; Dico inter hos duos quadratos numeros incidere medium numerum proportionalem E: Tùm dico quadratum numerum ad quadratum numerum habere duplicatam rationem lateris ad latus.

C. 3. D. 7.

A 9. E 21. B 49.

Apparatus. Latus quadrati A, ſit C; & latus quadrati B, ſit D. & C multiplicet D, faciens E numerum.

Demonſtratio. C multiplicãs ſeipſum produxit A quadratum per defin.16.& 18.lib.7; & idem C multiplicans D,fecit numerum E; ergo per prop.17. lib.7.erit vt C ad D, ita A ad E. Eodem modo D multiplicans ſeipſum, genuit B quadratum per def. citatas; & multiplicans C, procreauit E; ergo per cit.prop. 17.erit vt C ad D,ita E ad B. Vnde fit vt numeri A,E,B, ſint continuè proportionales,& inter duosquadratos numeros A & B,incidat numerus E medius proportionalis. Denique quia ſunt tres numeri prædicti A,E,B,continuè proportionales, primus A quadratus, ad tertium B quadratum, duplicatam habebit rationem A ad E per 26.defin.lib.7. Et quia ratio A ad E oſtenſa eſt eadem quæ C ad D, lateris ad latus, ideo per 11. prop. libr.5.erit ratio A ad B duplicata eius quæ eſt C ad D. Probauimus ergo duas aſſertiones propoſitionis præſentis.

## PROPOSITIO XII.

### Duorum cuborum numerorum duo medij ſunt proportionales numeri.

### Et cubus ad cubum triplicatã habet lateris ad latus rationem.

Svppoſitio. Dati ſint duo numeri cubi A, & B: Dico primò inter eos mediare numeros duos H, I, proportionales. Sint prætereà cuborum A & B, numerorum, latera, numeri C,D, C quidem cubi A,& D cubi B: Dico ſecundò cubum A ad cubum B habere triplicatam rationem lateris ſui C ad latus D alterius.

Apparatus. C latus multiplicando ſeipſum producat E; tùm D aliud latus ducendo ſeipſum, generet F; tùm C ducendo D, efficiat G; denique C multiplicando G, procreat H;& D multiplicando G, faciat I.

A 27. H 36. I 48. B 64.

E 9. G 12. F 16.

C 3. D 4.

Demonſtratio. C ducendo ſe ipſum, & D ſeorſim, progenuit E,& G,ergo per 17.prop. lib.7.erit vt C ad D,ita E ad G: Similiter D multiplicando ſeipſum,& C, procreauit G & F; ergo erit per cit. prop.17.vt C ad D,ita G ad F; quare continuè proportionales erunt hi numeri E,F,G, in ratione C ad D. Inſuper, quia C multiplicans ipſum E, producet A cubum datum, iuxta defin.19.lib.7. & idem C multiplicans ipſum G, fecit H in apparatu; erit per cit.17.prop.libr.7. vt E ad G, hoc eſt C ad D, ita A ad H. Eodem modo, cùm D multiplicans G, produxerit I; multiplicans verò idem G, ipſum F, procreet cubum B ex def.19.lib.7.erit per cit.prop.17. vt G ad F, hoc eſt vt C ad D, ita I ad B: Sed C & D multiplicantes ſeorſim ipſum G, produxerunt H & I,

& I,ergo per prop. 18. libr. 7. erit vt C ad D, ita H ad I; Habebimus ergo hos numeros quatuor A, H, I, B, continuè proportionales in ratione C ad D; quorum extremi A & B, cùm ſint cubi, intererunt duo medij H, & I, proportionales numeri inter dictos cubos A & B, ſicuti fuit primo loco aſſertum. Denique quoniam ex def. 26. libr. 7. dum quatuor ſunt numeri proportionales continuè, primus ad quartam triplicatam habet rationem eius quam habet primus ad ſecundum; etiam A primus & cubus ex dictis quatuor A, H, I, B, ad vltimum B etiam cubum, triplicatam habebit rationem, quam habet A ad H; Et quia A ad H oſtenſus eſt eſſe vt C ad D, latus cubi ad latus cubi; etiam per prop. 11. lib. 5. erit ratio cubi A ad cubum B, triplicata lateris C ad latus D, quomodo fuit ſecundo loco propoſitum.

## PROPOSITIO XIII.

Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos, fecerint aliquos; ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SVppoſitio. Sint numeri exempli gratia tres, A, B, C, continuè proportionales; & A multiplicans ſe ipſum fecerit D; B verò multiplicans ſe ipſum, genuerit E; denique C multiplicans ſeipſum, procrearit F; Dico hos factos D, E, F, eſſe proportionales deinceps. Prætereà ipſe A, multiplicando D, factum à ſe numerum, effecerit G; & B multiplicando genitum à ſe numerum E, procreauit H; tùm C multiplicando F genitum à ſe numerum, produxerit I: Dico etiam hos vltimos factos numeros G, H, I, eſſe continuè proportionales. Et ſic deinceps circa extremos factos, eodem modo prædicto, idem euenire, hoc eſt ſemper eſſe continuè proportionales.

| | | |
|---|---|---|
| A 2. | B 4. | C 8. |
| D 4. | E 16. | F 64. |
| G 8. | H 64. | I 512. |

Demonſtratio. D & E, ſunt quadrati numeri facti, laterum A, & B, iuxta definitionem 18. lib. 7. ergo per prop. 11. lib. præſentis D habebit ad E, rationem duplicatam lateris A ad latus B: Similiter quia E & F, ſunt quadrati numeri laterum B, & C, habebit quadratus numerus D ad quadratum numerum F, rationem duplicatam lateris B ad latus C; ſunt autem ex datis rationes A ad B, & B ad C, eædem; ergo ratio duplicata lateris A ad latus B, erit eadem quæ ratio duplicata lateris B ad latus C: ergo numeri D, E, F, erunt continuè proportionales, quandoquidem D ad E habet eandem rationem, quam E ad F, videlicet duplicatam eiuſdem rationis A ad B, vel B ad C. Inſuper quia A & B multiplicarunt D & E, & progenuerunt cubos G & H, erit per prop. 12. libr. huius G ad H, triplicata rationis laterum A ad B: Eodem modem modo quia B & C multiplicarunt E & F, & procrearunt H & I cubos, erit per cit. propoſ. 12. H ad I, triplicata rationis laterum B ad C, vel A ad B, cùm ſit eadem ex datis ratio A ad B, quæ C ad D: ergo facti poſtremi numeri G, H, I, erunt inter ſe continuè proportionales in ratione triplicata rationis A ad B, vel B ad C. Et ſic de omnibus aliis productis vltimis concludendum erit per diſcurſum factum.

## PROPOSITIO XIV.

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius.

Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

SVppoſitio. Sint duo numeri quadrati A & B, & A metiatur B: Dico quod latus C, quadrati A, etiam metiatur D latus, quadrati B. Dico ſecundò quod ſi latus C metiatur latus D, quod quadratus numerus A, metiatur quadratum numerum B.

| | | |
|---|---|---|
| C 2. | D 6. | |
| A 4. | E 12. | B 36. |

Apparatus. C multiplicans ſeipſum producet A quadratum per def. 18. lib. 7. tùm etiam D multiplicans ſeipſum generabit B quadratum: C denique multiplicans D, efficiat E: eritque per propoſit. 17. libr. 7. A ad

A ad E, vt C ad D; tùm etiam E ad B, vt C ad D: quare erunt continuè proportionales hi numeri tres A, E, B.

Demonſtratio. in his tribus numeris continuè proportionalibus oſtenſis A, E, B, primus A metitur extremum B ex datis, ergo etiam primus A per propoſ.7.libr.huius, metietur ſecundum E: Oſtendimus autem eſſe C ad D, vt A ad E; & A metiri E, ergo per definitionem 20. libr.7. C latus metietur latus D, ſicuti fuit primo loco propoſitum. Pari ratione cùm oſtenderimus eſſe C ad D, vt A ad E, & detur C latus metiri latus D, metietur etiam per cit. defin.20. A ipſum E: & quoniam oſtendimus eſſe C ad D vt E ad B, daturque C metiri D, etiam per eandem def. E metietur B: ſed A metitur E, & E metitur B, ergo per 11.axio.lib.7. A metietur B, quadratus numerus quadratum. quod erat propoſitum ſecundo loco.

## PROPOSITIO XV.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius.

Et ſi latus vnius cubi, latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

SVppoſitio. Cubicus numerus A, cubicum numerum B metiatur: Dico quod C latus cubi A, metiatur latus D, cubi B. Si autem latus C metiatur latus D: Dico quod cubus A metiatur cubum B; quorum ſunt latera prædicta.

Apparatus. C & D, ſe ipſos multiplicantes, gignant E, & F, quadratos: ſe autem mutuò multiplicantes producant G: denique iidem C & D, multiplicantes ſeorſim G, efficiant H, I.

A 8. H 24. I 72. B 216.

E 4. G 12. F 36.

C 2. D 6.

Demonſtratio. Ex dictis in demonſtratione & apparatu propoſ.12.libri præſentis, numeri E, G, F, erunt continuè proportionales; tùm etiam numeri alij A, H, I, B, continuè erunt proportionales, in ratione C ad D: Datur autem A primus extremum metiri B, ergo per 7.prop.lib. huius, idem A primus metietur ſecundum H: ſed eſt A ad H, vt C ad D, ergo per def. 20. libr.7. etiam C metietur D, quomodo fuit primò aſſertum. Cùm autem ſit vt C ad D, ita A ad H, ſicuti oſtenſum eſt; C verò detur metiri D, etiam A metietur H per cit.def.20. lib.7. Et quia ſunt quatuor A, H, I, B, continuè proportionales òſtenſi, & primus A metitur ſecundum H, vti oſtendimus; etiam per cit.def.20. lib.7. ſecundus H, metietur tertium I; & tertius I, metietur quartum B; atque ita per axioma 11.lib.7. etiam A cubus metietur B cubum. quod fuerat ſecundo loco propoſitum.

## PROPOSITIO XVI.

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, neque latus vnius metietur latus alterius: Et ſi latus vnius non metiatur latus alterius, neque quadratus quadratũ metietur.

SVppoſitio. Quadratorum A, B, ſint latera C, D; & A non metiatur B: Dico quod C non metietur D. Si autem C non metiatur D. Dico quod A non metiatur B.

A 16. B 81.

C 4. D 9.

Demonſtratio primæ partis. Si fieri poſſit C, metiatur D; ergo per prop.14.libr.huius, A metietur B, contra hypotheſim admiſſam. Præterea, ſi fieri poſſit A metiatur B; ergo per cit.prop.14.lib.huius, C metietur D, contra hypotheſim conceſſam. Hæc duo abſurda indicant poſitiones aduerſarij contradicentes duabus aſſertionibus huius propoſitionis eſſe rationi repugnantes, & aſſertiones ipſas eſſe veras.

## PROPOSITIO XVII.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus vnus latus alterius metietur.

Et ſi latus vnius cubi latus alterius non metiatur, neque cubus cubum metietur.

SVppoſitio. Cuborum A & B, latera ſint C, & D; & primam A cubus non metiatur

tur cubum B: Dico quod latus C non metietur latus D. Secundò autem latus C non metiatur D: Dico ſecundò quod A cubus non metiatur cubum B.

A 8. B 27.

C 2. D 3.

Demonſtratio, ſi fieri poſſit C metiatur D, ergo per propoſ. 15. lib. huius, A metietur B, contra hypotheſim. Sed etiam eſto ſi fieri poſſit, A metiatur B, ergo per eandem prop. 15. C metietur D, contra hypotheſim. Hæc abſurda & repugnantia, indicant poſitiones contradicentes his duabus aſſertionibus eſſe falſas, & ipſas aſſertiones veras.

## PROPOSITIO XVIII.

Duorum ſimilium planorum numerorum, vnus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SVppoſitio. A & B ſint numeri plani ſimiles, & plani A ſint latera duo C, D, ſub quibus continetur; tùm etiam plani alterius B, ſint latera duo E, F; Dico primò quod inter A & B numeros planos, cadat medius numerus aliquis, puta G, proportionalis: Et Dico ſecundò quod proportio plani A ad planum B, eſſe duplicatam rationis laterum homologorum C, E, vel D, F.

A 12. G 18. B 27.

C 6. D 2. E 9. F 3.

Apparatus, D multiplicet E, vel contra, & efficiat G, numerum conſtituendum inter duos datos planos A & B numeros.

Demonſtratio. Per def. 21. lib. 7. erit C ad D, vt E ad F; ergo alternatim per prop. 13. lib. 7. erit C ad E, vt D ad F. D autem multiplicans C, & E ſeorſim, progenuit A, & G, erit per prop. 17. libr. cit. A ad G, vt C ad E, vel vt D ad F, per prop. 11. libr. 5. Simili modo E multiplicans D & F ſeorſim, procreauit numeros G & B; erit per cit. prop. 17. lib. 7. G ad B vt D ad F: Igitur proportionales erunt continuè tres numeri A, G, B, in eadem ratione D ad F, vel C ad D; vnde inter datos numeros planos ſimiles A, B, medius cadet numerus G proportionalis, quod erat primò propoſitum. Denique quia oſtendimus tres numeros A, G, B, eſſe continuè proportionales, ratio A ad B erit duplicata rationis A ad G, per def. 26. lib. 7. ſed oſtendimus rationem A ad G, eſſe eandem cum ratione C ad E, vel D ad F, laterum homologorum planorum A & B ſimilium: igitur per prop. 11. lib. 5. plani numeri A, B, ſimiles, habebunt rationem duplicatam ſuorum laterum homologorum.

## PROPOSITIO XIX.

Duorum ſimilium ſolidorum numerorum, duo medij proportionales ſunt numeri.

Et ſolidus numerus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SVppoſitio. Similes ſolidi numeri ſint A & B; & ſolidi A, latera ſint C, D, E; & ſolidi alterius B, latera ſint F, G, H: Dico primò inter duos datos ſolidos numeros A, B, incidere duos proportionales alios, puta M, N: & Dico ſecundò ſolidum A ad ſolidum B, habere proportionem triplicatam quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H.

A 30. M 60. N 120. B 240.

I 6. L 12. K 24.

C 2. D 3. E 5. F 4. G 6. H 10.

Apparatus. Multiplicando ſe mutuò C, D, efficiant I; & F, G, generent K; & D, F, faciant L; & E, H, multiplicando ſeorſim L, producant M, N.

Demonſtratio. Dantur C, D, E proportionales his F, G, H, ita vt ſit C ad D, vt F ad G; tùm D ad E, vt G ad H; ergo viciſſim erit per prop. 13. lib. 7, C ad F vt D ad G, & E ad H. Sed & D multiplicans C & F, produxit I, & L; ergo per prop. 17. libr. 7. erit vt C ad F, ita I ad L: Item F multiplicans D & G, procreauit L & K; ergo per eandem propoſ. 17. libr. 7. erit vt D ad G, ita L ad K: Sunt ergo I, L, K, continuè proportionales in ratione C ad F, vel D ad G, vel E ad H, quas oſtendimus eſſe eaſdem. Verùm ſolidus A numerus,

rus, progenitus eſt mutua multiplicatione laterum C,D,E; productus eſt I ex ductu C in D, ergo ſi E multiplicauerit I, efficiet A ſolidum. Pariter B ſolidus fit ex multiplicatione trium laterum F,G,H; & K productus eſt ex F in G; ergo H multiplicans K efficiet B ſolidum: ſed E multiplicans I,L, procreauit A, M; ergo per prop.17.libr.7. erit vt I ad L, hoc eſt vt C ad F, vel D ad G, vel E ad H, ita A ad M: tùm etiam H multiplicans L,K, produxit N, & B; ergo per prop.17.lib.7, erit N ad B, vt L ad K, hoc eſt vt C ad F, vel D ad G, vel E ad H: Eſt autem M ad N, vt E ad H, per prop.18.lib.7. propterea quod E & H multiplicantes ſeorſim L, progenuerint M & N: ergo erunt continuè proportionales A, M,N,B, in ratione C ad F, vel D ad G, vel E ad H; vnde inter duos ſolidos numeros ſimiles A & B, duo medij M, N, continuè proportionales cadunt. Cùm igitur ſint proportionales continuè quatuor iſti numeri A, M, N, B, proportio primi A ad B quartum, erit iuxta 26. defin. libr. 7. triplicata eius quam habet A ad M, primus ad ſecundum: oſtendimus autem rationem A ad M, eſſe eandem quæ C ad F, vel D ad G, vel E ad H: Igitur ſolidus A numerus ad ſolidum B numerum ſimilem, habebit triplicatam rationem eius quam habet C ad F, vel D ad G, vel E ad H, latus ad latus homologum. Duo igitur propoſita demonſtrauimus.

## PROPOSITIO XX.

### Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus: Similes plani erunt illi numeri.

Suppoſitio. Inter A & B numeros, medius proportionalis D incidat: Dico A & B, eſſe planos numeros ſimiles.

Apparatus. Per prop.35.lib.7. Reperiantur minimi numeri D, E, in ratione A ad C, vel C ad B.

A 18. C 24. B 32.

D 3. E 4. F 6. G 8.

Demonſtratio. Cùm ſint D, E, minimi numeri, in ratione A ad C, æquemetientur ipſos A,C, per propoſ.21.libr.7. per aliquem numerum qui ſit F: iidem etiam D, E, minimi, æquemetientur alios duos C, B, eandem rationem habentes cum illis, per aliquem numerum qui ſit G, iuxta cit. propoſ.21. libr.7. Quare per 9. axio. lib.7. F multiplicans D, & E, efficiet A & C; & G multiplicando D & E eoſdem, producet C & B: Verùm E multiplicans F & G, progenuit C & B, ergo per prop.17.lib.7. erit vt C ad B, ita F ad G; ſed in apparatu oſtendimus eſſe C ad B, vt D ad E; ergo per prop.11.lib.5. erit vt D ad E, ita F ad G: & per prop.13.lib. huius, erit viciſſim vt D ad F, ita E ad G: quia autem F multiplicans D, produxit A, erit ex definitione 16. libr.7. A planus numerus, cuius latera D, F. Pari artificio; quia G multiplicans E, progenuit B, erit B planus numerus, eiuſque latera E G, ex citata defi. Verùm latera hæc illis proportionalia eſſe oſtendimus; D ad F, vt E ad G; erunt dicti plani A,B, ſimiles per defin.21.lib.7.

## PROPOSITIO XXI.

### Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; ſimiles ſolidi ſũt illi numeri.

Suppoſitio. Inter duos numeros A, B, incidant duo medij C, D, proportionales: Dico A & B eſſe ſimiles ſolidos numeros.

A 24. C 72. D 216. B 648.

E 1. F 3. G 9.

H 1. I 1. M 24. K 3. L 3. N 72.

Apparatus. Per prop.35.lib.7. Sumantur tres E, F, G, minimi numeri in ratione A ad C, vel C ad D, vel D ad B: quandoquidem dantur quatuor hi numeri A, C, D, B, continuè proportionales.

A 8. C 12. D 18. B 27.

E 4. F 6. G 9.

H 2. I 2. M 2. K 3. L 3. N 3.

Demonſtratio. Quia ſunt continuè proportionales numeri E, F, G, & cadit medius F, inter E & G numeros, erunt per prop. 20. lib. huius, hi numeri E,G, ſimiles plani: ſintque plani E, latera eius duo H, I; & plani alterius G, latera duo K, L: Sunt autem ex apparatu minimi E,F,G in ratione A,C,D, ergo per prop.21.lib.7. illi minimi, hos maiores æquemetientur, ſinguli ſuos proprios, per aliquem numerum, puta M: Pariter iidem minimi

Y

nimi E, F, G, æquemetientur ſuos maiores proprios C, D, B, in eadem ratione cum illis, per aliquem numerum, qui ſit N: verùm per ax.9. libr.7. M multiplicans E,F,G, faciet A, C, D; & N multiplicans eoſdem E,F,G, producet C, D, B: procreatus eſt autem E ex ductu mutuo laterum ſuorum H, I; tùm G ex mutuo ductu laterum ſuorum K, L; ergo A procreatur ex mutuo ductu H, I, M; & B, ex mutuo ductu K, L, N: vnde ex def. 17. libr. 7. ſolidi erunt numeri A, & B, primuſque A habebit latera tria H,I,M; & ſecundus B, latera tria K, L, N. Sed & M & N, multiplicantes F, generarunt C & D, ergo per 18. prop. libr. 7. erit C ad D vt M ad N; ſunt verò C & D, in eadem ratione, qua E & F, per 17. propoſ. lib. 7. quia N multiplicans E & F generarunt C & D; tùm E & F eandem habent rationem quàm H, K, vel I, L; nam inter planos ſimiles puta E, G, cadere F medium proportionalem numerum, in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L, oſtenſum eſt in demonſtratione propoſitionis 18. lib. huius, erit igitur etiam H ad K, & I ad L, vt M ad N, per prop. 11. lib. 5. ergo viciſſim per prop. 13. lib. 7. erit H ad I, vt K ad L; & I ad M, vt L ad N: igitur latera H,I,M, erunt proportionalia lateribus K, L, N; vnde erunt ſimiles ſolidi numeri A & B, iuxta defin. 21. libr. 7. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XXII.

Si tres numeri deinceps ſint proportionales; primus autem ſit quadratus, & tertius quadratus erit.

SVppoſitio. Tres numeri A,B,C, ſint continuè proportionales, primuſque A, quadratus numerus: Aſſero tertium C, quadratum etiam eſſe.

A 9. B 27. C 81.

H 3. I 9.

D 3. E 3. F 9. G 9.

Demonſtratio. quia inter duos numeros A, C, cadit vnus medius proportionalis B, ipſi A & C, erunt ſimiles plani numeri per prop. 20. lib. huius: horum verò planorum numerorum ſimilium ſint latera ſimilia iuxta def. 21. lib. 7. F, G, ipſius C; & D, E, ipſius A; ita vt ſit D ad E, vt F ad G; & aſſumatur H latus

A 36. B 48. C 64.

H 6. I 8.

D 3. E 12. F 4. G 16.

quadrati A dati: Iam verò cùm A producatur ex ductu H in ſeipſum iuxta def. 18. lib. 7. vel ex ductu laterum ſuorum mutuò D, E, per def. 16. eiuſdem libr. 7. erunt numeri D, H, E, continuè proportionales iuxta prop. 20. libr. 7. ſed eſt F ad G, vt D ad E, inciditque medius H proportionalis inter D & E, incidet etiam iuxta prop. 8. libr. huius, medius I numerus inter F & G: Habebimus ergo hos tres numeros F, I, G, continuè proportionales; ergo per cit. prop. 20. lib. 7. idem numerus producetur ex F in G, quam ex I in ſeipſum: fit autem numerus C ex ductu F & G laterum ſuorum iuxta definitionem 16. lib. 7, ergo & idem C numerus progignetur ex ductu I in ſeipſum: quare per def. 18. libr. 7. C numerus tertius etiam quadratus erit.

## PROPOSITIO XXIII.

Si quatuor numeri deinceps ſint proportionales; primus autem ſit cubus, & quartus cubus erit.

SVppoſitio. Quatuor ſint numeri continuè proportionales A, B, C, D, primus eorum A cubus: Aſſero quartum D eſſe etiam cubum numerum.

Apparatus. Per prop. 35. libr. 7. Reperiantur minimi numeri quatuor E, F, G, H, eandem rationem habentes cum datis A, B, C, D, continuè proportionalibus.

Demonſtratio. Imprimis iuxta propoſ. 21. lib. 7. E metietur A æquè vt F ipſum B, & G ipſum C, & H ipſum D: Sunt autem per coroll. 2. prop. 2. libr. huius, duo extremi numeri E, H, quatuor minimorum repertorum, cubi; & eſt ex datis A cubus, ergo per 12. prop. lib. huius medij duo incident numeri I, K, inter E & A cubos. Quia verò quatuor numeri A, B, C, D, dati, ſunt proportionales minimis inuentis E,F,G,H; erit per 14. prop. libr. 7. ex æquo, vt A ad D, ita E ad H; & viciſſim per 13. libr. eiuſdem, erit vt A ad E, ita D ad H; vnde per 8. propoſ. lib. huius incident inter H & D, duo medij numeri proportionales L, M. Sed ex apparatu cùm quatuor E, F, G, H, ſint minimi in eadem proportione aliorum datorum quatuor A, B, C, D, metietur H ipſum D, per propoſit. 21. libr. 7; ergo etiam idem H, ſecundum L è quatuor H, L, M, D,

A 64. B 160. C 400. D 1000.

K 32. M 500.

I 16. L 250.

E 8. F 20. G 50. H 125.

P 1000. O 10. N 5.

H,L,M,D, per prop. 7. lib. huius. Quod ſi aſſumamus N, latus cubi H, metiaturque N toties numerum O, quoties H ipſum L, ita vt L ad H, & O ad N, eandem habeant rationem multiplicem; ſit quoque P cubus ipſius O. His aſſumptis, quandoquidem per prop. 12. libri huius ratio L ad H cubi ad cubum, triplicata ſit rationis O ad N, lateris ad latus, id eſt L ad H; ſit autem & ratio D ad H, eadem quæ L ad H, iuxta def. triplicatæ rationis, eo quòd inuertendo iuxta coroll. propoſ. 4. lib. 5. proportionales etiam ſint D, M, L, H; erit P ad H, vt D ad H, quare per 9. prop. libr. 5. erunt æquales numeri P & D: P autem cubus eſt oſtenſus, ergo etiam D quartus numerus è primis datis A, B, C, D, cubus erit. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XXIV.

Si duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; primus autem ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit.

SVppoſitio A ad B ſit, vt quadratus C ad quadratum D: Aſſero B ſecundum numerum è datis eſſe quadratum, poſito quod A primus ſit quadratus.

A 36. F 48. B 64.

C 9. E 12. D 16.

Apparatus. Cùm dentur quadrati numeri C & D, cadet per propoſ. 11. libri huius, inter eos medius proportionalis numerus E: Et quia datur A ad B, vt C ad D, etiam per 8. prop. libri præſentis, cadet inter A & B, alius proportionalis numerus F.

Demonſtratio. Tres ſunt numeri proportionales A, F, B, & A primus datur quadratus, erit per prop. 22. lib. huius, tertius B quadratus erit. quod erat concludendum.

### COROLLARIVM.

*Propoſitio cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum, exhiberi non poteſt in duobus numeris quadratis.*

SI enim exhiberetur in duobus numeris quadratis, alter non quadratus datus numerus eſſet quadratus per iſtam prop. contra hypotheſim.

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Numeri in dupla proportione, rationem non habent, quam quadratus ad quadratum.*

SI enim haberent: eſſent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. &c. quadrati. nam primo 4, exiſtente quadrato, eſſet per hanc prop. 24. etiam ſecundus 8 quadratus.

### COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Numeri in quintupla proportione, non habebunt proportionem, quam quadratus ad quadratum.*

SI enim haberent illam proportionem, (vti etiam de numeris in dupla proportione) inter illos caderet medius numerus proportionalis per 11. prop. libr huius, quod fieri nullo modo poteſt. ex corollar. noſtris ad propoſ. 8. libri huius.

## PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum; primus autem ſit cubus, & ſecundus cubus erit.

SVppoſitio. A & B duo numeri, ſint inter ſe, vt C cubus ad cubum D; ſitque primus A cubus: Aſſero etiam B ſecundū eſſe cubum.

Demonſtratio. Datur A ad B, vt C ad D; cadunt autem per propoſ. 12. libri huius inter C & D cubos, duo medij proportionales numeri E, F; ergo etiam per 8. prop. libr. huius, duo medij alij proportionales numeri G, H, inter A & B numeros eandem habentes rationem cum cubis C & D. Habemus ergo quatuor numeros continuè proportionales

A 8. G 12. H 18. B 27.

C 64. E 96. F 144. D 216.

A, G, H, B, quorum primus A cubus eſt datus; igitur per prop. 23. libri præſentis, quartus B etiam cubus erit. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM

*Proportio cuiuſuis numeri cubi ad numerum non cubum, non poteſt reperiri ſub duobus numeris cubis expreſſa.*

SI enim reperiretur, eſſent duo numeri dati ambo cubi per iſtam propoſitionem, cum detur ſecundus non cubus: ſe enim mutuò deſtruunt hypotheſis & concluſio.

## PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SVppoſitio. Dentur A & B, plani ſimiles: Aſſero ita eſſe A ad B, vt aliquis quadratus D, ad aliquem quadratum F.

A 20. C 30. B 45.

D 4. E 6. F 9.

Apparatus. Per prop. 18. libr. huius; cùm dentur numeri A & B ſimiles plani, inter eos mediabit proportionalis numerus C. Tùm per prop. 35. lib. 7. ſumantur tres minimi numeri D, E, F, in eadem ratione aliorum trium A, C, B, continua.

Demonſtratio. Per corollar. 1. prop. 2. libr. præſentis, extremi numeri D, & F, trium minimorum deinceps proportionalium D, E, F, ſumptorum, ſunt quadrati: cùm ergo ſit A ad B, vt D ad F, in confeſſo erit planos A & B ſimiles numeros, ita eſſe, vt quadratus D numerus ad quadratum F numerum, ſicuti fuit propoſitum.

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Numeri proportionem habentes, quam quadratus numerus ad numerum quadratum, ſimiles plani ſunt.*

SIt Numerus A ad numerum B, vt C quadratus numerus ad D quadratum numerum: Sed per propoſ. 11. lib. huius inter C & D cadit medius numerus proportionalis; ergo per prop. 8. lib. huius, etiam cadet medius numerus proportionalis inter A & B; ergo per propoſ. 20. libr. huius, A & B numeri erunt ſimiles plani.

COROLLARIVM NOSTRVM

I I.

*Plani numeri non ſimiles, non ſunt vt quadratus numerus ad quadratum numerum.*

SI enim ita ſe haberent, eſſent per corollar. præcedens, ſimiles plani, contra datum.

## PROPOSITIO XXVII.

Similes ſolidi numeri rationem habent inter ſe; quam cubus numerus ad cubum numerum.

SVppoſitio. Dati ſint ſimiles numeri ſolidi A & B: Aſſero ita eſſe A & B, vt cubus aliquis numerus E ad cubum aliquem numerum H.

A 240. C 360. D 540. B 810.

E 8. F 12. G 18. H 27.

Apparatus. Inter datos numeros A & B ſolidos ſimiles, cadet duo medij numeri proportionales C & D, iuxta prop. 19. lib. huius. Sumantur autem per prop. 35. libr. 7. quatuor numeri continuè proportionales minimi in ratione continua aliorum quatuor A, C, D, B; & ſint minimi ſumpti E, F, G, H.

Demonſtratio. Aſſumptorum quatuor minimorum extremi E, H. cubi erunt ex coroll. 1. prop. 2. libri huius: comparando autem hos minimos cum aliis quatuor nō minimis prædictis, erit per prop. 14. lib. 7. ex æqualitate, A ad B, vt E ad H: Ergo cùm oſtenderimus E & H cubos eſſe numeros, erit A ad B, vt cubus ad cubum, quod erat concludendum.

COM-

# COMMENTARIVS IN LIBRVM NONVM ELEMENTORVM GEOMETRICORVM EVCLIDIS.

## PROPOSITIO I.

Si duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuò, faciant quendam; Productus quadratus erit.

SVPPOSITIO. Sint duo plani numeri A, B, ſimiles, & multiplicando ſe inuicem producant C numerum; hunc C aſſero eſſe quadratum numerum.

Apparatus. A numerus multiplicans ſeipſum, producat D, quadratum numerum iuxta defin.18. lib.7.

A 6. B 24

D 36. E 72. C 144.

Demonſtratio. A multiplicans ſeipſum, & B, ſeorſim, produxit D, & C; ergo per prop. 17.lib.7.erit vt A ad B, ita D ad C; ſed inter A & B planos ſimiles incidet medius numerus proportionalis per prop. 18. libr.8. igitur per prop.8. eiuſdem libri, etiam incidet alius medius proportionalis, puta E inter D & C numeros. Tres ergo habebimus numeros D, E, C, continuè proportionales, quorum primus D quadratus eſt per apparatum, ergo per prop.22.lib.8.vltimus C erit quadratus, productus ab duobus datis numeris planis A, B, ſimilibus. quod erat propoſitum.

## PROPOSITIO II.

Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes, faciant quadratum; ſimiles plani erunt.

SVppoſitiò. Duo numeri A & B ſe mutuò multiplicantes producant C quadratum numerum: Dico numeros A & B eſſe ſimiles planos numeros.

A 6. B 24.

D 36. E 72. C 144.

Apparatus. A multiplicando ſeipſum, generabit D quadratum numerum.

Demonſtratio. A multiplicãs A & B ſeorſim, produxit duos numeros D, C, ergo per prop.17.li.7.erit D ad C vt A ad B: Sunt autẽ duo numeri D & C quadrati; ergo per 11. prop.lib. 8. inter eos incidet medius numerus proportionalis; ergo etiam alius medius numerus proportionalis cadet inter alios duos A & B datos, per prop.8.lib.8.ergo per prop. 20. libr. eiuſdem 8, iſti duo numeri A & B, erunt plani ſimiles. quod erat demõſtrandum.

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Quadrati duo numeri ſe mutuò multiplicantes, productum efficiunt quadratum.*

QVadrati enim numeri ſunt ſimiles, ergo per 1. prop. huius libri, productus ex illis numerus, erit quadratus.

## COROLLARIVM NOSTRVM I I.

*Si duorum numerorum ſe mutuò multiplicantium productus fuerit quadratus; & alter eorum fuerit quadratus; reliquus etiam erit quadratus.*

NAm per 2.prop.libr.huius, duo numeri dati ſe mutuò multiplicantes erunt ſimiles plani, eo quod quadratum procreent; atque per prop.18.libr.8. cadet inter eos medius numerus proportionalis: ergo cùm alter datorum ſit quadratus nempe primus, tertius erit quadratus, videlicet alter è datis, per propoſ.22.libr.8.

## COROLLARIVM NOSTRVM I I I.

*Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes, quadratum minimè procreent, & alter eorum ſit quadratus; reliquus minimè erit quadratus.*

ESto ſi fieri poſſit alter è numeris datis quadratus, vt alius è datis; tunc per præcedens 1. corollar. ſe mutuò multiplicantes quadratum gignent numerum, contra hypotheſim: igitur reliquus è datis numeris minimè quadratus erit.

## COROLLARIVM NOSTRVM I V.

*Si duo numeri quadratus vnus, & alter non quadratus, ſe mutuò multiplicent, non producent quadratum.*

SI enim producerent quadratum numerum, cùm alter detur quadratus, reliquus etiam quadratus eſſet per 2. coroll. noſtrum. contra hypotheſim: igitur poſitio contradicens aſſertioni huius corollarij, è qua procedit abſurdum, falſa erit, & aſſertio vera.

## PROPOSITIO III.

Si cubus numerus ſe ipſum multiplicans, procreet aliquem: Productus, cubus erit.

SVppoſitio. Cubus A, ſe ipſum multiplicans, progeneret B numerum: Dico hunc progenitum numerum B eſſe Cubum.

A.
8.

E 16. D 4.

F 32. C 2.

B 64. vnitas.

Apparatus. Cubi dati A, latus ſit C numerus, qui in ſe ductus producet D quadratum; & multiplicans ipſum D, procreabit ipſum cubum A datum, iuxta definitiones 18. & 19. libr. 7.

Demonſtratio. C multiplicando ſeipſum fecit D, ergo per 7. axioma libr. 7. C metietur D per C ipſum; hunc verò C numerum metitur vnitas per ipſum C numerum, iuxta axioma 5. libr. 7. Sed etiam C multiplicans D, progenuit A cubum, ergò per cit. axio. 7. libr. 7. D metietur A per numerum C: habemus igitur vnitatē quæ metitur C numerum; per C numerū & ipſum C numerum qui metitur D per ipſum C; & D qui metitur A, per ipſum C: ergo quæ pars eſt licet impropriè dicta, vnitas numeri C, eadē eſt pars propriè dicta numerus C, numeri D; & numerus D, numeri A; quare per def. 20. li. 7. iſti numeri quatuor erunt cōtinuè proportionales, Vnitas, C, D, A. Prætereà ex datis A multiplicans ſe ipſum produxit B, ergo A metitur B per A numerum, iuxta axioma 7. lib. 7. A verò metitur vnitas per A numerum iuxta ax. 5. lib. cit. ergo quæ pars licet impropriè dicta eſt vnitas numeri A. eadem erit A reſpectu numeri B; igitur per cit. prop. 20. lib. 7. erit vnitas ad A, ſicuti A ad B: Sed inter vnitatem & A, oſtendimus mediare duos numeros C, D, continuè proportionales, ergo per 8. prop. libr. 8. mediabunt etiam duo numeri continuè proportionales E, F, inter A ad B. Igitur cùm ſint quatuor numeri A, E, F, B, continuè proportionales, eorumque primus A ſit cubus ex datis, extremus B etiam erit cubus per prop. 23. lib. 8. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO IV.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus, cubus erit.

SVppoſitio. Cubus A, cubum B numerum multiplicans efficiat numerum C: dico hunc C factum numerum eſſe cubum.

E. 8.

A 8. B 27.

D 64. C 216.

Apparatus. Cubus A ſeipſum multiplicando efficiet cubum D numerum per prop. 3. libr. huius.

Demonſtratio. A multiplicans A & B ſeorſim, fecit C & D; quare per prop. 17. lib. 7. erit C ad D vt A ad B: At per propoſ. 12. lib. 8. inter A & B cubos numeros duo intercipiuntur medij numeri continuè proportionales, igitur etiã duo alij medij numeri continuè proportionales erunt inter C & D, per prop. 8. libr. 8. ſed horum quatuor primus D eſt cubus factus, ergo etiam poſtremus C, cubus erit, per prop. 23. libr. 8. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO V.

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans, faciat cubum; Et multiplicatus, cubus erit.

SVppoſitio. Cubus A, numerum B multiplicans, progeneret cubum C: Dico B numerum multiplicatum eſſe cubum.

Apparatus. A ſe ipſum multiplicans faciet D cubum, iuxta propoſitionem 3. libri huius.

A 8. B 27.

D 64. C 216.

Demonſtratio. Quandoquidem A multiplicans A & B ſeorſim fecit D, & generat C; erit per prop. 17. 7. lib. D ad C vt A ad B: ſed per prop. 19. libr. 8. inter D & C, cubos, illum factum, hunc datum, cadent duo medij continuè proportionales numeri; ergo per prop. 8. lib. 8. totidem duo intermedij numeri cadent proportionales continuè A & B; ſed horum A & B primus datus eſt cubus, ergo per 23. prop. lib. 8. poſtremus B cubus erit, multiplicatus inquam numerus B, per A cubum. Sicuti fuit propoſitum.

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Si cubus numerus multiplicet numerum non cubum, factus cubus non erit.*

SI enim cubus fieret, multiplicatus numerus eſſet cubum, per hanc prop. 5. contrà hypotheſim: quare factus non erit cubus.

### COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Si cubus numerus multiplicans numerum, generet numerum minimè cubum; multiplicatus, cubus non erit.*

NAm ſi multiplicatus eſſet cubus, factus etiam cubus eſſet per prop. 4. lib. huius, contra hypotheſim; ergo multiplicatus non erit cubus.

## PROPOSITIO VI.

Si numerus ſeipſum multiplicans, cubum faciat; & ipſe cubus erit.

SVppoſitio. Numerus A ſeipſum multiplicans faciat B cubum: Aſſero A numerum eſſe cubum.

A 8. B 64.

C 512.

Apparatus. Numerus A multiplicans B cubum datum, producat C, qui fiet etiam ex ductu cubi B in A, iuxta propoſ. 16. libr. 7. quare per 4. prop. lib. huius, C factus numerus erit cubus.

Demonſtratio. Quandoquidem B cubus multiplicans A numerum, progenuit C numerum cubum, erit per prop. præcedentem 5. libri huius, ipſe A numerus multiplicatus, cubus, quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO VII.

Si cõpoſitus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat; factus, ſolidus erit.

SVppoſitio. A numerus compoſitus numerum B aliquem multiplicans, producat

C : aſſero hunc productum numerum C eſſe ſolidum.

A 6. B 11. C 66.

D 2. E 3.

Demonſtratio. A compoſitum numerum metietur præter vnitatem aliquis numerus D, per aliquem numerum E, iuxta def. 13. libr. 7. quare per axio. 9. libr. eiuſdem 7. Si D multiplicet E, fiet A ; datur verò A compoſitus numerus multiplicando B, procreare C; ergo per ductum mutuum trium horum numerorum D, E, B, gignetur numerus C; ergo per definit. 17. lib. 7. ſolidus erit numerus C. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO VIII.

Si ab vnitate, quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate, quadratus eſt; & vnum intermittentes, omnes. Quartus autem eſt cubus; & duos intermittentes, omnes. Septimus verò cubus ſimul & quadratus; & quinque intermittentes, omnes.

SVppoſitio. Dati ſint hi tredecim ab vnitate incluſiuè numeri continuè proportionales; ( & ſic de pluribus quacumque multitudine ) A. B. C. D. E. F. G. H. I. K. L. M. Aſſero tertium ab vnitate incluſiuè, videlicet B eſſe quadratum, & reliquos omnes vnum intermedium relinquentes, eſſe quadratos, videlicet D, F, H, K, M : Quartum autem C cubum, duoſque intermittendo, ſequentes eſſe cubos, videlicet F, I, M: Septimum denique F, quadratocubum ; & quinque intermittendo ſequẽtes eſſe quadratocubos, nimirum M.

Vnitas. A 3. B □ 9. C cub. 27. D □ 81.

E 243. F □ cub. 729. G 2187. H □ 6561.

I cub. 19683. K □ 39049. L 177147.

M □ cub. 531441.

Demonſtratio. Quia tres numeri ſunt continuè proportionales, vnitas, A, B, & vnitas quadratum eſſe poteſt, erit tertius B numerus quadratus per prop. 22. lib. 8. ſumendo autem tres numero continuè proportionales, B, C, D, quia B oſtenſus eſt quadratus, erit D quadratus per cit. prop. 22. lib. 8; & ſic de reliquis vſque ad finem vnum intermedium reliquendo. Præterea quia vnitas poteſt eſſe cubus, & dantur quatuor numeri vnitas, A, B, C, quartus C erit cubus : per prop. 23. lib. 8. ſumendo autem ſequentes alios numeros è datis deinceps proportionales tres, includendo C cubum oſtenſum, videlicet C, D, E, F, quartus F erit etiam cubus, qui diſtat duobus ab cubo prædicto B; & ſic de aliis omnibus huiuſmodi vſque ad finem. Denique quia ſeptimus F, oſtenſus eſt quadratus & cubus, erit quadrato cubus, & quinque intermedios, relinquendo erit M etiam quadrato cubus ex oſtenſis. Probauimus ergo totam propoſitionem.

## PROPOSITIO IX.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem ſit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt.

At ſi qui poſt vnitatem fuerit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SVppoſitio. Numeri quotcũque deinceps proportionales ſint ab vnitate incluſiuè, 1. A. B. C. D. E. F. ſitque primus ab vnitate, nimirum A quadratus : Dico reliquos omnes B, C, D. &c. numeros illos datos, eſſe quadratos. Quod ſi primus A ab vnitate detur cubus, reliquos omnes aſſero eſſe cubos.

Vnitas A 4. B 16. C 64. D 256.

E 1024. F 4096.

Demonſtratio. Per præcedentem propoſitionem 8. B numerus erit quadratus, quia tertius ab vnitate : quod ſi ſumatur tres A, B, C,

Vnitas A 8. B 64. C 512.

D 4096. E 32768. F 262144.

cùm detur primus A quadratus, tertius C erit quadratus per prop. 22. libr. 8. Quod ſi ſumantur tres conſequentes, B, C, D, quia B oſtenſus eſt quadratus, tertius D, erit quadratus,

dratus: hoc artificio demonſtrabuntur omnes quadrati numeri dati: & ſic patebit prima aſſertio ſeu pars huius propoſitionis. Secunda verò ſic demonſtrabitur: Cùm numeri dati ſint continuè proportionales, erit vnitas ad A, vt A ad B; ergo per def.20.libr.7. vnitas æquemetietur A, vt A ipſum B; metitur autem vnitas ipſum A, per A, iuxta 5.ax. libr. 7. ergo & A ipſum B metietur per ſeipſum A: igitur datus cubus A, ſe ipſum multiplicans generabit B numerum per ax. 9. lib. 7. & genitus B numerus erit cubus per 3.propoſ. libr. huius: Sed quia dantur quatuor numeri proportionales, vnitas, A, B, C, vnitasque cenſeri poteſt cubus, erit C etiam cubus per præced. propoſ. 8: Sumendo autem hos quatuor numeros deinceps proportionales A.B.C.D. datúrque cubus A, erit & D cubus per prop.23.lib.8. Similiter probabuntur reliqui omnes dati numeri cubi: Atque ita propoſitio manifeſta facta fuit.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Dati iidem numeri continuè proportionales, erunt quadrato cubi: ſi fuerit datus primus ab vnitate quadrato cubus.*

NAm per primam partem huius propoſitionis, oſtenſi erunt omnes quadrati, & per ſecundam partem, omnes cubi; ergo quadrato cubi erunt omnes propoſiti numeri continuè proportionales.

## PROPOSITIO X.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem non ſit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes, omnes.

At ſi qui poſt vnitatem, non ſit cubus; neque vllus alius cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes, omnes.

SVppoſitio. In exemplo propoſitionis 8. lib. huius. Sint quotcumque numeri continuè proportionales ab vnitate, 1. A. B. C. D. E. F. G. H. I. K. L. M. Sed A qui poſt vnitatem immediatè ſitus eſt, non ſit quadratus: Dico nullum ex aliis ſequentibus eſſe quadratum, exceptis tertio B, & vno intermiſſo omnibus aliis, videlicet B, D, F, H, K, M, qui erunt quadrati per prop.8. libri huius. Quod ſi numerus A qui poſt vnitatem ſequitur, non ſit cubus, nullus alius è ſequêtibus cubus erit, exceptis quarto C, & duobus intermiſſis, reliquis vtpote F, I, M, qui cubi erunt per 2. partem prop.8. libri præſentis.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit quicumque alius numerus ab exceptis, quadratus, v.g. E, qui comparatus cum ſequenti ſuo immediato numero F quadrato ex dictis, eandem habebit rationem, quam A ad B; ergo per coroll. prop.4.lib.5. erit inuertendo vt F ad E ita B ad A, hoc eſt vt quadratus numerus F ad quadratum numerum E, ita quadratus numerus B ad alium A numerum; igitur per 24.prop.lib.8. erit A datus numerus non quadratus, quadratus: quæ contradictio indicat poſitionem vnde procedit eſſe falſam, nimirum E numerum eſſe quadratum; non ergo erit quadratus: Et ſic fiet diſcurſus in aliis excluſis numeris ab natura quadrati numeri. Sed eſto etiam ſi fieri aliquis numerus excluſus ab natura cubi, cubus, vtpotè L, qui etiam comparetur cum alio immediatè ſuo conſequente M, cubo ex dictis in ſuppoſitione, habebit rationem eandem ad illum, quam B ad C, ex natura numerorum deinceps proportionalium: ſed etiam inuertendo erit iuxta coroll. prop.4.libr.5. vt cubus M ad L cubum, ita C cubus ad numerum B, quare per prop.25.lib.8. erit B cubus: Simili modo erit C cubus ad B cubum, vt B cubus ad A numerum, ideóque per cit.prop.25.lib.8. A numerus excluſus ab natura cubi, erit cubus: hæc contradictio, cùm proueniat ex poſitione alicuius numeri excluſi ab natura cubi, vt cubus, falſa erit, ideóque nullus illorum numerorum excluſorum ab natura cubi, cubus erit. Patet ergo veritas propoſitionis.

## PROPOSITIO XI.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint: minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sũt numeris.

SVppoſitio. Sint ab vnitate quotcumque numeri continuè proportionales, 1. A. B. C. D. E. F. &c. vt in ſuperioribus propoſitionibus:

nibus: Dico quemcumque minorem ex illis, metiri quemcumque maiorem ex illis, per aliquem numerum eorum qui ſunt dati proportionales.

Apparatus. Vel aſſumetur aliquis minor metiturus immediatè ſequentem maiorem; vel aliquem ex remotioribus maioribus.

In primo caſu demonſtratur propoſitio. Exempli gratia aſſumendo A minorem & maiorem B: erit ex datis A ad B, vt vnitas ad A, quare per def.20.libr.7. quæ pars erit vnitas licet impropriè dicta ipſius A, eadem erit A pars ipſius B maioris, æquemetietur ergo vnitas ipſum A, vt A ipſum B, ſed vnitas metitur A, per ipſum numerum A, iuxta 5 axio. lib. 7. ergo A etiam metietur B maiorem numerum per ipſum A numerum vnum è datis: & ſic de reliquis in hoc caſu diſcurrendum erit. Age verò demonſtremus ſecundum caſum, & aſſumamus numerum B metiturum maiorem G: Aduerte quot numeris datis proportionalibus diſtet B minor ab G maiore, hoc eſt ſex numeris incluſiuè; & accipe E numerum, æquidiſtātem ab vnitate incluſiuè: Iam verò quia tot ſunt multitudine numeri in continua proportione eadem, ab B ad G, quot ab vnitate ad E, erit per prop.14.libr.7. ex æquo, vt vnitas ad E, ita B ad G; quare per def.20.lib.7.quæ pars erit vnitas ipſius E, eadem erit B ipſius G; ergo æquemetietur B ipſum G, vt vnitas ipſum E; ſed per ax.5.lib.7. vnitas metitur E, per ipſum E; ergo B metietur G maiorem numerum per E alium ex datis proportionalibus. quæ omnia erant demonſtranda.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Numerus minor metiens maiorem in datis continua proportione eadem numeris ab vnitate incipientibus, tot locis diſtat ab maiore dimenſo, quot vnitas locis diſtat ab metiente minore.*

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Quilibet numerus ex datis continuè proportionalibus ab vnitate incipientibus, ſe ipſum multiplicans, producet numerum maiorem tot locis ab ſuo diſtans, quot ipſe locis diſtat ab vnitate.*

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Eiſdem datis; qnilibet numerus alium multiplicans maiorem, (ex datis) procreabit numerum diſtantem tot locis à maiore multiplicato, quot diſtat locis minor multiplicans ab vnitate.*

Primum in demonſtratione allata manifeſtum eſt. Alia verò duo dependent ex 9.ax. libr. 7. Cùm enim minor metiatur maiorem diſtet minor metiens tot locis à maiore dimenſo, quot minor metiens diſtat ab vnitate; ſiue ſeipſum multiplicet minor, ſiue multiplicet alium per quem metitur maiorem, producet illum quem metitur; atque adeò reponendus erit tot locis diſtans ab minore metiente, quod locis diſtat numerus per quem metitur illum, ab vnitate.

## PROPOSITIO XII.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint; quicumque primorum numerorũ vltimum metiuntur, iidem & eum qui vnitati proximus eſt, metientur.

Svppoſitio. E numerus primus metiatur vltimum C, è numeris iſtis datis continuè proportionalibus ab vnitate incipientibus: 1. A. B. C. Dico quod idem E numerus primus, metiatur etiam A numerum proximiorem vnitati.

1. A 6. B 36. C 216.

E 3.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit E primus numerus minimè metiatur A, erunt numeri E, A, primi inter ſe per prop.31.libr.7. Sed per coroll.noſtrum 2.ad prop.præcedentem 11. A ſe ipſum multiplicans generat B numerum, ergo B ad E primus erit per 27. libr. 7. Quoniam igitur A & B ſunt primi ad E, factus numerus C, ex multiplicatione A in B, iuxta coroll.3.noſtrum ad prop.præcedentem; erit ipſe C factus numerus etiam primus erit ad E, per prop.26. libr.7. Simili diſcurſu, concludemus vltimum ſemper eſſe primum ad eundem E numerum: quare primus

mus numerus E quicumque aſſumptus fuerit metiens vltimum C, eum non menſurabit, contra hypotheſim: falſa igitur erit poſitio è qua dimanat iſtud abſurdum & contradictorium, videlicet primum numerum E dimetientem vltimum C, non metiri A viciniorem vnitati: eum ergo metietur, quod erat probandum.

## COROLLARIVM.

*Nullus numerus primus maior eo qui proximus eſt vnitati; neque vllus minor primus, proximiorem vnitati non metiens, metiri poteſt vltimum.*

SI enim metiretur vltimum, metiretur iuxta hanc propoſitionem; & proximiorem vnitati contra hypotheſim.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Quicumque numerus primus metitur vltimum è datis proportionalibus huiuſmodi numeris propoſitionis præſentis, metitur etiam omnes antecedentes numeros.*

IMprimis enim proximiorem vnitati metitur iuxta hanc propoſitionem, ſed hic proximior metitur omnes alios maiores per aliquem eorum iuxta prop. 11. præcedentem; ergo per 11. axioma libr. 7. metietur & omnes illos.

## PROPOSITIO XIII.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem, primus ſit: Maximum nullus alius metietur, præter eos qui ſunt in numeris proportionalibus.

SVppoſitio. Numeri A, B, C, D, ab vnitate ſint deinceps proportionales, & proximior vnitati ſit A primus numerus: Dico nullum alium numerum poſſe metiri maximum ex illis, præter eos qui ſunt dati numeri.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit aliquis alius numerus ab datis, vt E, qui metiatur maximum ſeu vltimum D. Imprimis iſte numerus E non poterit eſſe primus, nam quia datur metiri maximum ſeu vltimum D, metiretur etiam per 12. prop. præced. ipſum A primum datum; & ſic primus numerus menſuraretur ab alio numero diuerſo ab ſeipſo, contra def. 11. lib. 7. Relinquitur ergo vt nu-

Vnitas. A 5. B 25. C 125. D 625.

E. F.

merus E ſit compoſitus: hunc verò E numerum compoſitum metietur aliquis F primus numerus per prop. 33. libr. 7. qui iuxta ax. 11. lib. eiuſdem 7. etiam metietur extremum D; ideoque etiam per cit. 12. prop. præcedentem, menſurabit F numerus primus, numerum A primum. Iam verò, vel iſte numerus F æqualis eſt numero A, vel maior, vel minor. Si æqualis, ergo cùm F probatus ſit metiri D extremum ſeu maximum. A ſeu F etiam metietur eundem maximum, hoc eſt vnus numerus è datis metietur maximum; quod erat concludendum & propoſitum, & non alius diuerſus ab datis quod inuexerat aduerſarius, ex cuius poſitione ſequitur manifeſta illa contradictio. Quod ſi F numerus ſit maior quàm A, cùm oſtenſus ſit hic numerus F, metiri A, maior minorem menſurabit, ſeu totum adæquabitur parti, contra 8. axio. lib. 1. non erit igitur F maior quàm A. Quod ſi numerus F ſit minor quàm A; cùm ſit oſtenſus F metiri ipſum A, primum etiam numerum ex datis, minor numerus F quàm A, metietur primum A numerum, contra 11. def. lib. 7. Hæc abſurda tria indicant poſitiones tres aduerſarij eſſe falſas, quas inuexerat ad ſtabiliendam primam poſitionem ſuam contradicentem aſſertioni huius propoſitionis; vnde etiam falſa erit illa prima poſitio contradicens huic propoſitioni; quæ ideo demonſtrata erit.

## PROPOSITIO XIV.

Si minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

SVppoſitio. Numerum A minimum metiantur primi numeri B. C. D. Aſſero nullum alium numerum primum præter B, C, D, datos, metiri ipſum A. Quia nonnullis confuſa iſta propoſitio viſa eſt, eam ſic ordinatiorem reddo, ex propoſitione 38. libr. 7. in qua proponitur inuentio numeri minimi quem metian-

Digitized by Google

metiantur tres numeri dati; quæ propoſitio extendi poteſt per eius corollarium ad plures quàm tres numeros, quocumque numero; Igitur ſi dati numeri fuerint inter ſe primi, minimum numerum ab his dimenſum intelligere oportet in hac propoſitione.

A

B. C. D.

E. F.

Demonſtratio. Si fieri poſſit, E numerus alius primus ab datis B, C, D, metiatur A minimum numerum ab illis menſuratum D, B, C, primis inter ſe numeris; idque per numerum aliquem F. Quia E menſurat A per F, E multiplicans F, procreabit A, per 9.ax.lib.7. quem primi numeri B, C, D, ſeorſim menſurabant; ergo per prop.32. lib.7. ſinguli etiam illorum B, C, D, ſeorſim metientur E, vel F: Non E diuerſum ab illis, nam ſic E deſineret eſſe primus numerus per def.11.lib.7. ſed neque F, alioqui cùm F ſit minor quàm A, vtpote pars illius, minorem F, minimo dato A, metirentur iidem primi numeri dati B. C. D. atque ita A non eſſet minimus ab illis menſuratus, contra hypotheſim. Nullus igitur alius ab datis in principio primis inter ſe numeris, primus, minimum metietur numerum menſuratum ab illis.

## PROPOSITIO XV.

Si tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium: Duo quilibet compoſiti, ad reliquum, primi erunt.

Svppoſitio. Tres minimi numeri A, B, C, dati ſint, omnium eandem cum illis rationem habentium: Aſſero duos quoſlibet illorum ſimul ſumptos eſſe primos numeros ad reliquum: hoc eſt ſummam duorum AB, eſſe primam ad C; tùm ſummam duorum BC, eſſe primam ad A; denique ſummam duorum AC, eſſe primam ad B.

Apparatus. Per prop.35.libr.7. reperiantur duo minimi numeri D, E, in eadem proportione qua dati A, B, C.

A 9. B 12. C 16.

C 16.

D 3. E 4.

Demonſtratio quod A & B ſimul ſint primi ad C tertium. Ex demonſtratis in 2.prop. lib. 8. D multiplicans ſeipſum gignit A; & E multiplicans ſeipſum facit C; & D multiplicans E, producit B. Et quia D & E ſunt minimi numeri omnium duorum eandem rationem habentium, erunt per prop.24. lib.7. primi inter ſe numeri; tùm vterque ſimul DE, primus erit ad D, vel E, per 30. propoſ. libr.cit.7. Igitur quia DE, & D, ſunt primi ad E, productus numerus ex multiplicatione DE & D, ad eundem E primus erit per 26. prop. libr. 7: ſed ex priùs oſtenſis iſte productus numerus eſt AB; ergo AB compoſitus erit primus ad E: ſed C oſtenſus factus ex ductu E in ſe ipſum; ergo cùm primi ſint inter ſe AB compoſitus & E, etiam factus C ex ductu E in ſeipſum, primus erit ad alium AB compoſitum, iuxta prop.27.libr.7. quod erat concludendum.

Demonſtratio, quod compoſitus BC numerus ex B, C, poſtremis ſit primus ad reliquum A, eadem erit formaliter quæ ſuperior, niſi quod loco A & B, intelligendi ſint B, C.

A 9. B 12. C 16.

B 12.

D 3. E 4.

Demonſtratio, quod compoſitus AC ex extremis A, C, ſit primus ad medium C. Quoniam vti antea compoſitus DE, eſt primus ad D, vel E; ſeu quod idem eſt, vterque eorum D, E, diuiſim ſumptus, primus eſt ad compoſitum DE ex illis, per cit. prop. 30. lib. 7. erit etiam progenitus B, ex D in E, ad compoſitum DE primus per prop.26.lib.7. indeque per prop.27.libr. eiuſdem, B qui fit ex D in E, ad eum qui fit DE compoſito in ſe ipſum ducto, primus erit: Numerus autem qui fit ex DE compoſito, in ſeipſum ducto, æqualis eſt per 4.prop. lib. 2. illis numeris qui fiunt ex D & E in ſeipſos ductis, vna cum eo numero plano bis qui fit ex D in E; quare factus ex D in E primus erit ad eos qui generantur ex D & E in ſeipſos, & ex D in E bis. Quia autem duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis qui fiunt ex D & E in ſeipſos, & ex eo qui fit ex D in E, atque is qui fit ex D

ex D in E, primi ſunt ad aliquem illo[illegible], videlicet ad eum q[illegible] ex D in E vt[illegible] eum eſt: ergo per [illegible]p.30.lib[illegible] numeri, primus c[illegible]poſitus ex i[illegible] ex D & E [illegible], & ex co[illegible] ex D in E alter verò qui fit ex D in [illegible] erunt inter ſe primi n[illegible]eri. Inſuper cū[illegible] o[illegible] nu[illegible]os numeros ſimul, ni[illegible]mp[illegible]tu[illegible] ex iis qui fiunt ex D & E [illegible]pſi[illegible], a[illegible] ex D in E, ad ali[illegible]m i[illegible]lorum [illegible]pſoru[illegible], nempe ad factum ex D in E, eſſe primos[illegible] per prop.cit. 30.lib.7. duo illi nume[illegible]i, [illegible] et compoſ[illegible]us ex iis fiunt ex D [illegible] E in [illegible]p[illegible], & is [illegible] gignitur ex D in [illegible], primi [illegible] ſe. Quandoquidem ergo ex D & E in ſ[illegible] producantur A & [illegible]; tùm ex D in E, fiat B; erunt A & C ſimul & B, primi inter ſe: quod erat concludend[illegible]m. Igitur tota pr[illegible]poſitio demonſtrata eſt.

## PROPOSITIO XVI.

Si duo numeri, primi inter ſe fuerint: non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

SVppoſitio. Duo n[illegible]eri A & B, primi [illegible]nt inter ſe [illegible] Aſſero non eſſe vt A ad B, [illegible]ta B ad alium puta C.

A. B. C.

Demonſtratio. Dantur A & B primi inter ſe, ergo per prop.23.lib.7. erunt minimi omnium eandem rationem habentium, eoſque æquemetientur per prop.21.l[illegible].eiuſdem. [illegible]go ſi per impoſſibile ſit vt A ad B, ita [illegible] ad C, A metietur B, & c[illegible]m ſeipſum [illegible], vnus numerus A, metietur duos [illegible] numeros A & B pr[illegible]os. contra deſ. [illegible] libr.[illegible]. ergo non erit vt primus ad ſecundum, ita [illegible]cund[illegible] ad [illegible]m. quod intell[illegible]end[illegible] in n[illegible]meris [illegible]s, & non fra[illegible].

## PROPOSITIO XVII.

Si fu[illegible] quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem [illegible]pſorum, primi inter ſe ſint: No[illegible] erit vt primus ad ſecundum, ita [illegible]ltimus ad alium quempiam.

SVppoſitio. Sint iſti numeri A. B. C. D. continue pr[illegible]rtionales, ſed A & D ex-tr[illegible] illorum, ſi[illegible] primi inter ſe: Aſſero non poſſe eſſe vt A a[illegible] B, ita D ad al[illegible]m quempiam puta E.

A. B. C. D. E.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit vt A ad B, ſic D ad E, erit viciſſim per prop.[illegible]3.lib.7. vt A ad D, ſic B ad E dantur autem A & D primi inter ſe, ergo erunt m[illegible]nimi in ſua proportione, i[illegible]xta prop.[illegible].7. quare per propoſ. [illegible] libr. eiuſde[illegible], A menſurabit B Sed cùm ſit A [illegible]d B, vt B [illegible]d C, & A menſuret B, B etiam metietur C, per def.[illegible]o. lib.7. ergo cum A menſuret B, & B ipſum C, A menſurabit & C, per a[illegible].[illegible].libr,7. Denique quia eſt vt B ad C, ita C ad D, & B oſten[illegible]us eſt metiri C, etiam C metietur D; & per ax.cit.11.lib,7. A metiens C, metietur & D. Quare A metiens ſeipſum iuxta ax.6. lib.7. & metiens D, ca[illegible]ſa erit quod A & D extremi datorum numerorum deinceps proportionalium, ſint compoſiti iuxta def.14. libr.7. hoc autem eſt contra hypotheſim: ergo non erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium numerum. quod erat demonſtrand[illegible]. E[illegible] quidem in numeris integris tantum.

## PROPOSITIO XVIII.

Duobus datis numeris, conſiderare, an poſsit ipſis tertius proportionalis inueniri.

SVppo[illegible]tio. A & B duo numeri ſint dati, vt v[illegible] an ipſis poſſit [illegible]ngi [illegible]tius nu[illegible]s [illegible]. Et quid[illegible] in nu-[illegible]

[illegible]e per [illegible]op.1.[illegible]br.7. an ſint pri[illegible] numer[illegible] inter ſe [illegible] dati ſunt: vel an [illegible]poſiti per [illegible]. e[illegible]dem l[illegible]b. prop.

A 4. B 6. C 9.

D 36.

Demonſtratio. Si fuerint primi inter ſe, non poter[illegible] reper[illegible] tertius numeru[illegible] proportionalis iu[illegible] propoſ.16. libri h[illegible]us. Quod ſi fuerint compoſiti multiplicans ſe[illegible] B faciat D, quadratum; Vel primus A metitur hunc numerum D· vel non metitur. Eſto metiatur per alium n[illegible]mer[illegible] C: Dico tunc C numerum eſſe tert[illegible]m proportionalem deinceps ad A & B: Nam ſi ducatur in ſeipſum numeru[illegible] ſecūdus B, producet D quadratum:

& ſi multiplicetur A per C, producetur idem D, iuxta 9.ax.libr.7. Quare cùm numerus factus ab extremis A & C, ſit æqualis facto ab medio B, ipſi tres numeri A.B.C. proportio-

A 6. B 4. C

D 16.

nales erunt, per 20.prop.lib.7. Eſto denique A non metiatur D: tunc aſſero non poſſe reperiri tertius proportionalis numerus ad A & B: Nam fieſſet aliquis, v.g.C, tunc per citat. prop.20. libr.7. numerus factus ex ductu extremorum A, C, æqualis eſſet facto quadrato ex B, videlicet D quadrato; & per 7.ax. lib.7. A numerus metiretur numerum D per ipſum C, contra hypotheſim: ergo in hoc caſu non reperietur tertius numerus proportionalis ad A & B. Sed hoc intellige in integris numeris, non autem fractis.

## PROPOSITIO XIX.

### Tribus numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis quartus proportionalis reperiri.

SVppoſitio. Tres numeri A.B.C. dati ſint, ſiue continuè proportionales, ſiue non; & oporteat determinare an poſſit quartus numerus proportionalis reperiri.

A 4. B 8. C 9. E 18.

D 72.

Apparatus. Ducatur ſecundus B in tertium C, genereturque D, & diuidatur D per A primum, ſitque quotus numerus E integer: Dico E numerum eſſe quartum quæſitum. Quod ſi quotus numerus E non ſit integer numerus, ſignum eſt A numerum non metiri factum D; & ſic aſſero non poſſe reperiri numerum quartum proportionalem ad datos tres A, B, C, in numeris integris.

A 4. B 6. C 9. E.

D 54.

Demonſtratio. Quandoquidem ex dictis in definitione diuiſionis, ſi diuidatur numerus per numerum, quotus numerus menſurat diuiſum per diuiſorem, vel contra: & ſi quotus fuerit integer & fractus, non metitur diuiſor diuiſum. Et per 9.ax.lib.7. A multiplicans E, efficit D numerum menſuratum ab A per E; & ex cõſtructione idem numerus D factus eſt ex multiplicatione B in C; ergo per prop.19. lib.7. quatuor numeri A.B.C.E. ſunt proportionales. Iam verò in ſecundo caſu ſit ſi fieri poſſit E quartus proportionalis ad datos A. B. C. quando A non metitur D factum ex B in C; erit per cit.prop.19.lib.7. factus D numerus ex B in C, æqualis facto ex A in E, primo & quarto; quare per 7.ax.libr.7. A metietur ipſum D per E numerum; contra hypotheſim; quartus igitur numerus proportionalis non reperietur in hoc caſu.

## PROPOSITIO XX.

### Primi numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum.

SVppoſitio. Sint exempli gratiâ, tres numeri primi dati A. B.C. Dico adhuc eſſe plures numeros primos.

Apparatus. Per propoſ.38.libr.7. Sumatur numerus DE minimus, quem illi metiantur numeri dati primi; eique addatur F vnitas, ita vt totus ſit DEF.

A. B. C.

DE F.

Demonſtratio. Vel totus DEF eſt primus numerus diuerſus ab vno è datis, vel non eſt primus: Si primum, vera erat propoſitio, nam hic DEF augebit multitudinem datorum primorũ numerorum. Eſto verò non primus DEF, quem iuxta propoſ.33.lib.7. metiatur aliquis numerus primus G: hunc numerum G aſſero eſſe primum numerum, diuerſumque ab datis A. B. C. primis. Quod ſit G numerus, primus, iam conſtat ex propoſ.33.cit. in hoc caſu. Quod verò ſit diuerſus ab datis, probatur: ſit aliquis illorum ſi fieri poſſit G dictus numerus primus, ergo cùm quilibet illorum A.B.C. metiatur numerum DE, etiam G qui vnus illorum aſſeritur, eundem DE numerum menſurabit: ergo per 11.ax. lib.7. quia G metitur totum numerum DEF, & ablatum DE, menſurabit, reliquum F, hoc eſt vnitatem: ideoque numerus vnitatem metietur, totum partem, contra 8.ax.libr.1. Hoc abſurdum conſequens ad poſitionem quod G numerus primus ſit aliquis è datis A.B.C. indicat eam eſſe falſam. Cùm ergo G numerus ſit primus ac diuerſus ab datis, augebit multitudinem datorum numerorum primorum: & ſic de omni alia quacumque propoſita multitudine primorum numerorum, idem concludetur, vt vult propoſitio.

COROL-

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Propoſita quacumque multitudine primorum numerorum, reperiemus alium primũ ab eis diuerſum; ſi per 38.lib.7. reperiatur minimus numeratus ab propoſitis primis inter ſe, & ei vnitas addatur: compoſitus enim numerus erit etiam primus numerus diuerſus ab datis.*

HOc enim demonſtratum eſt in diſcurſu probationis huius propoſitionis.

## PROPOSITIO XXI.

Si pares numeri quotcũque componantur; totus par erit.

SVppoſitio. Sint exempli gratia numeri A.B.C. ſinguli pares: Dico totum numerum ABC, compoſitum ex illis eſſe parem.

A. B. C.

D. E. F.

Apparatus. Per def.6.libr.7. pares numeri dati, habebunt partes ſuas dimidias, quæ ſint D. E. F. D quidem ipſius A; E, ipſius B; F, ipſius C.

Demonſtratio. Quia iſtæ partes D. E. F. ſunt ſingulæ ſuorum totorum propriorum A.B.C. eędem, videlicet dimidiæ, erit A ad D, vt B ad E, & C ad F. per def.20. libr.7. in ratione dupli: Ergo per propoſ.12.lib.7. erit ABC, ad DEF, vt A ad D; iſta eſt proportio dupli, ergo etiam alia: igitur ABC, duplus erit DEF; quare DEF erit ſemiſſis ipſius ABC compoſiti: ergo per def.6.cit. libr.7. par erit numerus compoſitus ex paribus.

## PROPOSITIO XXII.

Si impares numeri quotcumque cõponantur, multitudo autem ipſorum ſit par: Totus par erit.

SVppoſitio. Sit multitudo par imparium datorum numerorum ABCD: Dico compoſitum ex illis numerum eſſe parem.

A. B. C. D.

Demonſtratio. Dati numeri differunt ſinguli ab pari, per vnitatem; iuxta def.7. lib.7. ergo hac detracta vnitate, relinquentur ſinguli dati numeri pares; & multitudo vnitatum efficiet numerum parem ex datis: omnes ergo illi numeri pares facti, & par vnitatum numerus, compoſiti in vnum, efficient per prop.21.præcedentẽ, totum numerum parem.

## PROPOSITIO XXIII.

Si impares numeri quotcumque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar; & totus impar erit.

SVppoſitio. Impariũ numerorum A.B.C. ſit multitudo impar: Dico totum compoſitum ABC ex illis, eſſe imparem.

A. B. C.

Demonſtratio. Si ab illis ſingulis detrahatur vnitas, relinquentur ſinguli pares iuxta def.7.libr.7.& multitudo detractarum vnitatum efficiet ſummam imparem, quia dantur illi multitudine impari, à qua etiam ſi detrahatur vnitas, relinquetur par numerus. Ergo per propoſ.21. libr. huius multitudo illorum omnium numerorum datorum vnitate mulctatorum, & numeri ablatarum vnitatum etiam diminuti vnitate, efficiet ſummam totalem parem: cui ſi addatur vnitas, fiet ex def. cit.7.lib.7. numerus impar: ſed hæc ſumma eſt totalis datorum numerorum imparium, multitudine impari; ergo relinquitur propoſitio explicata.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Impar compoſitus cum pari aut pluribus paribus, efficiet ſummam imparem.*

NAm impar minutus vnitate fiet par, quare ſic minutus additus ad parem vel pares, efficient parem per prop.21.libr. huius: quod ſi huic ſummæ totali addatur vnitas primò ablata, fiet ſumma totalis impar iuxta definitiones 6.& 7.lib.7.

## PROPOSITIO XXIV.

Si à pari numero, par detrahatur: Et reliquus par erit.

SVppoſitio. ab A pari numero detractus ſit B par numerus: Dico reliquum C numerum, eſſe parem.

A

B.

C.

Demonſtratio. Si C non ſit par, ab eo detracta vnitate relinquetur par iuxta def. 6. & 7.lib.7. Ergo per propoſ.21.lib.huius, B par detractus & C minutus vnitate, compoſiti in vnum conſtituent parem: cui ſi addatur vnitas fiet impar: videlicet A numerus datus par, (nam ablatus & reſiduus, reficiunt numerum è quo fuit facta detractio.) hoc abſurdum indicat negationem aſſertionem eſſe falſam, & aſſertionem veram.

## PROPOSITIO XXV.

Si à pari numero, impar detrahatur: Et reliquis impar erit.

SVppoſitio. Ex A pari numero ablatus ſit B impar: Dico reliquum C, eſſe etiam imparem.

A.

B.

C.

Demonſtratio. Si C reliquus non ſit Impar, ſit par; & ex B impari ablato, concipiatur ablata vnitas: tunc C compoſitus cum B pari facto per detractionem vnitatis, facict parem iuxta prop 21. lib. huius cui ſi addatur detracta vnitas, orietur A numerus impar, iuxta def. 7. libr. 7. qui datus eſt par. ergo negatio aſſertionis falſa erit, & ipſa aſſertio vera.

## PROPOSITIO XXVI.

Si ab impari numero, impar detrahatur: Reliquus par erit.

SVppoſitio. Ex A impari numero auferatur B impar: Dico C reliquum eſſe parem.

A.

B.

C.

Demonſtratio. Sit C impar, per impoſſibile: Tunc per 22. libri huius componendo B & C, totus A compoſitus ex detracto B & reſiduo C, par erit: contra hypotheſim. ergo negatio aſſertionis falſa erit, & aſſertio ipſa vera.

## PROPOSITIO XXVII.

Si ab impari numero, par detrahatur: Reliquus impar erit.

SVppoſitio. Ex impari A numero, auferatur B par: Dico reliquum C eſſe imparem.

A.

B.

C.

Demonſtratio. Eſto C ſi fieri poſſit par: tunc C & B pares compoſiti, efficient totum A parem, per 21. libri huius prop. at A componitur ex B ablato & C reſiduo: ergo datus impar numerus, fiet par, contra hypotheſim. Falſa ergo erit negatio aſſertionis & vera propoſitio.

## PROPOSITIO XXVIII.

Si impar numerus, parem multiplicans, fecerit aliquem: factus par erit.

SVppoſitio. A numerus impar, parem B multiplicando, produxerit C: Dico C eſſe parem.

A.

B.

C.

Demonſtratio. Per def. 15. lib. 7 C productus, erit compoſitus ex multis paribus B, iuxta vnitates numeri A; ergo per prop. 21. lib. huius, C erit par numerus.

### COROLLARIVM.

*Par numerus parem multiplicans, vel ſe ipſum: procreat parem.*

## PROPOSITIO XXIX.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans, fecerit aliquem: factus impar erit.

SVppoſitio. A numerus impar multiplicans B imparem, producat C: Dico C productum eſſe imparem.

A.

A.

B.

C.

Demonſtratio. Nam toties componitur B impar, quot ſunt vnitates in impari numero in A numero dato, per def.15.libr.7. ergo C compoſitus numerus erit impar, per prop.23. libr. huius.

COROLLARIVM.

*Numerus impar ſeipſum multiplicans, producit imparem.*

COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Numerus impar, parem numerum metiens, eum metitur per parem.*

Nam per 9.ax. lib. 1. ex impari metiente, & eo numero per quem metitur datum parem, producetur ipſe menſuratus par. Iam verò ſi parem datum metiatur datus impar per imparem, fiet ex ductu imparium iſtorum impar numerus per iſtam propoſ.29. qui oſtenſus eſt & datur par. ergo numerus per quem impar metitur parem non erit impar ſed par.

COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Impar imparem metiens, eum metitur per imparem.*

Si metiretur per parem, per prop.28.libr. huius, menſuratus fieret par, contra datum. ergo impar imparem metiens, eum metietur per imparem, non autem per parem.

COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Propoſitio vndecima libri ſecundi, non poteſt explicari numeris.*

Si fieri poſſit numerus AB ſectus ſit in C, in duos numeros AC, CB, ita vt productus ex AB in CB, ſit æqualis quadrato numeri AC. Iam vel duo numeri AC, CB, ſunt ſinguli impares; vel pares; vel maior AC impar, & minor CB par; vel maior AC par, & minor CB impar: non ſunt alij caſus quàm quatuor enumerati.

Eſto primus. ergo per 22.prop.libr.huius, totus AB numerus erit par, cõponendo partes eius AC, CB in vnum AB: quare per 28. huius libri, ſi ducatur AB in CB, generabitur par; & qui fiet ex AC in ſeipſum, erit impar, per coroll.prop. huius 29.ſed ex prop.11.lib. 2. qui fit ex AB in CB, æqualis eſt ei qui fit ex AC in ſeipſum; & ille oſtenſus eſt par, hic verò impar, numerus ergo par æqualis erit impari, quod eſt abſurdum: poſitio ergo iſta prima falſa eſt.

Eſto ſecundus caſus. Tunc per coroll. noſtrum ad prop.35.libr.7.repertis duobus minimis numeris D, E, in proportione AC ad CB, erunt per 24.libr.7. D,E, inter ſe primi, ideoque pares ambo non erunt, ſed vel vterque impar, vel vnus par & alter impar. Iam verò quia eſt vt AC ad CB, ita D ad E, erit per coroll.prop.4.lib.5. conuertendo, vt CB ad AC, ita E ad D; & per coroll.prop.18.lib. 5. componendo vt AB ad AC, ita totus DE ad D: Eſt verò vt AB ad AC, ita AC ad CB, per prop.20.lib 7.quia datur numerus ex AB in CB æqualis quadrato medij AC; ergo etiam per prop.11.lib.5. vt totus DE ad D, ita D ad E: & propterea numerus ex DE in E, factus, æqualis erit quadrato ipſius D, per cit. prop.20.libr.7. Igitur totus numerus DE, ſectus eſt in duos D,E, quorum vel vterque eſt impar, quod fieri non poſſe oſtendimus in primo caſu: vel vnus impar & alter par, quod repugnat demonſtratis in tertio, & quarto caſu: ergo poſitio huius caſus erit abſurda, & intentum erit probatum.

Eſto tertius caſus, hoc eſt AC impar maior, & CB minor par. Tùm per corollar. noſtrum ad prop.23. huius libri, totus numerus AB erit impar: ſed per propoſ.28. factus numerus ex AB impari, in parem CB, par eſt, & numerus ex impare AC in ſeipſum, procreatus eſt impar, per coroll. huius propoſ.29. erit numerus par impari æqualis, quod fieri nequit.

Eſto quartus caſus, videlicet AC par, & CB impar. Tunc ſimili modo, vt in præcedente caſu, totus numerus AB erit impar per coroll. noſtrum ad prop.23. libri huius. Et quia numerus ex AB impare in imparem CB factus, eſt impar per hanc prop. 29. & numerus ex AC pare factus in ſeipſum ducto, eſt par, per coroll. propoſ.28. erit numerus impar æqualis pari, quod fieri nequit.

## PROPOSITIO XXX.

### Si impar numerus parem numerum metiatur, & illius dimidium metietur.

SVppoſitio. Numerus A impar menſuret B parem numero: Aſſero A, etiam metiri dimidium ipſius B.

Apparatus. Per def. 7. lib. 7. B par numerus datus, habebit partem dimidiam C. Præterea Impar A numerus datus, Parem B metietur, vel per imparem numerum, vel per imparem: Si per imparem, nihilominus per axioma 9. libr. 7. A impar numerus, multiplicans hunc imparem, procreabit A; & per prop. 29. libri huius, generabit imparem: quæ duo ſibi con-

A 5. B 30. C 15.

D 6. E 3.

tradicunt; ergò A impar numerus, non metietur parem B, per numerum imparem, ſed per parem qui ſit D, huius ergo paris numeri ſumi poterit pars dimidia quæ vocetur E. Denique certum eſt per prop. 16. libr. 7. Eundem numerum fieri B ex multiplicatione A in D, quam ex D in A, pari D in imparem A; quare per 7. ax. lib. 7. D metietur B per A; hoc eſt par numerus D oſtenſus, metietur B parem numerum datum, per numerum A imparem datum, his poſitis ſequitur.

Demonſtratio. Quia C eſt dimidium numeri B; & E eſt dimidium numeri D; erit per prop. 15. lib. 5. vt D ad B, ita E ad C; ergo per def. 20. lib. 7. cùm D oſtenſus ſit metiri B, per numerum A; etiam E toties metietur C, per eundem numerum A: ergo per cit. ax. 7. libr. 7. A impar metiens B parem numerum, metietur etiam C dimidium paris B numeri dati.

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Numerus impar metiens parem, per numerum parem eum metietur.*

### COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Impar imparem metiens, eum metitur per imparem.*

PRimum oſtenſum eſt in apparatu. Alterum ſic oſtenditur, eſto impar imparem metiatur per parem: tunc per ax. 9. lib. 7. fiet impar menſuratus: qui per prop. 28. lib. huius, debet eſſe par. hæc contradictio indicat poſitionem aduerſarij eſſe falſam, & coroll. hoc 2. verum.

## PROPOSITIO XXXI.

### Si impar numerus, ad aliquem numerum primus ſit; & ad illius duplum, primus erit.

SVppoſitio. Numerus A impar ſit primus ad numerum B: Aſſero etiam eſſe primum ad C duplum ipſius B.

A. B. C.

D. E.

Apparatus, C numerus duplus dati B, erit par, per defin. 6. lib. 7. quia habet dimidium, videlicet C.

Demonſtratio. Si A & C non ſint primi inter ſe, erunt compoſiti, quare eos aliquis numerus metietur puta D, qui neceſſariò erit impar: nam ſi par eſſet, quandoquidem metitur imparem A, per aliquem alium numerum E; fieret ex ductu D in E, ipſum A producet iuxta ax. 9. libr. 7. Ergo ſi D ſit par, & multiplicet E parem vel imparem, producetur A quidem, ſed per prop. 28. vel eius corollarium noſtrum, par, contra hypotheſim: D igitur numerus non erit par ſed impar. Cùm ergo D impar parem C metiatur, metietur etiam B eius dimidium iuxta propoſ. præcedentem 30: menſurat verò idem D numerus numerum A, ergo D numerus metietur A & B numeros primos inter ſe datos. quod eſt abſurdum: ergo & poſitio vnde procedit, falſa erit, videlicet A, & C duplum B, non eſſe primos, ſed compoſitos; erunt igitur primi inter ſe. quomodo fuit propoſitum.

COROL-

## COROLLARIVM.

*Impar numerus ad aliquem numerum primus, erit etiam primus ad huius numeri quadruplum, octuplum, ſedecuplum, & ſic deinceps in continua proportione dupli.*

NAm per hanc propoſitionem primus erit ad eius duplum, ſed quadruplus eſt duplus dupli ad quem primus eſt, ergo etiam primus erit ad quadruplum: & ſic de reliquis inferendum.

## PROPOSITIO XXXII.

### Numerorum à binariò duplorum vnuſquiſque pariter par eſt tantum.

SVppoſitio. Sint quotcumque numeri ab binario A in proportione dupli B. C.D. E.F.G.H. &c. Dico vnumquę iſtorum B,C, D, E, F,G,H, &c. eſſe pariter parem, & nullum eſſe alium numerum diuerſum ab his, pariter parem, ita vt ſint prædicti numeri, pariter pares tantum.

Apparatus. Ponatur primo loco Vnitas; Iam cùm poſt vnitatem ſequatur immediatè binarius A ex datis; & præterea numeri omnes in proportione dupli: erunt ab vnitate numeri continuè proportionales in ratione dupli.

Demonſtratio. Ex apparatu ſequitur quod numerus A binarius, & quilibet alius minor maiorem ſequentem menſuret per aliquem ipſorum datorum numerorum, iuxta prop. 11.lib.huius: ſed omnes dati numeri ſunt pares ex def.6.lib.7. quia ſinguli dimidium obtinent, ex datis: ergo cùm quilibet minor eorum, per aliquem eorundem minorem metiatur; erunt ſinguli eorum pariter pares, per def.8. libr.7. Denique cùm per prop.13.libri huius, nullus alius numerus metiri poſſit datos, præter ipſos datos, & per propoſ.11.cit. libri eiuſdem minores metiantur maiores per aliquos ipſorum, & ſint ſinguli pares; erunt ipſi dati numeri, pariter pares tantum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si ſeries numerorum à binario duplorum omnium proponatur; omnes numeri qui ſint pariter pares tantum, inuenti erunt.*

## PROPOSITIO XXXIII.

### Si numerus dimidium habeat imparem: pariter impar eſt tantum.

SVppoſitio. Numerus A, diuidatur in duos dimidios impares, quorum vnus ſit B: Dico numerum A eſſe ſolummodo pariter imparem.

A.

B. C.

D. E.

Demonſtratio. Numerum A datum, metietur binarius C, qui eſt par numerus, per B imparem numerum ſeu ſemiſſem illius; ergo ex def.9.lib.7.numerus A erit pariter impar. Quod verò ſit ſolummodò pariter impar probatur: Eſto ſi fieri poſſit pariter par, eumque metiatur D numerus per E parem numerum iuxta def.8.lib.7. ſed par ax.9.lib. eiuſdem, fiet numerus A, ex multiplicatione D in E, qui fit etiam ex ductu B ſui dimidij, in C binarium: ſi ergo conſtituamus primum D numerum, B ſecundum, C tertium, E quartum, habebimus quatuor numeros, ex quorum primo D, & vltimo E, fit idem numerus A, qui fit ex B ſecundo & C tertio; igitur ipſi quatuor numeri D, B, C, E, erunt proportionales per prop. 19. lib. 7. nimirum D ad B, vt C ad E; ergo per propoſ.13.libr. eiuſdem erit viciſſim D ad C, vt B ad E; & per coroll. prop.4. libr.5. inuertendo erit C ad D, vt E ad B: Sed C binarius metitur parem numerum D, ergo per def.20.lib.7.E numerus par metietur B numerum imparem, quod abſurdum eſt, ergo poſitio negans A numerum datum eſſe pariter imparem tantùm, falſa erit, ergo affirmatio propoſitionis confirmata in veritate erit.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si omnium numerorum imparium dupli ſumantur: inuenti erunt omnes numeri qui ſint pariter impares tantum.*

## PROPOSITIO XXXIV.

**Si par numerus neque à binario duplus ſit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par eſt, & pariter impar.**

SVppoſitio. A numerus par, minimè ſit à binario duplus, minimeque habeat dimidium imparem: Aſſero A numerum eſſe pariter parem, & pariter imparem, diuerſis reſpectibus.

Demonſtratio, quod ſit pariter par. Cum dimidium parem habere detur, metietur eum binarius per hunc parem numerum, ergo per 8 def. lib. 7. erit pariter par. Quod verò ſit pariter impar ſic oſtenditur. Secto A numero bifariàm, & eius dimidio iterum bifariàm, & ſic deinceps, tandem incurremus in aliquem numerum parem, vel imparem, qui amplius bifariàm in duos numeros æquales ſecari non poſſit: ſi talis numerus eſſet par, erit binarius qui amplius in duos diuidi nequit numeros, ſed ſolum in duas vnitates; & ſic contra datum, A numerus eſſet à binario duplus: ergo incidemus in imparem numerum, qui metietur ipſum A numerum per numerum parem, nam ſi metiretur ipſum A per numerum imparem, certum eſt quod multiplicando hunc imparem per illum imparem metientem, produceretur A numerus par datus, iuxta axioma 9. libr. 7. ſed per prop. 29. libr. huius, quia impar imparem multiplicat, producetur A numerus impar, contra datum; igitur impar ille numerus non metietur numerum A per numerum imparem, ſed per parem; quare numerus datus A, etiam erit pariter impar iuxta definit. 9. libr. 7. quæ omnia erant demonſtranda.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si prætermittantur numeri qui à binario ſunt dupli, & illi qui dimidios habent impares: reliqui omnes erunt pares, & pariter pares, & pariter impares.*

## PROPOSITIO XXXV.

**Si ſint quotcumque numeri deinceps proportionales; detrahantur autem à ſecundo & vltimo æquales ipſi primo: Erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.**

SVppoſitio. Numeri dati ſint A. BGC, D. EKIHF, continuè proportionales; & ex BGC detractus ſit CG æqualis primo A, ita vt ſit exceſſus ſeu differentia reſidua BG; tùm etiam ex vltimo EKIHF, ablatus ſit FH æqualis primo A, ita exceſſus ſeu differentia remaneat EH: Dico ita eſſe, vt BG exceſſus ſecundi ad primum, ita vltimi exceſſum EH ad omnes ipſum antecedentes ſimul A, BGC, D.

A 3. BGC. 9. D 27. EKIHF 81

FH. IF. FK. EF

GC. IH.

EK. KF. KI. IF. IH. HF.

Apparatus. Auferatur ex vltimo EKIHF, numerus FI æqualis ipſi BGC; tùm numerus FK, æqualis ipſi D; & ſic de aliis conſequenter, ſi plures intermedij eſſent numeri dati continuè proportionales; nam auferendi ſunt omnes antecedentes ab vltimo ſeorſim; tandem remanebit numerus aliquis, puta IH æqualis reliquo BG ſecundi BGC: Cùm enim FI ſit æqualis ipſi BGC, & ablatus FH ſit æqualis ablato GC, erit reliquus IH æqualis, reliquo BG, per ax. 3. lib. 1.

Demonſtratio. Quia FI per apparatum eſt æqualis ipſi BGC; & ablatus FH ablato CG, æqualis eſt iuxta ſuppoſitionem; erit & reliquus IH, reliquo BG æqualis, per 3. ax. libr. 1. Quoniam etiam eſt ex datis vt A ad BGC, ita BGC ad D, & D ad EF; erit inuertendo per coroll. prop. 4. lib. 5. vt EF ad D, ita D ad BGC, & BGC ad A: ſed eſt ex apparatu FK ipſi D æqualis, & IF ipſi BGC, & FH ipſi A ſeu CG æqualibus: ergo erit per coroll. noſtrum prop. 7. libr. 5. vt EF ad KF, ita KF ad IF, & IF ad HF igitur per prop. 17. libr. 5. erit diuidendo, vt EK ad KF, ita KI ad IF, & IH ad HF: Quare per prop. 12. lib. 7. erunt omnes

EK,

EK, KI, IH, ſimul, ad omnes KF, IF, HF; hoc eſt totus numerus FH qui fuit exceſſus prædictus, ad D, BG, A, ſimul, (quibus ſumpti fuerant æquales FK, FI, FH) vt IH, ad FH, hoc eſt vt BG ad A; fuerunt enim A & BG, facti æquales ipſis IH, HF. Igitur manifeſta eſt propoſitio.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Summa omnium numerorum propoſitorum deinceps proportionalium colligetur breuiſſimè ſi primus minor ab ſecundo dematur; tùm idem minor ab vltimo maiore auferatur: & fiat vt exceſſus ſecundi ſupra primum ad ipſum minorem primum, ita exceſſus vltimi maioris ſupra primum, ad alium numerum, cui inuento quarto numero ſi addatur vltimus ipſe numerus maior: ſumma totalis erit ſumma omnium propoſitorum numerorum.*

NAm per prop. præſentem, ita eſt exceſſus vltimi ad omnes antecedentes, vt exceſſus ſecundi ad primum: quare cùm inuentus ſit quartus numerus continens omnes numeros propoſitos excepto vltimo, ſi ei addatur ſumma vltimi, ſumma totalis erit ſumma omnium quæſita.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Si dati numeri continuè proportionales in proportione dupli, incipiant ab vnitate: Summa omnium breuius colligetur, ſi ab vltimo maximo vnitas detrahatur, & relictus numerus duplicetur; productos numeros addatur vnitas; ſumma totalis facta, erit ſumma omniũ propoſitorum numerorum.*
*Vel ſi vltimus numerus maximus è datis duplicetur, & à producto dematur vnitas; ſumma relicta erit omnium ſumma.*

NAm differentia primi & ſecundi minorum numerorum primorum cùm ſit vnitas, & primus ſit vnitas ex datis, exceſſus ſecundi ad primum, erit vt 1. ad 1. quare quartus numerus erit æqualis tertio, per propoſ. 14. libr. 5. qui tertius eſt ipſe vltimus numerus vnitate mulctatus: Et quia debet addi ipſe numerus vltimus quarto numero inuento ſeu ipſi tertio, ſed non mulctatus vnitate, iuxta ea quæ habet corollarium præcedens; & numeri ſunt dati in proportione dupli, duplicatus quicumque numerus eſt idem atque ſi ſibi addatur: ergo ſi duplicato numero vltimo vnitate minuto, addatur vnitas, fiet ſumma omnium. Vel ſi duplicato ipſi vltimo, ab producto tollatur vnitas, reliquus numerus erit ſumma omnium propoſitorum numerorum.

## PROPOSITIO XXXVI.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus, erit perfectus.

SVppoſitio. Dati ſint quotcumque numeri deinceps proportionales in proportione dupli; A. B. C. D. ita tamen vt E ſumma illorum ſit numerus primus, & etiam numerus iſte E ductus ſit in D vltimum numerum è datis, procreatuſque ſit F numerus: Dico factum hunc numerum F, eſſe perfectum.

Vnitas. A 2. B 4. C 8. D 16.

E 31. G 62. H 124. I 248. F 496.

K 31. M 31. L 31. N 465.

O. P.

Apparatus. Ab E numero dato primo, ſumantur tot numeri deinceps proportionales E. G. H. I. in proportione dupli quot ſunt dati initio ab vnitate excluſiuè, A.B.C.D. continuè proportionales etiam in proportione dupli.

Demonſtratio. Quia tàm A.B.C.D. quàm E.G.H.I. ſunt numeri deinceps proportionales in proportione dupli; erit per prop. 14. lib. 7. ex æqualitate, vt A ad D, ita E ad I: ergo etiam per prop. 19. libr. eiuſdem 7. numerus qui fiet ex A in I, erit æqualis facto numero ex D in E; ſed F numerus iuxta data factus eſt ex D in E, ergo etiam fiet ex A in I. Ergo numerus I metietur numerum F, per A binarium, iuxta 7. ax. libr. 7. Hinc neceſſariò F eſt duplus ipſius I, per axioma 9. libr. eiuſdem. Habebimus ergo hos numeros continuè proportionales in ratione dupli E.G.H.I.F. Iam verò ex G ſecundo, & vltimo F, detrahantur K, L, ſinguli æquales ipſi E, ſintque exceſſus relicti eodem ordine M, N: erit iuxta præcedentem propoſitionem 35. vt M ad E, ſic N

ad

ad omnes antecedentes ſimul E.G.H.I ; Sed M eſt æqualis ipſi E, quia E vel K, dimidio ipſius G, ſublato ab G, relinquetur M dimidium ipſius G, ideoque M & E æquales erunt numeri per axio. 7. libr.1; ergo etiam N erit æqualis ipſis E.G.H.I. ſimul, ex natura proportionalium numerorum in ratione proportionis æqualitatis. At vnitas & A.B.C.D. ſimul, ſunt æquales numero E ex datis; ideoque etiam numero K æquali poſito ipſi E, vel etiam L poſito æquali ipſi E: ergo per 2. ax. libr.1. totus L N, æqualis erit his, vnitati & A.B.C.D.E.G.H.I. ſimul ſumptis, ſed totus L N, eſt æqualis ipſi F, ( nam ex F ademeramus L æqualem ipſi E, & relictus fuerat N, vnde coniuncti L & N, reficiunt ipſum F) ergo per 1.ax.libr.1.F numerus æqualis erit his ſimul, vnitati, & A.B.C.D.E.G.H.I. Nunc autem, quia factus eſt F, ex E in D, metietur D ipſum F per E, & E metietur F per D, iuxta 7.ax.lib.7. Et quia etiam per prop.11. lib. huius 9. quilibet ex illis numeris poſtremis maiorem ex illis metitur per aliquem præcedentium minorum datorum; vnitas & A. B. C.D.E.G.H.I. metientur iuxta 11.ax.libr. 7. eundem numerum F prædictum, quare prædicti numeri erunt partes numeri F, iuxta def.3. libr.7. hoc eſt ſinguli erunt pars illius. Et quia nullus alius numerus ab illis poteſt eſſe pars totalis numeri F, ideò per def.22. libr.7. prædictus numerus F, erit perfectus. Sed age oſtendamus aſſumptum. Eſto ſi fieri poſſit alius numerus O pars ipſius F, ipſe O metietur ipſum F, per numerum alium qui ſit P, iuxta def.3. cit. & ex O in P, procreabitur F, per 9.ax.lib.7. qui factus fuerat ex E in D: ſi ergo diſponantur hoc ordine illi numeri E. P. O. D. quia qui numerus fit ex primo E in quartum D, idem eſt atque ille qui fit ex P ſecundo in O tertium; erunt illi quatuor numeri E.P.O.D. proportionales per prop.19. libr.7. hoc eſt E ad P, vt O ad D: Sed & iſti numeri A. B. C. D. ab vnitate ſunt deinceps proportionales dati, & A binarius eſt per def. 11.lib.7. numerus primus, nullus præter illos menſurabit D numerum, prop.13. lib.huius 9. igitur O numerus non menſurabit D numerum: neque etiam E menſurabit P numerum iuxta def.20.lib.7. quia oſtendimus eſſe E ad P vt O ad D. Sed & E ex datis eſt primus numerus, ergo per prop.31.lib.7.E & P erunt, numeri inter ſe primi, ac propterea minimi in ſua proportione iuxta propoſ. 23. libr.7. & æquemetientur ſuos maiores O, & D, per propoſ.21.lib. eiuſdem cit. ſed per cit. prop.13.libr.huius, nullus alius præter A.B. C. metitur ipsū D, ergo P numerus erit idem atque aliquis iſtorum A. B. C. Eſto ſit idem ac B, & ſumantur tot numeri deinceps proportionales in proportione dupli ab E incluſiuè, E.G.H, quot ſunt B.C.D: erit per propoſ.14.lib.7. ex æquo vt B ad D, ita E ad H. quare per 19.lib.7. idem numerus fiet tam ex B in H, quàm ex D in E: ſed oſtendimus numerum factum ex D in E, eſſe eundem qui fit ex P in O, ergo per 1.ax.libr.1. numerus factus ex P in O, erit idem illi qui fit ex B in H: quare per cit.19.prop.libr.7. erit vt P ad B ita H ad O; ponitur autem P idem atque B, igitur etiam H erit idem atque O, qui admiſſus erat ab ipſo aduerſario diuerſus ab ipſis A. B. C. D. E. G. H.I. contradictio hæc deſignat poſitionem aduerſarij eſſe falſam, videlicet, alium numerum ab prædictis eſſe partem numeri F. quare à primo ad vltimum ipſe numerus F erit perfectus.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si quotcunique numeri ab vnitate dupli in vnam ſummam coniunganter, donec compoſitus ex illis numerus ſit perfectus: erit numerus progenitus ex hoc in vltimum duplorum perfectus.*

*Et ſi ab illo compoſito incluſiuè vti primo, ſumantur tot alij numeri continuè proportionales in proportione dupla, quot ſunt aſſumpti initio ab vnitate excluſiuè: erunt hi accepti, & illi ab vnitate dupli, & ipſa vnitas, partes aliquotæ ſinguli, quas perfectus numerus inuentus, habere poteſt.*

HÆc omnia ſunt in propoſitionis huius demonſtratione declarata. Quare vnum ſolum exemplum proferam in medium. Sint iſti numeri ab vnitate deinceps proportionales duo, in proportione dupli 1.2.4. quorum ſumma 7, eſt numerus primus; ab quo ſi ſumantur incluſiuè iſti alij duo numeri proportionales in ratione dupli, 7.14. Tùm & multiplicatione ipſius 7 compoſiti in 4, numerum vltimum è datis primis, productus ſit numerus 28. hic erit perfectus numerus, cuius partes aliquotæ erunt prædicti omnes numeri & vnitas, 1.2.4.7.14. nulliqúe alij.

# COMMENTARIVS
## IN
# LIBRVM DECIMVM
## ELEMENTORVM
## GEOMETRICORVM
# EVCLIDIS
# DEFINITIONES.

I.

*Commenſurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem menſura metitur.*

SI quaſlibet magnitudines, vna communis mẽſura metiatur ęqualiter vel inęqualiter adæquatè vel inadæquatè; dimenſæ illæ magnitudines erunt inter ſe commenſurabiles. Vt ſi linea vnius palmi, centies lineam A aliquam menſuret, & decies aliam B, & quater cum ſemiſſe aliam C; tres lineæ A, B, C, erunt commenſurabiles; quia eas communis vna menſura linearis vnius palmi menſurat. Idem dicendum erit de multis ſuperficiebus ſi eas ſuperficies aliqua vt communis figura metiatur. Simili ratione erunt commenſurabilia corpora ſi illa corpus aliquod communis menſura metiatur.

I. I.

*Incommenſurabiles autem, quarum nullam communem menſuram contingit reperiri.*

SI multas lineas, nulla linea vt menſura communis poteſt metiri; illæ incommenſurabiles erunt lineæ. Simili modo ſi multas ſuperficies nulla poteſt ſuperficies menſurare vt menſura communis, illæ erunt inter ſe incommẽſurabiles. Simili ratione ſi multa corpora nullum corpus poteſt metiri vt menſura communis; illa erunt inter ſe incommenſurabilia.

I I I.

*Rectæ lineæ potentiâ commenſurabiles ſunt; cùm quadrata earum, idem ſpatium metitur.*

QVotieſcumque multarũ linearum quadrata, aliquod idem ſpatium ſeu aliqua ſuperficies, tanquam communis menſura æqualiter vel inæqualiter, adæquatè vel inadæquatè, menſurabit; illæ dicendæ erunt lineæ potentiâ commenſurabiles.

Aduerte nos conſultò in explicatione huius definitionis, minimè feciſſe mentionem rectæ lineæ, ſed lineæ in communi: nam multæ ſunt curuæ & circulares, quæ ſi reducantur ad rectam, earum quadrata commenſurabilia erunt; licet ipſæ lineæ non ſint rectæ ſed curuæ. Verùm tamen eſt quod earum quadrata commenſurabilia eſſe non poſſunt, niſi reducantur ad rectam; nam ex curua linea vt curua, quadratum definitum in primo libro, fieri nequit. quare iure optimo Euclides rectæ lineæ ſolùm meminit in hac definitione ſua; & nos aduerſionem hanc inſeruimus.

I V.

## I V.

*Incommenſurabiles autem, cùm quadratis earum, nullum ſpatium, quod ſit communis eorum menſura, contingit reperiri.*

CVm de rectis lineis loquatur in præcedente definitione, in hac etiam loquitur; nam particula autem refertur ad rectas ſuperioris definitionis potentiâ commenſurabiles; differentia verò eſt quod in hac definitione agit de lineis rectis longitudine incommenſurabilibus. Itaque ſi multarum linearum quadrata ſint incommenſurabilia, hoc eſt nullum ſpatium ſit quòd ſit eorum communis menſura; ipſæ rectæ ſint incommenſurabiles longitudine.

Ad perfectam notitiam harum quatuor definitionum, & ſequentium notandum eſt primò. Menſuram in communi eſſe debere eiuſdem rationis cum menſurato vel menſurando, iuxta definitionem 5. lib. 5. ſút enim comparabilia menſura & menſuratum ſeu menſurandum. Quapropter menſura linearum debet eſſe linea, non autem ſuperficies, vel corpus: & menſura ſuperficierum debet eſſe ſuperficies, non autem linea, vel corpus: & menſura corporum debet eſſe corpus, non autem linea, vel ſuperficies. quia quantumlibet multiplicetur linea, nunquam excedet ſuperficiem, vel corpus. Secundò notandum eſt menſuram quantitatum debere eſſe accomodatam menſurandis, & vniuerſaliorem; quare ad quadrata metienda, aſſumitur quadratum; quod cùm ſimile ſit menſurandis quadratis, aſſumitur pro illorum menſura communi: licet quodlibet aliud ſpatium planum illi æquale adhiberi poſſit, ſed non ita accomodatè: ex quo ſequitur vt ſpatium quod communis menſura eſſe debet, intelligendum ſit conuenientiùs, quadratum. Notandum tertiò: Quaſdam eſſe rectas lineas quæ ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles; alias verò longitudine incommenſurabiles: alias verò potentiâ ſolùm commenſurabiles. Conſtabitque ex corollario propoſ. 9. libri huius, rectas longitudine commenſurabiles, eſſe etiam & potentiâ commenſurabiles: rectas verò potentiâ commenſurabiles, non ſemper eſſe longitudine commenſurabiles; nam aliæ ſunt etiam longitudine commēſurabiles, aliæ incommenſurabiles longitudine. Prætereà oſtendet in eodem corollario rectas longitudine incommenſurabiles, non ſemper eſſe potentiâ incōmenſurabiles; aliæ enim ſunt longitudines incommenſurabiles, & non potentiâ; aliæ verò longitudine & potentiâ ſimul: alias autem eſſe potentia incommenſurabiles, eaſque ſemper eſſe etiam longitudine incommenſurabiles. Notandum vltimò rectam lineam quæ eſt æquale latus quadrati, vel ſupra quam poteſt fieri quadratum per propoſ. 46. lib. 1. vel cuius quadratum eſt æquale rectangulo alicui, vel alteri figuræ planæ, vocari ab Geometris ad exemplar Euclidis in hoc libro multis propoſitionibus, rectam lineam potentem, intelligendo quadratum aliquod, vel quadrato æquale figuræ datæ: vnde fit vt rectæ lineæ potentia ſit quadratum ex ea factum, ſeu quadratum ſuper illa deſcriptum.

## V.

*His poſitis, oſtenditur, cuicunq; recta propoſita, rectas lineas multitudine infinitas, & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles; alias quidem longitudine & potentia, alias potentia ſolum. Vocetur autem propoſita recta linea Rationalis.*

DEfinit hoc loco rectam lineam, quæ vocatur Rationalis; ita vt ſit poſitis definitionibus præcedentibus, recta quæpiam propoſita linea, (quam expoſitam vocant Geometræ inter demonſtrandum.) reſpectu cuius aliæ multæ lineæ rectæ ſint commenſurabiles, & incommenſurabiles aliæ, ita vt ex his reſpectu illius Rationalis quædam ſint longitudine & potentia, quædam verò potentia ſolùm, commenſurabiles; quædam autem ex his ſint etiam reſpectu huius Rationalis longitudine tantùm incommenſurabiles, quædam verò longitudine & potentia incōmenſurabiles. Aduerte nos ſemper nomen Rationalis hanc lineam indicans, maiuſcula R præpoſita inſcribere, ad æquiuocationalem euitandam alterius nominis rationalis ſeu rationi conformis.

## V I.

*Et huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum; Rationales.*

HOc eſt Rectæ omnes lineæ, Rationali alicui rectæ expoſitæ ſeu propoſitæ commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm; Rationales ſunt vocandæ.

## V I I.

*Huic verò incommenſurabiles, Irrationales vocentur.*

HÆc definitio ita intelligi debet, vt quemadmodum in antecedente ſexta definiuit

definiuit Rationales rectas lineas, quæ Rationali propoſitæ vel expoſitæ ſunt longitudine & potentia ſimul, vel potentiâ tantum commenſurabiles; ita etiam ſint Irrationales ad ipſam Rationalem expoſitam, quæ ſunt incommenſurabiles longitudine & potentiâ ſimul, vel ſolum potentia, non autem longitudine tantum.

Ex hac definitione & antecedente ſexta colligitur nonnullos Arithmeticorum decipi; dum vocant radicem quadratam numeri 20, vel 1000, id eſt lineam cuius quadrati valor eſt 20, vel 1000, Irrationalem, eo quod numeris non poſſit exprimi, & comparari, cum aliquo numero puta 4, ſeu linea quatuor palmorum, cuius quadratum erit ſexdecim palmorum, quæ linea quatuor palmorum ſit expoſita Rationalis: nam & ſi ſit longitudine incommēſurabilis cum linea quatuor palmorum; tamen & potentiâ commenſurabilis illi, ideoque per def. 6. etiam Rationalis eſt illa radix ſeu linea cuius quadratum eſt 20, vel 1000. non longitudine quidem & potentia ſimul, excluſimus enim commenſurabilitatem in longitudine, ſed potentiâ tantum; ideoque incommenſurabili illi Rationali prædictæ quatuor palmorum, longitudine tantum. Quod verò ſit commenſurabilis potentia, quis non aduertat, cùm quadratum 20 palmorum, vel 1000 palmorum, ratione capacitatis arealis, ſit commenſurabile quadrato 16 palmorum, iuxta def. 3.

## VIII.

*Et quadratum, quod à propoſita recta fit; dicatur Rationale.*

ID eſt quadratum rectæ propoſitæ Rationalis, dicendum eſt Rationale; denominante quadrato ipſo, expoſita recta linea Rationali.

## IX.

*Et huic commenſurabilia quidem, Rationalia;*

NImirum quadrata omnia Rationali prædicto commenſurabilia: vocentur etiam Rationalia.

## X.

*Huic verò incommenſurabilia, Irrationalia dicantur.*

VIdelicet quadrata omnia incommenſurabilia Rationali prædicto def. 8. appellentur Irrationalia.

Notandum eſt ſpatia quæcumque plana æqualia quadrato Rationalis rectæ lineæ, vel commenſurabilia etiam illi, dici ab Geometris, Rationalia, quia per prop. 14. libr. 2. ſi ſint rectangula reduci poſſunt ad quadrata: quod ſi non ſint rectangula, ad ea reduci poſſunt, vel ad quadrata; ab Geometris. Eodem modo Irrationalia, ſpatia plana incommenſurabilia quadrato Rationalis expoſitæ, licet non ſint quadrata, modò ad illa reduci poſſint, appellari poterunt.

## XI.

*Et rectæ, quæ ipſa poſſunt, Irrationales; ſi quidem ea quadrata ſint, ipſa latera; ſi vero alia quapiam rectilinea, rectæ quæ ſpatiis incommenſurabilibus æqualia quadrata deſcribunt.*

QVæ modo præmiſimus in notando, explicant vltimas partes huius definitionis vltimæ. Quare rectæ lineæ ſeu latera quadratorum, vel quorumlibet aliorum ſpatium planorum, quæ poſſunt quadrata illis æqualia, incommenſurabiliaque quadrato expoſitæ Rationalis; dici debent Irrationales.

Moneo Euclidem vetereſque omnes Geometras ſemper has particulas longitudine & potentia, vel potentiâ tantum, coniunxiſſe his vocibus commenſurabiles, & incommenſurabiles: vix autem hiſce aliis vocibus Rationales, & Irrationales. quod tamen nonnulli recentiorum Geometrarum non ſolent factitare.

## PETITIO VNICA.

Poſtuletur quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiuſdem generis excedat.

## AXIOMATA.

### I.

*Magnitudo, quotcumque magnitudines metiens, compoſitam quoque ex ipſis metitur.*

### I I.

*Magnitudo quamcumque magnitudinem metiens; metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.*

### I I I.

*Magnitudo metiens totam magnitudinem, & ablatam; metitur & reliquam.*

## PROPOSITIO I.

Duabus magnitudinibus inęqualibus propoſitis, ſi à maiore auferatur maius quàm dimidium: & ab eo quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo; quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

SVppoſitio. Duæ magnitudines inæquales, AB, maior, C, minor, datæ ſint; & ab maiore AB, ademptum ſit maius quàm dimidium; & ab reſiduo etiam maius quàm dimidium; & ſic deinceps: Aſſero tandem relinqui magnitudinem minorem data minore C.

A B. C.

C D.

Conſtructio. Concipiatur ipſi C minori magnitudine datæ addita portio D, æquans ipſam datæ magnitudini maiori AB.

Demonſtratio. Ab tota CD vti ab tota AB ex datis auferatur plus quàm dimidium, reliquum erit vel æquale ipſi C, vel minus, vel maius quàm C: ſi primum; ablato iterum plus dimidio ab reliquo, reliquum erit aliquid minus quàm C, ideoq; etiam ab æquali AB maiore facta ſimili detractione, reſiduum erit aliquid minus quàm C: ſi ſecundum, conſecuti ſumus finem noſtrum: Si tertium auferendo iterum pluſquam ſemiſſem ab reſiduo; & ſic deinceps, ita vt dùm fit detractio, fiat adimendo aliquid de data minore C; tãdem relinquetur aliquid minus quàm C, alioqui pars reliqua eſſet maior, tota data C contra axio. 8. libr. 1. Notandum vero eſt hanc propoſitionem intelligi debere de magnitudinibus propriè comparabilibus iuxta definitionem 5: lib. 5. non autem de aliis quæ impropriè comparari poſſunt. Ex his colligitur ſolutio paradoxi Cardani circa angulum contactus propoſitionis 16. lib. 3. & angulum rectilineum acutum; quod proponemus hoc loco per modũ corollarij noſtri: eo quod videatur planè cõtradicens huic propoſitioni.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Angulus rectilineus acutus poteſt in infinitum ſyncathegorematicè diminui; & angulus contactus in infinitum etiam augeri: & tamen illius decrementum quodcumque maius erit quocumque acremento huius.*

EXempli gratia, rectilineus acutus angulus EDF, poteſt minui in infinitum per intermedias rectas lineas ab concurſu D inclinatarum rectarum linearum ED, FD, ad inuicem: & angulus CAB contactus augeri per minores circulos contingentes eandem rectam BA in puncto A, centrum habentes in eadem diametro AG circuli maioris dati ACG. Et tamen quia per citatam prop. 16. libr. 3. elementorum, quicumque angulus rectilineus maior eſt angulo cõtactus quocumque, v.g. DAB, maiore quã datus alius CAB; minus decrementum illius anguli rectilinei, maius eſt maiore accremento anguli contactus. Ita paradoxum propoſitum eſt ab Cardano. Nunc illud proponemus prout contradicere putatur huic propoſitioni. Magnitudo EDF angularis rectilinea acuta maior eſt magnitudine anguli contactus CAB, per prop. cit. 16. lib. 3. & per prop. 9. lib. 1. poſſumus angulum datum EDF partiri per medium, rectamque lineam aliam ducere inter iſtam intermediam & dimidium huius anguli ab puncto D anguli dati, quæ maius quid dimidio dati anguli adimet: & ſic deinceps in infinitum; & tamen ex citata prop. 16. lib. 3. reſiduus angulus cùm acutus ſit & rectilineus, ſemper maior erit data magnitudine anguli contactus: ergo falſa erit hæc propoſitio prima libri huius, quandoquidem facta illa detractione continua, non relinquitur de maiore magnitudine data, nimirum angulo acuto rectilineo dato EDF, minor magnitudo angularis, data magnitudine anguli contactus CAB minore.

Solutio paradoxi. Quandoquidẽ iſtæ duæ magnitudines anguli rectilinei acuti, & anguli cõtactus dati, non poſſunt propriè comparari ad inuicem, iuxta def. 5. lib. 5. quia vti demonſtrauimus quãtumuis augeatur & augeatur in infinitũ, hoc eſt multiplicetur angulus ille cõtactus, non poteſt ſuperare angulum

rectilineum

rectilineum acutum, imò ne quidem illi æqualis fieri; & vti mõnuimus propoſitio iſta, intelligitur de magnitudinibus propriè comparabilibus: ideo hoc paradoxum non contradicit huic propoſitioni; nam contradictio eſt ſecũdum eaſdem formalitates non autem diuerſas. Quod ſi in dicta propoſitione 16. libr. 3. vocetur angulus ille contactus minor angulo quolibet rectilineo acuto, intelligenda illa comparatio inæqualitatis impropriè ſumpta, non autem iuxta def. cit. 5. libr. 5.

## PROPOSITIO II.

Si duabus inæqualibus propoſitis magnitudinibus, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

SVppoſitio. Ex maiore magnitudine CFD, ſi detrahatur quoties fieri poteſt minor AGB, hoc eſt magnitudo CF detrahatur æqualis ipſi AB, vel multæ huiuſmodi æquales ipſi AB, quoties fieri poteſt; & reliqua FD auferatur etiam quoties fieri poteſt, ex ipſa AGB minore data; & ſic deinceps alterna detractione idem fiat: ita vt reliqua nunquam metiatur præcedentem. Dico datas magnitudines CFD, AGB, inæquales eſſe incommenſurabiles inter ſe.

A G B.

C F D.

E.

Conſtructio. Si non ſint datæ magnitudines cum circumſtantia data, incommenſurabiles; erunt commenſurabiles communi aliqua menſura, puta E: quæ vel erit æqualis datæ minori AGB magnitudini, vel minor: nam maior eſſe nequit, quia menſura cõmunis eſt pars aliqua data quantitatum, & pars non poteſt eſſe maior toto per 8. axio. libr. 1. Iam verò poſita E æquali ipſi AGB, ſi detrahatur quoties fieri poteſt AGB ex CFD, minor è maiore, nihil relinquetur, quia ipſa E datur æqualis ipſi AGB, & E pars ſeu menſura ipſius CFD, tùm etiam menſura ipſius AGB. Poſita autem E minore quàm AGB; ſi detrahatur minor AGB, ex maiore CFD; quoties fieri poteſt, relinquetur aliquid de magnitudine maiore minus quàm ſit ablata minor AGB: (ſi enim eſſet æquale vel maius, non fuiſſet ablata minor quoties fieri poteſt:) Rurſus ſi demátur quoties fieri poteſt ex minore AGB magnitudine data, reſiduum illud relictũ de maiore prędicta, remanebit etiã aliquid illius minus quàm reſiduũ illud minus ablatum: & ſic deinceps alternando has ſubductiones, tandem relinquetur vel ex maiore magnitudine CFD; vel minore AGB, aliquid minus quàm ſubducta vltima magnitudo quoties fieri poteſt: Sed etiam in his detractionibus ſemper adimitur maius quàm dimidium; (ſi enim adimeretur dimidium tantummodo, vel minus quàm dimidium, de reſiduo poſſet tolli iterum minor quantitas iam ablata, contra ſuppoſitionem, ſupponitur enim tolli minor de maiore quoties fieri poteſt:) ergo per 1. prop. libri huius, in illis ſubductionibus tandem remanebit de maiore magnitudine, vel de minore datis, aliquid minus quam E menſura communis ab aduerſario inuecta. Denique in illis ſubductionibus, minor quantitas adempta quoties fieri poteſt de maiore, metietur ex natura partis, illam portionem ademptam: v.g. AGB minor ſublata de maiore CFD, quoties fieri poteſt, metietur ademptam CF de maiore CFD: & reliqua FD minor quàm AGD, ſublata, metietur ademptam AG de AGB. Ad hæc ſit ex prædicto diſcurſu relicta tandem GB portio de minore AGB; minor quàm E menſura communis ab aduerſario propoſita. His poſitis ſequitur.

Demõſtratio poſitionis quod E ſit æqualis minori datæ magnitudini AGB. Cùm detracta ſit E ſeu AGB, ex maiore CFD, & nihil relinquat per conſtructionem ipſam, non erit caſus huius propoſitionis ſupponentis reſiduum non metiri præcedentem, quare impertinens erit hæc poſitio deducta ab primaria aduerſarij. Sed age demonſtremus etiam propoſitionem, poſita alio membro quod E communis menſura inuecta ab aduerſario ſit minor quàm AGB magnitudo data minor. E metitur AB per aduerſarium, AB metitur CF per conſtructionem, ergo per 2. ax. libri huius, E metietur ipſam CF: Sed & per aduerſarium E metitur totam CFD, & oſtendimus E metiri ablatam CF, ergo per ax. 3. libr. huius, E metietur reliquam FD; Sed per conſtructionem ipſa FD menſurat AG, ergo per 2. ax. citatum, E metietur ipſam AG. Igitur cùm E metiatur totam AGB per aduerſarium, & oſtenderimus metiri ablatam AG, metietur etiam reliquam GB, iuxta 3. ax. cit.

Aa 2 maior

maior minorem, hoc eſt totum erit pars partis vel æquale parti, contra 8.axio.libr.1.hoc abſurdum indicat poſitionem aduerſarij primariam è qua procedit, eſſe falſam videlicet quantitates datas cum circumſtantia in poſitione aſſignata eſſe commenſurabiles: igitur erunt incommenſurabiles, quomodo fuit propoſitum.

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Si minor magnitudo detrahatur ex maiore, quoties fieri poteſt, vel nihil relinquetur de maiore, vel reſiduum erit minus quàm ipſa minor detracta.*

### COROLLARIVM NOSTRVM I I.

*Si minor magnitudo detrahatur de maiore, quoties fieri poteſt; detrahetur de maiore maius quàm dimidium.*

HÆc duo corollaria demonſtrata ſunt in conſtructione vel apparatu ad demonſtrationem huius propoſitionis.

### COROLLARIVM NOSTRVM I I I.

*Si duabus magnitudinibus incõmenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliqua præcedentem metietur.*

SInt exempli gratia duæ magnitudines AGB, CFD, incommenſurabiles, & minor AGB detracta quoties fieri poteſt de maiore CFD, relinquat FD; & FD detracta de minore AGB, relinquat GB; & iſta GB relicta metiatur, ſi fieri poſſit, præcedentem FD. Cùm GB metiatur FD, & FD menſurat AG, ipſa GB metietur AG per 2.ax. lib. huius; verum GB ſe ipſam metitur: ergo per 1.ax. ipſamet GB, metietur totam AGB: quia AGB menſurat CF, ipſa BG menſurabit ipſam CF per 2.axio. Cùm ergo GB oſtenſa ſit metiri FD, & FC, metietur totam compoſitam CFD per 1.ax. Et quia eadem GB oſtenſa eſt metiri ambas datas magnitudines AGB, CFD, ipſæ erunt per 1.def.libr. huius, commenſurabiles contra datum. Ergo vti propoſitum fuit, reliqua nunquam præcedentem metietur.

### COROLLARIVM NOSTRVM I V.

*Si duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, quoties fieri poteſt, alterna quadam detractione: metitur quadam reliqua præcedentem.*

SI enim quædam reliqua præcedentem non metiretur, eſſent datæ magnitudines per hanc prop.2. incommenſurabiles, contra datum. igitur metietnr quædam reliqua præcedentem.

### COROLLARIVM NOSTRVM V.

*Si duabus magnitudinibus propoſitis, detrahatur quoties fieri poteſt, minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua præcedentem metiatur: ipſa erunt commenſurabiles.*

HOc enim probatum eſt in diſcurſu demonſtrationis corollarij 3. ad iſtam propoſitionem.

## PROPOSITIO III.

Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

SVppoſitio. Datæ ſint duæ commenſurabiles magnitudines AFB, CED, & iſtarum oporteat maximam menſuram communem reperire.

A F B.

C E D.

G.

Conſtructio. Si detrahatur quoties fieri poteſt AFB de maiore CED, hoc eſt CE, ita vt relinquatur ED; & tollatur eodem modo ED de AFB, id eſt AF, & relinquatur FB: minor de maiore, alterna detractione, relinquetur tandem magnitudo aliqua puta FB, præcedentẽ metiens ED, per coroll. noſtrum 4. propoſ. præcedentis 2. Dico FB eſſe maximam menſuram datarum commẽſurabilium magni-

magnitudinū. Quod ſi AFB minor magnitudo metiatur maiorem CED, aſſero maximam menſuram datarum eſſe ipſam minorem AFB, cùm ſe ipſam metiatur.

A F B.

C E D.

G.

Demonſtratio primæ partis duplex membrum continebit. Primum quod FB ſit menſura communis. Alterum quod ſit maxima menſura illarum magnitudinum datarum. Primum ſic oſtenditur. FB metitur ED præcedentem, & ED metitur AF præcedentem, ergo per 2.ax. etiam ipſa FB menſurabit AF; ſe autem metitur FB;ergo per 1.ax. FB menſurabit totam AFB: Præterea quia FB metitur ipſam AFB, & AFB metitur CE, etiam per cit. 2.axio. ipſa FB menſurabit ipſam CE; ſed oſtendimus eãdem FB metiri ipſam ED, ergo per 1.ax.cit. ipſa etiam FB metietur totam CED. manifeſtum igitur eſt quod FB ſit menſura communis datarum magnitudinum AFB, CED. Quod verò ſit maxima earum menſura ſic probatur. Sit ſi fieri poſſit alia magnitudo G, maior quàm FB, maxima menſura communis earundem datarum magnitudinum: Tunc quoniam G metitur ambas AFG, CED, & ipſa AFG metitur aliam CE, ipſa G metietur iſtam CE per 2.ax.cit. & quia etiam ipſa G metitur totam CED, & ablatam CE, metietur per 3.ax.lib.huius, ipſa G reliquam ED; ſed hæc ED metitur aliam AF, ergo per 2.ax.cit.etiam ipſa G metietur ipſam AF: cùm ergo G metiatur totū AFB, & ablatam AF, metietur etiam ipſa G, reliquam FB, iuxta coroll.3.cit.maior G, minorem FB; quod eſt abſurdum; ergo poſitio ipſius G maioris quam FB, falſa erit, & affirmatio noſtra vera, quod FB ſit maxima menſura duarum datarum magnitudinum. Denique quod ſi AFB minor magnitudo maiorem datam CED metiatur, ipſa AFD ſit maxima menſura, ſic probatur ſimili diſcurſu iam facto. Eſto ſi fieri poſſit alia G maxima menſura communis, & maior quàm AFB: Ergo G maior inuecta magnitudo metietur minorem AFB, quod eſt abſurdum, ergo non erit alia maior menſura communis quam AFB. quod erat declarandum.

## COROLLARIVM.

*Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem.*

Oſtendimus enim FB eſſe maximā menſuram duarum datarum magnitudinum AFB, CED, & ſi G metiatur ipſas magnitudines datas AFB, CED, metiri etiam ipſam FB maximam earum menſuram communem.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Explorare an duæ, vel tres, vel plures magnitudines propoſita ſint commenſurabiles vel incommenſurabiles inter ſe.*

Si datæ ſint duæ, & alternatim minor de maiore detrahatur quoties fieri poteſt, & reliqua præcedentem metiatur, erunt per coroll. noſtrum 5.prop. præced. datæ magnitudines duæ erunt commenſurabiles: ſi verò reliqua præcedentem non metiatur, erunt incommenſurabiles per ipſam 2.prop.præced.

Quod ſi datæ magnitudines fuerint tres A. B. C. Primùm per præcedentem partem explicor an duæ illarum puta A. B. ſint commenſurabiles, vel incommenſurabiles: ſi incommenſurabiles, certum erit tres datas A. B. C. eſſe incõmenſurabiles inter ſe, cùm nulla poſſit menſura communis illis omnibus reperiri. Quod ſi fuerint inuentæ commenſurabiles illæ duæ A. B. reperiendo earum maximam menſuram E, per hanc propoſitionem 3. ſi hæc menſurat tertiam C; ipſæ erunt tres datæ magnitudines commenſurabiles inter ſe, iuxta def. 1. lib. huius: Quod ſi E non menſuret C, explorandum erit per 1. partem huius coroll. an E & C, ſint commenſurabiles, vel incommenſurabiles: ſi ſecundum erūt tres datæ A.B.C. incommenſurabiles; nam ſi eſſent commenſurabiles, metiretur maxima communis mēſura ipſam E magnitudinum A.B. per coroll. huius propoſ. igitur cùm eadem illa menſura menſuret C, non erunt illæ duæ C & E incommenſurabiles contra hypotheſim. Sed eſto ſint commenſurabiles E & C, erunt tres datæ A. B. C. commenſurabiles: nam per prop. præſentem 3. reperta D maxima communi mēſura iſtarum E.C. cùm D metiatur E magnitudinem, & E ipſas A & B, menſurabit etiam D, ipſas A & B, per ax. 2. li. huius: ſed & D metitur ipſam C; ergo E metietur tres magnitudines A. B. C. quæ propterea erunt commenſurabiles per 1. def.

Quod ſi datæ magnitudines fuerint plures quàm tres, explorandum erit per 2. partem huius corollarij de tribus, an ſint commenſurabiles vel incommenſurabiles; & de quarta inquirendum vti fecimus de tertia ex duabus: & ſic deinceps ſi ſint plures quàm quatuor.

## PROPOSITIO IV.

### Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire.

Svppoſitio. Oporteat reperire maximam menſuram communem tribus hiſce datis magnitudinibus A. B. C.

A. B. C.

D. E. F.

Conſtructio. Per prop. præced. 3. reperiatur maxima menſura D communis duabus A. B. è datis tribus; hæc ſi metiatur tertiam C è datis: Dico D eſſe maximam menſuram quæſitam communem tribus datis. Quod ſi D non metiatur C, erunt ſaltem ipſæ D & C inter ſe commenſurabiles; nam A.B.C. datæ ſunt commenſurabiles, vnde per coroll. præced. propoſ. 3. quælibet earum menſura communis ipſam D maximam menſuram duarum prædictarum A, B, ſed & illa eadem menſura cum menſuret C, erunt per defin. 1. lib. huius, commenſurabiles D & C: ergo per cit. prop. 3. præced. poterimus reperire E maximam menſuram ipſarum D & C. Tunc verò aſſero E maximam eſſe communem menſuram datarum trium magnitudinum A, B, C, in hoc caſu quod D non metiatur C.

Demonſtratio primi caſus, quando D maxima menſura inuenta duarum primarum, A, B, metitur tertiam C. Si enim ſit alia maior menſura quam D, datarum magnitudinum trium A, B, C, ipſa metietur per coroll. præced. propoſ. ipſam D menſuram communem maximam duarum A, B; maior minorem, quod abſurdum indicat inuectionem huius maioris menſuræ quàm D, eſſe falſam: erit ergo in hoc caſu D maxima quæſita menſura.

Demonſtratio ſecundi caſus. Imprimis E erit menſura cõmunis datarum A, B, C; nam E metitur D & C, per conſtructionem, & D menſurat A & B, per conſtructionem; ergo per 2. ax. etiam E metietur ipſas A, & B; ſed metitur etiam C, ergo E eſt menſura communis datarum trium A, B, C. Quod vero E ſit maxima menſura earundem, ſic oſtẽditur; ſit ſi fieri poſſit alia maior F. Cùm F metiatur A & B, metietur etiam per coroll. prop. præced. maximam earum menſuram D inuentam; ſed F etiam per aduerſarium menſurat ipſam C, ergo per idem coroll. citatum, eadem F menſurabit E maximam menſuram illarum D & C, inuentam: maior minorem, quod abſurdum eſt; quare principium vnde procedit erit falſum, videlicet quod E non ſit maxima menſura datarum trium magnitudinum A, B, C.

### COROLLARIVM.

*Magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem.*

Hoc demonſtratum eſt in demonſtratione ſecundi caſus, dum oſtendimus ſi F magnitudo metiatur tres datas A, B, C, metiri etiam maximam E eorum menſuram communem.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Pluribus quàm tribus datis magnitudinibus commenſurabilibus, maximam earum menſuram communem reperire.*

Reperiatur per iſtam propoſitionem, primo loco trium, tùm proportione ſtruata inquiratur de iſta maxima menſura communi tribus, an ſit menſura quartæ, & ſi ſit, ipſa erit maxima omnium communis; ſi non ſit inquiratur per propoſ. 3. præced. maxima menſura communis huic quartæ ſeu vltimæ & maximæ menſuræ inuentæ trium præcedentium: hæc inuenta erit maxima menſura quæſita communis datis quatuor. Et ſic de aliis pluribus. Demonſtratio autem allata in propoſitione præſenti, applicari debet hiſce aſſertionibus huius corollarij.

LEM-

## LEMMA.

Si ſint quotcumque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines, & numeri.

SVppoſitio. Datæ ſint quotcunque magnitudines A,B,C,D,& totidem numeri E,F,G,H, ita vt ſit A ad B, vt E numerus ad F numerum; tùm B ad C, vt F numerus ad G numerum; tùm C ad D vt G numerus ad H numerum: & ſic de aliis ſi adeſſent. Dico ex æquo eſſe A prima magnitudo ad D magnitudinem vltimam, vt numerus E primus ad H numerum vltimum.

A, B, C, D,

E 3. F 4. G 1. H 2.

Demonſtratio. Cùm enim ratio A ad D, componatur ex rationibus A ad B,& B ad C, & C ad D: tùm ratio numeri E ad numerum H componatur ex rationibus E ad F, & F ad G, & G ad H; quæ ſunt ex datis eædem rationes ſeu æquales, dùm binæ ſumptæ ſunt: neceſſariò rationes totales compoſitæ, hoc eſt A ad D,& E ad H,erunt eædem ſeu æquales: vnde erit A ad D, vt E ad H.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Eiſdem datis, ſi magnitudinum & numerorum fuerit ratio perturbata: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.*

HVius enim eſt eadem demonſtratio quæ huius lemmatis.

## PROPOSITIO V.

Commenſurabiles magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

SVppoſitio. Sint duæ datæ magnitudines A,B, commenſurabiles: Dico inter ſe ita eſſe, hoc eſt rationem eandem habere, quam numerus ad numerum.

A. B. C.

D 4. 1. E 2.

Conſtructio. Per propoſ. 3. libr. huius, ſumatur C, maxima menſura communis datarum magnitudinum duarum, A,B. Quod ſi fuerint datæ plures magnitudines quàm duæ; ſumenda erit maxima earum menſura communis, iuxta propoſ. 4. præcedentem, & noſtrum corollarium ad illam propoſitionem. Verùm nos exempli gratia conſtructionem ac demonſtrationem dabimus in datis ſolùm duabus magnitudinibus commenſurabilibus, applicandas in pluribus quàm duabus magnitudinibus. Prætereà quoties C metitur A, vel quoties A continet C, ſumendus erit numerus D toties vnitatem continens: & quoties C metitur B, ſumendus erit alius numerus E, toties menſuratus ab vnitate.

Demonſtratio. Quia quoties A magnitudo continet magnitudinem C, toties D numerus continet vnitatē: tùm quoties C continetur in magnitudine B, toties vnitas continetur in numero E; erit A magnitudo ad C magnitudinem, vt numerus D ad vnitatem; tùm C magnitudo ad B magnitudinem, vt vnitas ad E numerum, ex natura proportionum: ergo per lemma præcedens, erit ex æqualitate A magnitudo ad B magnitudinem, ſicut numerus D ad numerum E, quod erat demonſtrandum.

Aduerte quod loco maximæ menſuræ communis datis magnitudinibus commenſurabilibus, poſſit ſumi quæcumque alia menſura communis illis: demonſtratio enim eadem erit, vt conſideranti patebit.

## PROPOSITIO VI.

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commenſurabiles erunt magnitudines.

SVppoſitio. A magnitudo ſit ad magnitudinem B, vt numerus C ad numerum D: Dico A & B magnitudines eſſe commenſurabiles.

A. B. E. F.

C 5. D 3. 1.

Conſtructio. Concipiatur magnitudo A diuiſa in tot magnitudines æquales, quot vni-

 vnitates

tates continet numerus C, & illarum partium magnitudinis A, ſit vna E; Tùm quot vnitates continet D numerus, concipiatur alia magnitudo F continens tot partes æquales ipſi E.

Demonſtratio. Quia toties A magnitudo continet magnitudinem E, quoties numerus C, vnitatem; & quoties E magnitudo continetur in F magnitudine, toties vnitas in numero C; erit ex natura proportionum A magnitudo ad E magnitudinem, vt numerus C ad vnitatem, tùm E magnitudo ad F magnitudinem, vt vnitas ad numerum D: quare per lemma prop. præced, 5. erit ex æquo vt A magnitudo ad F magnitudinem, vt numerus C ad numerum D: Data verò eſt magnitudo A ad magnitudinem B, vt C numerus ad numerum D; ergo per prop. 11. lib. 5. erit magnitudo A ad magnitudinem B, vt A magnitudo ad magnitudinem F; quare per prop. 9. lib. 5. erunt magnitudines B & F æquales: Sed E metiebatur F, ergo etiam metietur E ipſam B magnitudinem; ſed etiam E metiebatur ipſam A magnitudinem: ergo cùm E magnitudo metiatur duas magnitudines A & B; ipſæ erunt commenſurabiles, quod erat concludendum.

## COROLLARIVM I.

*Si oporteat inuenire rectam lineam, quæ ad datam ſe habeat, vt numerus datus ad numerum datum: diuidenda erit recta data in tot partes æquales, quot vnitates continet antecedens numerus è datis; & de alia recta longiſſima ſumendæ tot partes æquales vni ex iſtis diuiſa, quot vnitates continet numerus conſequens: recta continens has partes aſſumptas, & earum extremarum terminis terminata, erit recta quæſita, ex demonſtratione allata.*

## COROLLARIVM II.

*Oporteat rectam lineam reperire, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum datæ rectæ lineæ A, vt numerus datus C ad numerum datum D.*

Per coroll. præcedens reperiatur recta F, ad quam ſe habeat recta A, vt C numerus ad numerum D: tùm inter A & F, media recta G proportionalis inquirenda per prop. 13. lib. 6. erit enim per coroll. prop. 20. lib. 6. quadratum ex A ad quadratum ex G, vt A ad F: ſed eſt per conſtructionem A ad F vt C ad D; ergo per propoſ. 11. libr. 5. erit quadratum ex A ad quadratum ex G, vt C numerus datus ad D numerum datum. Factum igitur imperatum in hoc corollario.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Lineæ proportionem habentes quam numerus ad numerum, ſunt longitudine & potentia commenſurabiles, non autem potentia tantum.*

Nam ex demonſtratione obtinent menſuram communem, quare ipſæ erunt commenſurabiles longitudine per defin. 1. libri huius.

# PROPOSITIO VII.

Incommenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

Si enim haberent proportionem quam numerus ad numerum, eſſent per præcedentem propoſitionem cōmenſurabiles, contra datum: igitur non ſe habebunt vt numerus ad numerum, quod erat propoſitum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Lineæ incommenſurabiles longitudine tantum, vel longitudine & potentia, nunquam ſe habent vt numerus ad numerum.*

Si enim ſe haberent vt numerus ad numerum, eſſent longitudine commenſurabiles per corollarium noſtrum præcedētis propoſitionis, contra ſuppoſitionem: non igitur ſe habebunt vt numerus ad numerum.

# PROPOSITIO VIII.

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum: incommenſurabiles erunt magnitudines.

Nam ſi eſſent commenſurabiles, rationem haberent inter ſe, vt numerus ad numerum per prop. 5. libri huius. hæc autem ſequela contradicit dato: non igitur erunt commenſurabiles, ergo incommenſurabiles ſicuti propoſitum fuit.

COROL-

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Si duæ lineæ proportionem non habeãt quam numerus ad numerum, erunt longitudine incommenſurabiles.*

SI enim eſſent longitudine commenſurabiles, ſe haberent per 5.prop.vt numerus ad numerum, contra hypotheſim: igitur erunt longitudine incommenſurabiles.

### COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Latus quadrati & diameter eius ſunt longitudine incommenſurabiles.*

NAm per corollar.noſtrum 2.ad prop.8. lib.8.latus quadrati ad diametrum eius non eſt vt numerus ad numerum, ergo per hanc prop.erunt incommenſurabiles illæ duæ rectæ lineæ.

### COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Si duæ rectæ lineæ proportionem non habent quam numerus ad numerum, non erunt neceſſariò incommenſurabiles potentia.*

COrollario noſtro 2.ad propoſ.8.libr.8. oſtendimus diametrum quadrati & latus eius non poſſe numeris explicari,ſeu quod idem eſt non eſſe vt numerus ad numerum; & corollario noſtro præcedente ſecundo declarauimus diametrum illam & latus dicti quadrati eſſe rectas incommenſurabiles; quæ incommenſurabilitas non poteſt intelligi in potentia, (nam conſtat ex 47.libr.1.quadratum diametri duplum eſſe quadrati lateris, ideoque eſſe vt numerus 2 ad 1,ideoq; commenſurabiles illas duas rectas potentia,iuxta prop. 6. libri huius) ergo non neceſſario incommenſurabilitas illa ſumenda erit in potentia.

### LEMMA.

Si ſint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè proportionales; ſitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundam.

SVppoſitio. Sint tres quantitates A.B.C. continuè proportionales, & aliæ tres continuè proportionales D. E. F. ſitque prima illarum A ad tertiam C, vt prima iſtarum D ad F tertiam: Dico eſſe primam A illarum ad B ſecundam, vt eſt prima D iſtarum ad E ſecundam.

A. B. C.

D. E. F.

Demonſtratio. A prima ad C tertiam, duplicatam habebit rationem eius quam habet ad ſecundam B; tùm etiam D prima ad F tertiam, habebit duplicatam rationem eius quam habet ad E ſecundam iuxta def.10.lib. 5. Datur autem A ad C, vt D ad F, hoc eſt eadem ratio vel æquales rationes dantur inter illas duplicatæ, ergo ſubduplicatæ illarum æqualium duplicatarum rationes erunt eædem, inter A primam & B ſecundam, & inter D primam & E ſecundam. quod erat probandum.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si fuerint plures quam tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tot numero etiam continuè proportionales; ſitq; prima illarum ad vltimam, vt prima iſtarum ad vltimam: erit prima illarum ad ſecundam, vt prima iſtarum ad ſecundam.*

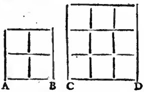
NAm ſi fuerint quatuor & quatuor quantitates, primæ ad vltimas habebunt per cit. def.10. libr. 5. rationem triplicatam eius quam habent ad ſecundas: ſi fuerint quinque & quinque, primæ ad vltimas ſuas proprias obtinebunt rationem quadruplicatam eius quam habent ad ſecundas ſuas proprias: & ſic in infinitum progrediendo, iuxta ſenſum definitionis illius 10.lib.5.ergo rationes primarum

marum ad ſecundas ſuas erunt ſub æquè multiplices vt ita loquar illarum triplicatarum vel quadruplicatarum, & ſic deinceps, æqualium rationum: vnde erit prima illarum ad ſecundam, vt prima iſtarum ad ſecundam, ſicuti habet iſtud corollarium.

## PROPOSITIO IX.

Quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

QVia hæc propoſitio multas continet partes diuerſas, earum ſuppoſitiones & conſtructiones & demonſtrationes ſeorſim claritatis ergo dabimus.



A B C D

E 2. F 3.

G 4. H 9.

Suppoſitio primæ partis. Datarum AB, CD, rectarum longitudine commenſurabilium, ſint quadrata data: Dico iſta ſe habere, vt numerus quadratus ad numerum quadratum.

Conſtructio. Quia dantur rectæ AB, CD, commenſurabiles longitudine, erit AB ad CD, vt numerus v.g. E ad numerum F, iuxta prop. 5. libri huius. Sit vero G quadratus numerus numeri E, & H quadratus numerus numeri F.

Demonſtratio. Per conſtructionem eſt recta AB ad rectam CD, vt numerus E ad numerum F: quadratum autem ex AB ad quadratum ex CD: duplicatam habet rationem lateris AB ad latus CD, per prop. 20. lib. 6. & numerus G quadratus ad numerum H quadratum, habet etiam duplicatam rationem lateris E ad latus F, per 11. propoſ. libr. 8. & oſtendimus eſſe AB ad CD, vt E ad F: Cùm igitur quadratum ex AB ad quadratum ex CD; & numerus G quadratus ad numerum H quadratum, habeant duplicatam rationem æqualium rationum; vel eiuſdem rationis, habebunt eandem rationem, hoc eſt; erit quadratum ex AB ad quadratum ex CD, vt numerus G quadratus, ad numerum H quadratum.

Suppoſitio ſecunda. Sit quadratum ex AB recta ad quadratum ex CD recta, vt numerus G quadratus ad numerum H quadratum: Dico latera ſeu rectas ex quibus facta ſunt quadrata, videlicet rectas AB, CD, eſſe longitudine commenſurabiles.

Conſtructio. Sint E, F, numeri ſeu latera quadratorum numerorum G, H, datorum, eodem ordine.

Demonſtratio. Datur quadratum ex AB recta ad quadratum ex CD recta, vt numerus G quadratus ad numerum H quadratum: & per prop. 20. libr. 6. eſt quadratum ex AB ad quadratum ex CD, obtinens rationem duplicatam lateris AB ad latus CD; & per prop. 11. libr. 8. etiam quadratus numerus G ad quadratum numerũ H, obtinet rationem duplicatam lateris E ad latus F: Igitur erit ratio rectæ AB ad rectam CD, eadem quæ E ad F, numeri ad numerum; nam eſt ſubduplicata eiuſdem rationis duplicatæ. Quia ergo eſt recta AB ad rectam CD, vt numerus E ad numerum F, ipſæ rectæ AB, CD, erunt longitudine commẽſurabiles per 6. prop. lib. huius.

Suppoſitio tertia. Datæ ſint rectæ AB, CD, longitudine incommenſurabiles: Dico earum quadrata non habere proportionem inter ſe quam numerus quadratus ad numerum quadratum.

Si

Si enim ſe haberent iſta quadrata ex AB & CD longitudine incommenſurabilibus, vt numerus quadratus ad numerum quadratum; eſſent per ſecundam partem præcedentem huius propoſitionis, ipſæ rectæ AB, CD, commenſurabiles longitudine, deſtruẽs datum. Non ergo erit quadratum ex AB ad quadratũ ex CD, vt numerus ad numerum.

Suppoſitio tertia. Quadratum ex AB recta ad quadratum ex CD recta, non habeat proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum: Dico ipſas rectas ſeu latera illorum quadratorum eſſe longitudine incommenſurabilia.

Si enim eſſent longitudine commenſurabiles rectæ AB, CD, earum quadrata eſſent vt numerus quadratus ad numerum quadratum per primam partem huius propoſitionis, contra datum ſeu ſuppoſitionem: igitur latera illorum AB, CD, erunt longitudine incommenſurabilia.

COROLLARIVM.

*Rectæ lineæ quæ longitudine ſunt commenſurabiles, ſunt etiam potentia commenſurabiles: Quæ verò potentia commenſurabiles, non omninò & longitudine: Et quæ longitudine incommenſurabiles, non omninò & potentia incommenſurabiles: Quæ denique potentia incommenſurabiles, omninò & longitudine incommenſurabiles ſunt.*

QVatuor partes diſtinctas continet hoc corollarium, quas ſeorſim explicabimus.

Prima pars explicatur. Per primam partem huius prop. 9. quadrata rectarum longitudine commenſurabilium, proportionem habent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, hoc eſt quam numerus ad numerum; ergo per prop. 6. libri huius, quadrata illarum rectarum commenſurabilia: ergo rectæ ipſæ datæ commenſurabiles longitudine, potentia erunt commenſurabiles per def. 3. lib. huius.

Secunda pars explicatur. Quia in vltima parte huius propoſitionis 9. probauimus quadrata proportionem non habentia quam numerus quadratus ad numerum quadratum, latera habere longitudine incommenſurabilia: licet habeant ipſa quadrata proportionem quam numerus ſimpliciter non quadratus ad numerum, vnde ipſa quadrata erunt commenſurabilia per 6. prop. libri huius; ergo ipſæ rectæ quæ ſunt horum quadratorum latera erunt per def. 3. libri huius, potentia commenſurabiles, non autem longitudine per cit. vltimam partem huius prop. 9. Igitur rectæ quæ potentia commenſurabiles ſunt, non ſunt ſemper longitudine commenſurabiles.

Tertia pars explicatur. Quia oſtendimus in præcedente parte ſecunda huius corollarij, lineas quarum quadrata proportionem minimè obtinent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, licet quam numerus ad numerum, incommenſurabiles quidem eſſe longitudine, ſed potentia commenſurabiles: manifeſtum eſt rectas longitudine incommenſurabiles, non ſemper eſſe potentia incommenſurabiles.

Quarta & vltima pars declaratur. Si lineæ potentia incommenſurabiles, eſſent longitudine commenſurabiles, eſſent ſemper potentia commenſurabiles per primam partem huius corollarij. hæc autem conſecutio deducta ex poſitione contradicente aſſertioni huius partis, deſtruit datum: falſa ergo erit poſitio illa, & vltima hæc pars vera.

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Quadratorum duorum æqualium numerorum ſumma, non poteſt eſſe numerus quadratus.*

SI enim eſſet numerus quadratus, ſumma duorum quadratorum numerorum laterum duorum quadrati æqualium, eſſet numerus quadratus: quare quadratum diametri quadrati, & quadratum lateris eius, ſe haberet vt numerus quadratus ad numerum quadratum; vnde per 2. partem huius propoſ. 9. eſſent commenſurabiles longitudine, diameter quadrati, & eius latus, contra coroll. noſtrum prop. 8. lib. huius, abſurdum, ergo quadratorum æqualium numerorum ſumma, non poteſt numerus quadratus.

COROLLARIVM NOSTRVM

II.

*Quadrati duo numeri numerorum ſeu laterum duorum quadrati geometrici, in vnam ſummam collecti, non componunt numerum quadratum.*

SI enim componerent quadratum numerum, ſumma duorum quadratorum numerorum æqualium, (nam tales ſunt duo quadrati numeri numerorum laterum duorum æqualium quadrati vnius geometrici) eſſet numerus quadratus, contra præcedens coroll. noſtrum abſurdum, ergo non component numerum quadratum.

COROLLARIVM NOSTRVM

III.

*Quadratum diametri quadrati alicuius dati, & quadratum datum ipſum, non ſe habent vt numerus quadratus ad numerum quadratum.*

SI enim quadratum diametri quadrati alicuius dati,& quadratum ipſum datum ſe haberent vt numerus quadratus ad numerum quadratum; eſſent per 2. partem huius prop. 9. latus quadrati dati, & diameter eius longitudine commenſurabiles, contra coroll.noſtrum 2.prop.8.lib. huius. abſurdum; ergo quadratum diametri quadrati dati, & quadratum ipſum, non ſe habent vt numerus quadratus ad numerum quadratum.

COROLLARIVM NOSTRVM

IV.

*Demonſtrare diametrum quadrati eſſe incommenſurabilem lateri eius.*

SI eſſet diameter quadrati commenſurabilis lateri illius, eſſet per 1. partem huius prop.9.quadratum diametri quadrati dati, ad quadratum lateris illius dati quadrati, vt numerus quadratus ad numerum quadratum, contra corollarium noſtrum præced.3. abſurdum,ergo & contradictoria poſitio noſtræ aſſertionis,quæ ideo vera erit.

# PROPOSITIO X.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit.

Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommenſurabilis erit.

SVppoſitio. Quatuor magnitudinum A, B.C.D.proportionalium,ſi prima A fuerit commenſurabilis ſecundæ B: Dico tertiam C eſſe commenſurabilem quartæ D. Quod ſi prima A ſecundæ fuerit incommenſurabilis: dico tertiam C eſſe quartæ D incommenſurabilem.

A. B. C. D.

E. F.

Demonſtratio. Dantur A & B commenſurabiles, ergo per 5.prop.lib. huius ſe habebunt vt numerus ad numerum, puta E ad F: Datur etiam vt A ad B, ita C ad D; & oſtendimus eſſe E ad F, vt A ad B;ergo per 11. prop. lib.5. erit C ad D vt E ad F, hoc eſt vt numerus ad numerum: vnde per prop.6.lib. huius, C tertia erit quartæ D commenſurabilis. Præterea dantur A & B incommenſurabiles, igitur per 7. prop. libri huius, non ſe habebunt vt numerus ad numerum, puta vt E ad F:ſed datur C ad D vt A ad B,& oſtendimus A ad B non eſſe vt E numerus ad F numerum;ergo per 11.prop.lib.5.neque erit C ad D, vt E numerus ad numerum F: ergo per prop.8.lib. huius, C erit incommenſurabilis ipſi D, tertia quartæ.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si prima ſecundæ fuerit commenſurabilis tantum potentia:erit tertia quartæ tantum potentia commenſurabilis.*

*Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis longitudine tantum; erit & tertia quarta commenſurabilis tantum longitudine.*

CVm enim ponantur quatuor magnitudines proportionales, & prima ſecundæ eſt oſtenſa commenſurabilis,ſit etiam tertia quartæ commenſurabilis: ſi tertia quartæ eſſet commenſurabilis alia ratione, quàm prima ſecundæ, non eſſent commenſurabiles in eadem ſpecie, contra rationem proportionum. igitur erunt in eadem ſpecie commenſurabiles.

LEMMA.

Duos numeros planos inuenire qui proportionem non habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

ACcipiantur duo A.B.numeri primi:vel duo numeri A. B. proportionem habeotes duplam; vel ſuperparticularem; vel ſuperbipartientem: Dico illos non habere rationem quam numerus quadratus ad numerum quadratum.

Demonſtratio primi caſus: Cùm enim A. B.

B. numeri primi ſolum pro lateribus habeat vnitatem, manifeſtum eſt non habere poſſe latera proportionalia per def. 21. lib. 7. atque adeo non-poſſe eſſe planos numeros ſimiles; ergo per coroll. noſtrum 2. prop. 26. libri 8. non habebunt duo numeri plani A. B. primi proportionem quam quadratus numerus ad numerum quadratum.

Demonſtratio ſecundi caſus. Si A & B numeri in proportione dupla, vel ſuperparticulari vel ſuperbipartiente, eſſent plani ſimiles, caderet inter eos medius proportionalis numerus per prop. 18. libr. 8. Sed id fieri nequit per coroll. noſtrum 1. ad prop. 8. libr. 8. igitur cùm non ſint plani ſimiles, non ſe habebunt vt numerus quadratus ad numerum quadratum, per coroll. 2. prop. 26. libr. 8. Fecimus ergo ac demonſtrauimus imperatum.

## PROPOSITIO XI.

### Propoſitæ rectæ lineæ inuenire duas rectas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentiâ.

Fig. 165. Suppoſitio. Rectæ A datæ, inueniendæ ſint duæ B. C. rectæ lineæ incommenſurabiles, B quidem longitudine tantùm, C verò longitudine & potentia.

Conſtructio. Super recta A concipiatur quadratum eius factum per 46. prop. lib. 1. & ducatur eius diameter B: Dico hanc rectam diametrum eſſe longitudine tantùm incommenſurabilem rectæ datæ A. Quod ſi per 13. prop. lib. 6. reperiatur media recta C proportionalis inter A & B: Dico rectam C eſſe longitudine & potentia ſimul incommenſurabilem datæ rectæ A.

Demonſtratio primæ partis manifeſta eſt ex coroll. noſtro ſecundo ad propoſ. 8. libri huius.

Demonſtratio ſecundæ partis. Per coroll. prop. 20. libr. 6. eſt quadratum ex A ad quadratum ex C, vt recta A ad rectam B: ſed A recta oſtenſa eſt incommenſurabilis longitudine ipſi B; ergo per prop. 10. lib. huius, quadratum ex A erit incommenſurabile quadrato ex C; ergo ex def. 4. libri huius, erit recta A rectæ C incommenſurabilis potentiâ: ergo per vltimam partem coroll. propoſitionis 9. libri huius, rectæ A & C erunt incommenſurabiles longitudine etiam. Fecimus igitur & demonſtrauimus imperatum.

### COROLLARIUM NOSTRUM.

*Recta media proportionalis inter duas potentiâ tantum commenſurabiles, vel inter duas tantùm longitudine incommenſurabiles, eſt vtrilibet illarum incommenſurabilis longitudine & potentiâ: & Irrationalis ſi alterutra illarum ponatur Rationalis.*

Sint enim A, B, rectæ longitudine tantum incommenſurabiles, vel potentiâ tantum, quod idem eſt. Cùm enim oſtenderimus rectam E mediam proportionalem inter illas, eſſe incommenſurabilem ipſi A longitudine & potêtia. Eadem ratione probabimus eandem E eſſe ipſi D alteri, longitudine & potentia incommenſurabilem. Quia enim rectæ D, E, A, ſint continuè proportionales, erit per coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt quadratum ex D ad quadratum ex E, ita recta D ad rectam A; Eſtque recta D rectæ A incommenſurabilis longitudine; ergo & quadratum ex D erit quadrato ex E incommenſurabile. igitur rectæ D, E, erunt per prop. 10. incommenſurabiles erunt potentia, ideoque per coroll. propoſ. 9. erunt etiam incommenſurabiles longitudine. quare ſi D ſtatuatur Rationalis, ipſa E erit Irrationalis, per def. 11. vel 7. Fig. 165.

## PROPOSITIO XII.

### Quæ eidē magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles.

Suppoſitio. Sint A & B magnitudines commenſurabiles tertiæ C: Dico ipſas A & B, eſſe commenſurabiles inter ſe.

A. B. C.

E. F. G. H.

I. K. L.

Conſtructio. Quia datur A ad C cōmenſurabilis, erit A ad C, vt numerus ad numerum, puta vt E ad F, per propoſ. 5. libr. huius: Tùm etiam quia dantur C & B commenſurabiles magnitudines, inter ſe erunt vt numerus ad numerum, v. g. G ad H. Deinde per 4. prop. lib. 8. ſumantur tres numeri deinceps proportionales I, K, L, in rationibus datis E ad F, & G ad H, numerorum.

Demonſtratio. Erit I ad K vt E ad F, hoc

eſt vt A ad C: tùm erit K ad L, vt G ad H, hoc eſt vt C ad B: ergo per lemma præmiſſum ad prop. 5. libri huius, erit ex qualitate A magnitudo ad magnitudinem B, vt numerus I ad numerum L: igitur per 6. prop. libr. huius, erunt commenſurabiles magnitudines A & B. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Si duarum magnitudinum commenſurabilium, vna ſit cuipiam tertia commenſurabilis; altera etiam erit eidem tertiæ commenſurabilis.*

HOc eſt, exempli gratia ſi duarum A & B commenſurabilium magnitudinum vna A ſit commenſurabilis tertiæ C: dico alteram B etiam commenſurabilem eidem C tertiæ: Nam C & B dantur commenſurabiles eidem tertiæ A, ergo per hanc propoſitionem C & B erunt commenſurabiles inter ſe.

COROLLARIVM NOSTRVM

I I.

*Si duæ magnitudines ſint eidem commenſurabiles longitudine; erunt inter ſe commenſurabiles longitudine. Eodem modo ſi fuerint eidem commenſurabiles potentia, erunt inter ſe commenſurabiles potentia. Idem etiam verum erit ex poſitione eorum quæ in coroll. primo.*

NAm per axioma 1. libr. 1. vel prop. 11. libr. 5. qua ratione ſunt duæ quantitates vni tertiæ reuinctæ, eadem ſunt inter ſe.

PROPOSITIO XIII.

Si ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera verò incommenſurabilis: incommenſurabiles erunt magnitudines.

SVppoſitio. Datarum magnitudinum duarum A; B; vna A ſit magnitudini C commenſurabilis, altera verò B, eidem C magnitudini incommenſurabilis: Dico A & B magnitudines eſſe inter ſe incommenſurabiles.

A. B.

C.

Demonſtratio. Si non ſint A, & B incommenſurabiles, ſint ſi fieri poſſit commenſurabiles, ergo cum A vna illarum detur commenſurabilis ipſi C, altera B erit etiam commenſurabilis eidem C, per coroll. noſtrum. prop. præced. conſecutio autem deducta ex poſitione aduerſarij, tollit datum; ergo falſa erit, & aſſertio illi poſitioni contradicens, vera erit.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si duarum magnitudinum A, B, vna A, tertia C ſit longitudine commenſurabilis, altera B, eidem C, longitudine incommenſurabilis: erunt illæ duæ A & B longitudine incommenſurabiles. Similiter ſi A ſit ipſi C, potentiâ commenſurabilis, & B eidem C, potentiâ incommenſurabilis: erunt A & B potentiâ incommenſurabiles.*

PRimum explicatur. Si enim A & B eſſent longitudine commenſurabiles, eſſent per prop. 12. coroll. noſtrum 2. B & C eſſent longitudine commenſurabiles contra datum.

Secundum explicatur. Si enim A & B, eſſent potentiâ commenſurabiles, forent B & C, potentiâ commenſurabiles per cit. coroll. noſtrum 2. ad prop. 12. (cùm hoc poſito vtraque B & C, ſit A tertia potentia commenſurabilis.) hoc autem deſtruit datum.

PROPOSITIO XIV.

Si ſint duæ magnitudines commenſurabiles; altera autem ipſarum magnitudini cuipiam incommenſurabilis fuerit: & reliqua eidem incommenſurabilis erit.

SVppoſitio. Commenſurabilium magnitudinum A & B, Vna A ſit incommenſurabilis cuipiam C magnitudini: Dico alteram B eſſe etiam incommenſurabilem eidem C.

A. B

C.

Demonſtratio. Si enim B eſſet commenſurabilis ipſi C; cùm dentur commenſurabiles A, B, & A ipſi C eſſet incommenſurabilis per coroll. noſtrum propoſ. 12. libr. huius: hoc verò tollit datum; ergo ſuppoſitio illa aduerſarij contradicens aſſertioni falſa erit, & propoſitio vera.

COROL-

COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Magnitudines propriis incommenſurabilibus commenſurabiles, & inter ſe incommenſurabiles erunt.*

INcommenſurabilibus magnitudinibus A & B, ſint cōmenſurabiles magnitudines C, D, C quidem ipſi A, & D ipſi B: Dico C & D magnitudines eſſe inter ſe incōmenſurabiles.

A. B.

C. D.

Nam C & A commenſurabilium datarum magnitudinum, A datur incommenſurabilis tertiæ B, ergo per iſtam prop. 14. reliqua C erit eidem B incommenſurabilis: Inſuper B & D commenſurabilium datarum, vna B eſt oſtenſa incommenſurabilis ipſi C, ergo per iſtam eandem prop. 14. reliqua D erit incommenſurabilis ipſi C. quod erat concludendum.

COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Tam propoſitio iſta 14. quàm coroll. præcedens, vera ſunt in magnitudinibus ſiue longitudine tantum, ſiue longitudine & potentia.*

SEqueretur enim per 12. prop. deſtructio dati; ſi altera datarum non eſſet incommenſurabilis in eadem ſpecie incommenſurabilitatis.

LEMMA.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id quo maior plus poteſt, quàm minor.

Et duabus datis rectis æqualibus vel inæqualibus, inuenire rectam quæ illas poſſit.

Et datis duabus rectis inæqualibus, inuenire aliam rectam quæ cum minore è datis, poſſit maiorem è datis.

Fig.166. SVppoſitio. Datæ ſint duæ rectæ lineæ inæquales AB maior, AC, minor; & oporteat reperire id quo poteſt maior AB, plus quam AC. Et ſi ſint datæ æquales vel inæquales AB, BC, & oporteat reperire rectam aliam quæ illas poſſit.

Conſtructio primæ ſuppoſitionis. Per prop. 10. libr. 1. recta AB maior diuidatur bifariàm in D, & centro D, interuallo DA, vel DB, circulus deſcribatur; & per prop. 1. lib. 4. ex puncto A circumferentiæ illius accomodetur recta AC æqualis rectæ datæ AC; tùm ducatur recta CB: Dico rectam AB plus poſſe quàm recta AC, quadrato rectæ BC.

Conſtructio ſecundæ ſuppoſitionis, per 11. prop. lib. 1. Ab extremo B rectæ AB, excitetur recta linea BC, æqualis ipſi BC datæ; & ducatur recta AC: Dico rectam AC poſſe rectas AB, BC.

Demonſtratio primæ Suppoſitionis & conſtructionis. Angulus ACB cùm ſit in ſemicirculo erit rectus per prop. 31. lib. 3. ergo in triangulo ACB rectangulo, per prop. 47. lib. 1. quadrata rectarum AC, BC, erunt æqualia quadrato rectæ AB: ergo recta AB plus poterit quàm recta AC, quadrato rectæ BC.

Demonſtratio ſecundæ ſuppoſitionis & conſtructionis. Triangulum ACB erit rectangulum per conſtructionem, propter angulum C rectum; ergo per propoſ. 47. libr. 1. quadratum rectæ AB erit æquale quadratis datarum AC, BC; vnde poterit recta AB, quod aliæ datæ AC, BC. Fecimus ergo ac demonſtrauimus imperata.

Conſtructio tertiæ partis. Data ſit maior AB, & minor AC; circa maiorem AB deſcribatur circulus in quo per 1. prop. lib. 4. accomodetur minor recta data AC, ex A extremo diametri AB, & ducatur recta CB. Dico rectam CB, eſſe quæſitam, cuius quadratum, & quadratum rectæ CA, poſſint quadratum rectæ AB maioris datæ.

Demonſtratio. Angulus ACB, erit rectus per prop. 31. lib. 3. quare per prop. 47. libr. 1. quadrata rectarum AC, CB, erunt æqualia quadrato rectæ AB: poſſunt igitur quadrata rectarum AC, CB, quadratum rectæ AB. inuenimus ergo propoſitum.

PROPOSITIO XV.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tanto plus poſſit quàm ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia

tanto plus poterit quàm quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

Quod ſi prima tanto plus poſſit quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: & tertia tanto plus poterit quàm quarta, quantum eſt quadratũ rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

SVppoſitio. Sint quatuor rectæ lineæ A. B. C. D. proportionales, & prima A plus poſſit quàm B ſecunda, quadrato rectæ E commenſurabilis, longitudine ipſi A; Dico tertiam C plus poſſe quàm D quarta, quadrato rectæ F commenſurabilis ipſi C in longitudine. Quod ſi prima A ſit incommenſurabilis ipſi E, erit etiam C incommenſurabilis ipſi F.

A. B. C. D.

E. F.

Demõſtratio. Quia datur A ad B, vt C ad D, erit per prop. 22. libr. 6. quadratũ ex A ad quadratum ex B, vt quadratũ ex C ad quadratũ ex D; datur autem quadratum ex A æquale quadratis ex B & E, & quadratũ ex C æquale quadratis ex D & F; ergo per 7. prop. lib. 5. quadrata ex B & E ad quadratum B, vt quadrata ex D & F, ad quadratũ ex F: & per prop. 17. lib. 5. erit diuidendo quadratum ex E ad quadratum ex B, vt quadratum ex F ad quadratum ex D, vnde per cit. prop. 22. libr. 6. erit vt E recta ad B rectam, ita F recta ad rectam D; & per coroll. prop. 4. lib. 5. erit inuertendo vt recta B ad rectam E, ita recta D ad rectam F: & qnia datur A recta ad B rectam, vt C recta ad D rectam; & oſtendimus eſſe B rectam ad rectam E, vt D recta ad rectam F; erit per prop. 22. lib. 5. ex æquo vt A ad E, ita C ad F: quare per prop. 10. libr. huius, ſi A eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit C commenſurabilis ipſi F: & ſi A fuerit incommenſurabilis longitudine ipſi E, erit incommenſurabilis longitudine ipſi F. quod erat probandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Eodem diſcurſu concludemus, ſi E potentiâ tantum fuerit commenſurabilis ipſi A; & F potentiâ tantum eſſe commenſurabilem ipſi C. ex corollario noſtro ad prop. 10.*

## PROPOSITIO XVI.

Si duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarum commenſurabilis erit.

Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commenſurabiles erunt.

SVppoſitio. Duæ magnitudines commenſurabiles AB, BC, cõpoſitæ ſint in vnam ABC: Dico totam ABC eſſe commenſurabilem ipſis AB, BC ſeorſim ſumptis. Quod ſi compoſita ABC ex AB, & BC, fuerit commenſurabilis ipſi AB, vel BC: Dico ipſas AB, & BC, eſſe commenſurabiles.

A B. B C.

A B C.

D.

Conſtructio. Quia dantur in prima parte duæ magnitudines AB, BC, commenſurabiles, reperiatur per 3. prop. lib. huius, maxima earum menſura communis D. Et per eandem propoſit. reperiatur etiam maxima menſura communis D, duarum datarum magnitudinum ABC, & AB vel BC, commenſurabilium.

Demonſtratio primæ partis. D metitur ipſas AB, BC, ergo per 1. ax. libri huius, metietur etiam compoſitam ABC ex illis: ergo cùm D metiatur ipſam totam ABC, & AB, erunt per 1. defin. libri huius, tota ABC, & AB, cõmenſurabiles: ſimiliter quia D metitur ABC, & BC, erit per cit. defin. ABC cõmenſurabilis ipſi BC. quod erat oſtendẽdum.

Demonſtratio ſecundæ partis. D metitur totam ABC, & ablatam AB, ergo per 3. ax. libri huius, D metietur etiam reliquam BC: erunt ergo AB, BC, commenſurabiles per def. 1. libri huius. Eodem modo D metitur totam

totam ABC, & ablatam BC, ergo per cit. ax. 3. metietur reliquam AC; & per def. cit. AB, BC, erunt commenſurabiles. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

*Tota magnitudo compoſita ex duabus, ſi fuerit commenſurabilis alteri ipſarum, erit & reliquæ commenſurabilis.*

NAm in poſteriori parte oſtendimus D metiri totam ABC, & ablatam AB vel BC, & reliquam etiam: quare per def. 1. cit. libri huius, erit tota ABC, commenſurabilis reliquæ parti ſuæ.

## PROPOSITIO XVII.

Si duæ magnitudines incommenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarum incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum incommenſurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incõmenſurabiles erũt.

SVppoſitio primæ partis. Duæ magnitudines AB, BC, incommenſurabiles componant totam ABC: dico totam hanc eſſe incommenſurabilem vtrique illarum AB, BC. Suppoſitio ſecundæ partis, Tota ABC ſit incommenſurabilis vni componentium duarum prædictarum, puta ipſi AB: dico ambas AB & BC, eſſe incommenſurabiles.

A B. B C.

A B C.

D.

Conſtructio pro prima parte. Si tota magnitudo ABC non ſit incommenſurabilis vtrique componentium, ſit alteri earum puta AB. commenſurabilis: tunc per prop. 3. libri huius, reperiatur D maxima menſura ipſarum ABC & AB. Conſtructio pro ſecunda parte: ſi duæ magnitudines AB, BC, non ſint incommenſurabiles, ſint ſi fieri poſſit commenſurabiles; & per cit. prop. 3. reperiatur D maxima menſura communis ipſis AB, BC.

Demonſtratio primæ partis. D metitur totam ABC, & ablatam AB, ergo metietur etiam reliquam BC per 3. axioma libri huius: cùm ergo D metiatur ambas AB, BC, ipſæ erunt per def. 1. libri huius commenſurabiles contra datum; ergo ſuppoſitio aduerſarij falſa, & aſſertio prima illi contradicens, vera.

Demonſtratio ſecundæ partis, D metitur AB, & BC, ergo per 1. ax. libr. huius D metietur totam compoſitam ABC: ergo cùm D metiatur totam ABC, & AB vnam ex componentibus, erunt tota ABC, & AB vna componentium, commenſurabiles per def. 1. libri huius, contra hypotheſim. Falſa ergo erit ſuppoſitio aduerſarij, & vera concluſio ſecundæ partis cui contradicit ſuppoſitio aduerſarij.

COROLLARIVM.

*Si tota magnitudo ex duabus compoſita fuerit incommenſurabilis vni componentium, & reliqua etiam erit incommenſurabilis.*

SI enim reliquæ eſſet commenſurabilis tota, eſſet etiam per coroll. præced. prop. alteri incommenſurabilis eadem tota, contra hypotheſim; igitur erit reliquæ incommenſurabilis.

## LEMMA I.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrãmum deficiens figura quadrata; parallelogrammũ applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſegmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

SVppoſitio. Ad rectam AC lineam applicatum ſit per propoſ. 28. libr. 6. parallelogrammum AF, deficiens figura quadrata BD: Dico parallelogrammum AF applicatum eſſe æquale rectangulo quid fit ex ſegmentis AB, BC, rectæ lineæ AC, ex applicatione factis. *Fig. 167.*

Demonſtratio. Cùm detur quadratum BD, latera eius BF, BC, erunt æqualia: ſed & angulus FBC rectus eſt ex natura quadrati, ergo latus FB erit orthogonium alteri lateri BC, ſeu toti rectæ ABC, iuxta def. 10. libr. 1. ſed & datur AF parallelogrammum, ergo cùm ſint parallelæ rectæ AE, BF, erunt

per 29.libr.1. anguli in A & B duobus rectis æquales;& oſtendimus in B eſſe rectum, ergo etiam in A rectus erit:quare per 34.lib.1.alij duo anguli in E & F, recti erunt; ergo rectangulum erit AF, hoc eſt parallelogrammum applicatum: continetur autem hoc rectangulum ſub AB, & BF ſeu BC, hoc eſt ſub ſegmentis rectæ lineæ datæ ex applicatione factis: ergo parallelogrammum applicatum ad rectam lineam, deficiens figura quadrata, erit æquale rectangulo ſub ſegmentis rectæ lineæ ex applicatione factis.

## LEMMA II.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

Fig.168. Svppoſitio. Duæ rectæ inæquales AB maior, CD minor, datæ ſint: & oporteat ad maiorem AB applicare rectangulum æquale parti quartæ quadrati ex minore CD deſcripti, ita vt deficiat quadrata figura.

Conſtructio. Per prop.10. lib.1.recta AB, bifariam ſecetur in E; & recta CD, etiam bifariam in F. Certum eſt per corollar. prop. 29.lib.6. imprimis quadratum ex FD, minus eſſe quadrato ex EB, quia FD minor eſt quàm EB, per propoſ.15. libr.5. tùm etiam quadratum ex FD eſſe quartam partem quadrati ex tota CD, ex cit.coroll. propoſ.20. libr. 6. Deſcripto autem ſemicirculo ex puncto E vt centro, intervallo rectæ EB vel EA, æqualibus, & per prop.11.lib.1. educta perpendiculari EG ipſi AB, erit EG ſemidiameter circuli facti æqualis rectæ EB per def. 15.lib.1. quare per prop.3.lib.1. ex maiore EG ſumere poterimus LH æqualem ipſi FD; & ex puncto H, per prop.31.libr.1. educere parallelam rectam HI ſecantem I, ſemicircumferentiam factam ſemicirculi; & per propoſ.12.lib. eiuſdem 1 ex puncto I demittere aliam rectam IK perpendicularem ipſi AB, producendam infra ipſam; & ſumere rectam KL æqualem ipſi KA. Erunt autem IK,HE rectæ parallelæ per prop.29.lib.1.vnde reſultabit parallelogrammum IE, quia poſuimus alias duas rectas IH, AB parallelas; ergo per prop.34.libr. eiuſdem, recta IK erit æqualis ipſi EH, & per 1.ax. libr. eiuſdem, recta IK æqualis erit ipſi FD: & ipſa IK media proportionalis inter ſegmenta AK, KD, rectæ datæ maioris AB,ex dictis in prop.13.lib.6. & 8.libr. eiuſdem. Denique per lemma noſtrum 1. ad libr. 2. perficiatur rectangulum LB, quod dico eſſe æquale quadrato FD, dimidiæ datæ minoris rectæ CD; ſeu quartæ parti rectæ CD; & applicatum ad rectam AB maiorem, deficiens figura quadrata.

Demonſtratio. quia rectæ AK,KL, factæ ſunt æquales, & angulus K rectus, erit AL rectangulum quadratum; & rectangulum KB, applicatum ad rectam AB, deficiens figura quadrata AL,iuxta def.6.lib.6.Et quia recta IK eſt media proportionalis inter AK, KB,erit per propoſ.17. libr.6. rectangulum ſub AK, KB, ſeu ſub LK, KB, æquale quadrato rectæ KI, vel FD; ſed quadratum rectæ FD, eſt quarta pars quadrati totius CD, ergo per 1.axio.libr.1. rectangulum ſub KB, KL, applicatum ad rectam minorem, AB, deficiens figura quadrata AL, æquale erit quartæ parti quadrati rectæ CD minoris datæ. Fecimus ergo imperatum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Datam rectam ita ſecare, vt rectangulum ſub partibus contentum æquale ſit rectilineo, quod tamen maius non ſit quàm quadratum à dimidia linea deſcriptum.*

Svppoſitio. Oporteat datam rectam AB ita ſecare, ita vt rectangulum ſub partibus eius contentum æquale ſit rectilineo quod tamen maius non ſit quàm quadratum ex dimidia AE, totius rectæ datæ AB. Fig.168.

Conſtructio per prop.45. libri 1. fiat rectangulum æquale dato rectilineo; & huic rectangulo æquale quadratum per prop. vltimam libr.2. Imprimis hoc quadratum, latus habebit v. g. CF minus quàm AE recta: ſi enim eſſet æquale CF ipſi AE, eſſent æqualia quadrata: & ſi eſſet maius quàm AE, ipſum latus CF, quadratum ex CF eſſet maius quadrato ex AE,iuxta prop.20.lib.6. quæ eſſent contra hypotheſim. His poſitis.Ex centro E intervallo EB fiat circulus AGB, & per propoſ.11. libr. 1. excitetur ex E recta linea EG ſemidiameter circuli facti ad angulos rectos ipſi AB; & per 3.propoſ. libr.1. ſecetur recta EH æqualis ipſi CF; & per prop.31.lib.1. ex H ducatur recta HI, parallela ipſi AB, ſecetque in I, circumferentiam circuli facti;& per prop.12.libr.1. demittatur recta IK perpendicularis ipſi AB; & producatur recta IK infra diametrum AB, & ſumatur portio KL æqualis ipſi AK: & perficiantur rectangula AL, KB, quorum primum erit quadratum, ob

Digitized by Google

ob duo latera AK, KL æqualia; & aliud erit æquale quadrato ex IK ſeu CF; eritq; iſtud KB rectangulum ſub ſegmentis rectæ datæ AB, nam eſt ſub BK, & KL æquale ipſi KA; vnde factum erit imperatum. Quod vero ſit æquale quadrato ipſi ex CF ſeu IK æquali ipſi CF, probauimus in huius lemmatis demonſtratione; vnde hoc problema per modum corollarij illius propoſuimus.

## LEMMA III.

Si ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorē applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti deficiens figura quadrata: non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt æqualia.

SI enim eſſet æqualia, rectangulum illud ſub æqualibus ſegmentis, eſſet quadratum, & pars quarta quadrati ex maiore recta linea deſcripti, prout in ſuperioris lemmatis 2. demonſtratione oſtendimus, contra hypotheſim: non erunt ergo ſegmenta maioris lineæ quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

## PROPOSITIO XVIII.

Si fuerint duæ rectę lineæ inæquales; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallegrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat: maior tanto plus poterit, quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſsit quàm minor, quantum eſt quadratū rectæ lineæ ſibi longitudine cōmenſurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet.

SVppoſitio. Sint inæquales duæ rectæ lineæ AB maior, & C minor; tùm per lemma 2. præcedens, applicetur ad maiorem rectam AB, parallelogrammum æquale quartæ parti quadrati ex minore C deſcripti, deficiens figura quadrata, contētum ſub ſegmentis AD, DB, longitudine commenſurabilibus: Dico AB plus poſſe quàm C, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi AB tanto plus poſſit quàm minor C, quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis; & quartæ parti quadrati ex minore C deſcripti, æquale parallelogrammum ad maiorem AB applicetur, deficiens figura quadrata, per cit. lemma: Dico quod ſegmenta AD, DB, continentia dictum parallelogrammum, eſſe longitudine commenſurabilia. *Fig. 169.*

Conſtructio. Per prop. 10. libr. 1. ſecetur recta AB, biſariàm in E puncto, quod erit diuerſum ab D, eo quod ſegmenta AD, DB, ipſius AB, ſint inæqualia per lemm. 3. præcedens, vnde punctum E erit in maiore ſegmento AD: tùm per propoſ. 3. libr. 1. ex EA ſegmento verſus A vbi non eſt punctum D, ſumatur recta EF, æqualis ipſi ED, relinquetur FA æqualis ipſi DB, per 3. axio. lib. 1. Et erit quadratum ex DE, vel FE, ſemiſſe totius FD, ſub quadruplum quadrati ex FD, per coroll. prop. 20. libr. 6. tùm etiam per idem coroll. quadratum ex EB vel EA, erit quarta pars quadrati totius AB. Prættereà quia recta AB, ſecta eſt biſariàm in E, & non biſariàm in D, erit per 5. prop. libr. 2. rectangulum ſub AD, DB, vnà cum quadrato ex ED, æquale quadrato ex EB, vel EA; & per prop. 15. lib. 5. quadruplum rectanguli ſub AD, DB, & quadrati ex ED, æquale erit quadruplo quadrati ex EB, hoc eſt quadrato ex AB. Et quoniam oſtendimus quadratum ex FD, quadruplum eſſe quadrati ex ED, vel EF; & etiam poſuimus rectangulum ſub AD, DB, æquale quartæ parti quadrati ex C, & oſtendimus quadratum ex C quadruplum eſſe rectanguli ſub AD, DB: erunt per 7. prop. lib. 5. quadrata ex C & FD, æqualia quadrato ex AB; quare recta AB plus poteſt quam recta C, quadrato rectæ FD.

Demonſtratio primæ partis. rectæ AD, DB, dantur longitudine commenſurabiles, ergo per prop. 16. huius libri, tota recta AB erit commenſurabilis longitudine parti ſuæ DB; ſed eſt per conſtructionem compoſita ex DB, AF, dupla ipſius DB, ergo per cit. prop.

 16.

16. ipſa compoſita ex DB, AF, longitudine commenſurabilis erit ipſius DB. Quare cùm vtraque recta AB, & compoſita ex DB, AF ſit commenſurabilis longitudine ipſi rectæ DB, erunt per propoſ. 12. libri huius AB, & compoſita ex DB, AF, longitudine inter ſe commenſurabiles. Quamobrem cùm AB recta compoſita ex AF, DB, FD, tanquam vna, ſit commenſurabilis longitudine compoſitæ ex AF, DB; erit per coroll. prop. 16. cit. libri huius, commenſurabilis longitudine reliquæ FD. Igitur recta AB plus poteſt quàm recta C, quadrato rectæ FD longitudine ſibi commenſurabilis.

Demonſtratio ſecundæ partis. Recta AB datur plus poſſe quam recta C, quadrato rectæ ſub FD longitudine ſibi commenſurabilis; ergo recta AB, erit commenſurabilis rectæ FD. Quare cùm tota AB compoſita ex FD, AF, DB, veluti vna, ſit commenſurabilis longitudine vni FD, erit eadem per corollar. prop. 16. libri huius, etiam commenſurabilis longitudine, reliquæ compoſitæ ex AF, DB; ſed eſt compoſita ex AF, DB, dupla ipſius DB per conſtructionem, ergo compoſita ex AF, DB, erit longitudine commenſurabilis ipſi DB: Igitur cum ambæ AB, DB, ſeorſim ſumptæ, ſint longitudine commenſurabiles ipſi compoſitæ ex AF, DB, erunt per 12. prop. libri huius, ipſæ AB, DB longitudine commenſurabiles. Et quia AB tota compoſita ex AD, DB eſt longitudine commenſurabilis ipſi DB vni, erunt per 2. partem prop. 16. cit. ipſæ rectæ AD, DB, longitudine inter ſe commenſurabiles. probauimus ergo intentum.

## PROPOSITIO XIX.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat; maior tanto plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Quod ſi maior plus poſſit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine incõmenſurabiles ipſam diuidet.

Fig. 169.

SVppoſitio. Datæ ſint duæ rectæ lineæ inæquales AB, maior, & C minor; quartæ verò parti quadrati ex minore C, applicatum ſit per lemma 2. præpoſitum propoſ. 18. ſuperiori, parallelogrammum æquale, deficienſque figura quadrata, diuidenſque rectam AB maiorem in partes AD, DB, incommenſurabiles longitudine: Dico quod maior AB plus poſſit quàm minor C, quantum eſt quadratum rectæ lineæ longitudine incommenſurabilis ipſi maiori AB. Quod ſi maior AB plus poſſit quàm C minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; quartæ autem parti quadrati à minore C deſcripti, parallelogrammum æquale applicatum fuerit ad maiorem AB, deficiens quadrata figura: Dico quod diuidetur ipſa recta AB, per hanc applicationem, in duas partes, puta AD, DB, longitudine incommenſurabiles.

Conſtructio eadem fiat quæ in propoſitione præcedente; & eadem quæ in illa demonſtrata ſunt, aſſumantur ad ſequentes duarum pattium huius propoſitionis demonſtrationes.

Oſtendamus ergo rectam AB plus poſſe quàm C, quadrato rectæ FD longitudine ipſi AB incommenſurabilis. Cùm ponantur rectæ AD, DB, longitudine incommenſurabiles; erit per prop. 17. tota AB, parti eius DB longitudine incommenſurabilis: At DB longitudine eſt commenſurabilis compoſitæ ex DB, AF, vtpote illius dupla; igitur iuxta propoſ. 14. coroll. noſtrum 2. duarum iſtarum linearum commenſurabilium longitudine, ipſa DB ſit longitudine incommenſurabilis rectæ AB; erit & altera compoſita ex DB, AF, eidem AB longitudine incommenſurabilis. Quare cùm AB, compoſita ex AF, DB, tanquam vna, & ex FD, incommenſurabilis ſit longitudine compoſitæ ex AF, DB; erit per coroll. prop. 17. eadem AB reliquæ DB longitudine incommenſurabilis. Plus ergo AB poteſt quàm C, quadrato rectæ FD, longitudine ſibi incommenſurabilis.

Secundo

Secundo loco, Recta AB plus poſſit quàm C, quadrato &c. ad ſecundam partem demonſtrandam. Probabimus vti antea rectam AB plus poſſe quàm C, quadrato rectæ FD. Igitur quia ponitur AB plus poſſe quàm C, quadrato rectæ FD longitudine incommenſurabilis ipſi AB, erunt AB, FD, longitudine incommenſurabiles. Quare cùm tota AB compoſita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, longitudine incommenſurabilis ipſi FD ſit; erit per corol. prop. 17. eadẽ AB, reliquæ compoſitæ ex AF, DB, longitudine incommenſurabilis. Sed eſt compoſita ex AF, DB, ipſi DB, commenſurabilis, quia huius dupla eſt: ergo cùm duarum linearum commenſurabilium, videlicet quæ ex AF, DB, componitur, & DB compoſita ex AF, DB, longitudine ſit incommenſurabilis rectæ AB; erit per propoſitionem 14. reliqua DB, eidem AB, longitudine incommenſurabilis. Quare cùm tota AB compoſita ex AD, DB, incommenſurabilis ſit ipſi DB longitudine; erunt iuxta propoſitionem 17. huius libri, ipſæ rectæ AD, BD, longitudines inter ſe incommenſurabiles. Quocirca ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. quod erat demonſtrandum.

## LEMMA I.

Si expoſitæ Rationali, aliqua linea commenſurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed etiam potentia.

Si verò expoſitæ Rationali, aliqua linea fuerit potentia commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Rationalis, & commenſurabilis ipſi longitudine & potentia.

Quod ſi expoſitæ Rationali rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic Rationalis, potentia tantum ipſi commenſurabilis.

Prima pars oſtenditur. Per corollarium propoſ. 9. libri huius, ſi recta linea fuerit longitudine commenſurabilis alteri lineæ, erit omnino & potentia ipſi commenſurabilis: datur aliqua linea commenſurabilis lineæ expoſitæ Rationali; ergo per def. 5. & 6. libri huius, data iſta recta linea erit etiam Rationalis.

Secunda pars declaratur. Datur recta aliqua linea expoſitæ Rationali potentia & longitudine commenſurabilis, ergo per def. 5. & 6. huius libri, data hæc linea vocabitur etiam Rationalis, & ex datis erit commenſurabilis longitudine & potentia ipſi Rationali expoſitæ.

Tertia pars demonſtratur. Datur aliqua recta linea expoſitæ Rationali commenſurabilis potentia, & longitudine incommenſurabilis; ergo per def. 5. & 6. libri huius, dicetur hæc linea data etiam Rationalis; & ex datis erit ſolum potentia datæ ſeu expoſitæ Rationali commenſurabilis.

## LEMMA II.

Expoſitæ Rationali, quæ lineæ ſunt longitudine incommenſurabiles, potentia autem ſolum commenſurabiles, dicuntur etiam Rationales, & commenſurabiles inter ſe quatenus Rationales, commenſurabiles inquam inter ſe vel longitudine & potentia, vel potentia ſolùm.

Et ſi quidem longitudine, dicuntur & ipſæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, vt intelligatur etiam potentia commenſurabiles eſſe: ſi verò potentia inter ſe ſolum ſunt commenſurabiles, dicuntur ipſæ quoque Rationales, potentia ſolum inter ſe commenſurabiles.

Hoc lemma probatur ex definitione 5. & 6. libri huius. Verùm hæc tria genera linearum Rationalium longitudine inter

ter ſe commenſurabilium colliguntur ex dictis. Aut enim duarum linearũ Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium altera expoſitæ Rationali eſt æqualis, ideoque Rationali vtraque commenſurabilis quoque longitudine: aut nulla illarum expoſitæ Rationali eſt æqualis, verum ei longitudine commenſurabilis: Aut vtraque Rationali expoſitæ eſt commẽſurabilis ſolum potentia.

## LEMMA III.

Si ſint duæ rectæ lineæ; erit vt prima ad ſecundam, ita quadratum quod fit à prima, ad rectangulum quod ſub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt ſecunda ad primam, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratum ex prima.

*Fig.170.* Vppoſitio. Datæ ſint duæ rectæ lineæ A. & B. Aſſero eſſe vt A ad B, ita quadratum ex A ad rectangulum ſub A & B: Tùm dico eſſe vt B ad A, ita rectangulum ſub A & B, ad quadratum ex A.

Conſtructio. Ex aliqua recta CD longiſſima, ſecentur rectæ CE, EF, æquales datis A & B; & quidem CE æqualis ipſi A primæ, & EF æqualis ipſi B ſecundæ, iuxta prop.3. lib.1. & ſuper recta CE fiat per propoſ.46. lib.1. quadratum CG; & per lemma noſtrum 1. ad lib.2. perficiatur rectangulum GF: erit quadratum CG, factum ſupra CE æqualem ipſi A, conſiderandum tanquam factum ex A recta; tùm etiam rectangulum GF, comprehenſum ſub FE, EG, æqualibus ipſis B & A per conſtructionem ipſam & naturam quadrati, reputandum veluti factum ex duabus rectis datis A & B.

Demonſtratio, quia quadratum GC, & rectangulum GF, ſunt parallelogramma ſub altitudine eadem perpendicularis rectæ GE; erit per 1. propoſ. lib.6. vt CE ad EF, hoc eſt vt A ad B; ſic quadratum CG ad rectangulum GF, hoc eſt vt quadratum ex A prima ad rectangulum ſub duabus A & B: Eritque etiam vt FE ad EC, hoc eſt vt B ſecunda ad primam A; ſic rectangulum FG ad quadratum CG, hoc eſt rectangulum ſub datis rectis A & B, ad quadratum ex A primæ, quæ erant demonſtranda.

## LEMMA IV.

Spatium Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

Vppoſitio. Spatium A ſit commenſurabile ſpatio Rationali B: Aſſero ſpatium A eſſe Rationale. *Fig.171.*

Conſtructio. Aſſumatur quadratum C Rationale, ad quod reliqua Rationalia vel Irrationalia dicuntur, nimirum ex Rationali expoſita linea factum.

Demonſtratio. Quia B ſpatium datur Rationale, erit per 9. def. libri huius commenſurabile Rationali C: ſed dantur commenſurabilia ſpatia A & B, ergo per prop.12. libri huius erunt commenſurabilia ſpatia A & C: quare cùm ſpatium A ſit commenſurabile Rationali C quadrato ex linea rationali facto, erit Rationale iuxta 6. def. libri huius.

## PROPOSITIO XX.

Quod ſub Rationalibus longitudine commẽſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectãgulum; Rationale eſt.

Vppoſitio. Expoſita Rationalis linea A ſit, & ſpatium rectangulum BD comprehenſum ſub duabus rectis lineis Rationalibus longitudine cõmenſurabilibus BC, CD, iuxta aliquem commemoratorum modorum in explicatione lemmatis ſecundi ad iſtam prop. ita vt vel altera illarum BC, CD, ſit Rationali A expoſitæ æqualis, vel neutra, verum vtraque ei commenſurabilis aut longitudine, aut potentia tantum. Dico rectangulum BD eſſe Rationale. *Fig.172.*

Conſtructio. Per prop.46. lib.1. Super altera linearum datarum BC, CD, puta ſuper BC, fiat quadratum BE.

Demonſtratio. Recta BC Rationalis Rationali rectæ A commenſurabilis eſt vel longitudine & potentia, vel potentia ſolùm, ex ſuppoſitione; ergo per def.3. libri huius, quadratum BE deſcriptum ex linea BC data, quadrato ex A erit commenſurabile: Sed per defin. 8. Quadratum ex A eſt Rationale, ad quod reliqua vel quadrata vel rectangula dicuntur Rationalia vel Irrationalia; ergo per def.9.

def.9. quadratum BE, dicetur etiam Rationale. Dantur autem rectæ EC ſeu BC, & CD, longitudine commenſurabiles Rationales, & per lemma 3. præcedens hanc prop. eſt vt recta EC ſeu BC, ad rectam CD, ſic quadratum BE ad rectangulum BD; & ex datis recta BC ſeu EC, eſt commenſurabilis rectæ CD, ergo per prop.10. libr. huius, quadratum EB rectangulo BD commenſurabile erit: igitur per præcedens lemma 4. rectangulum BD ſub Rationalibus rectis datis BC, CD, comprehenſum Rationale erit, ſicuti fuit propoſitum.

## PROPOSITIO XXI.

### Si rationale, ad Rationale applicetur; latitudinem efficit Rationalem, & ei ad quam applicatum eſt longitudine commenſurabilem.

Fig.172. SVppoſitio. In figura prop. præced. 20. expoſita ſit A recta Rationalis, & alia recta Rationalis BC, ſecūdum aliquem modum explicatum in lemmate 2. præmiſſo ad prop. præced. 20. applicatū autem ſit ad BC, ſpatium Rationale BD, latitudinem efficiens CD. Dico rectam CD, eſſe Rationalem, & ipſi rectæ BC longitudine commenſurabilem.

Conſtructio. Per prop.46. lib.1. fiat quadratum BE ſuper recta BC.

Demonſtratio. Vt in antecedentis propoſitionis demonſtratione, oſtendetur quadratum BE eſſe Rationale. Iam verò quia quadratum BE, & rectangulum BD ſunt Rationalia, ipſa erunt per 9. def. commenſurabilia quadrato ex A linea Rationali deſcripto; ideoque per propoſ.12. libr. huius, commenſurabilia inter ſe. Eſt autem per lemma 3. præmiſſum ad prop. præced.20. quadratum BE ad rectāgulum BD, vt recta EC ſeu BC, ad rectam CD; ergo per propoſ.10. recta EC ſeu BC, erit longitudine commenſurabilis rectæ CD, cùm ſint oſtenſa commenſurabilia quadratum BE & rectangulum BD. Quia verò ipſa CD recta eſt Rationali rectæ BC commenſurabilis, & eidem BC eſt recta Rationalis A, commenſurabilis, erunt per prop. 12. rectæ CD & A, commenſurabiles, ergo per def.6. quia rectæ CD, BC, ſunt commenſurabiles ipſi A rectæ rationali expoſitæ, erit recta CD Rationalis. Et ſic probata erit propoſitio.

## LEMMA I.

### Recta linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

SVppoſitio. Recta A ſpatium Irrationale poſſit; ſeu quod idem eſt Quadratum ex A, ſit æquale ſpatio Irrationali. Dico rectam A eſſe Irrationalem. Fig.171.

Demonſtratio. Sit ſi fieri poſſit recta A Rationalis: ergo cùm eius quadratum ſit rectāgulum ex duabus rectis rationalibus comprehenſum, erit ipſum Rationale per prop. præced.20. cōtra datum. hoc abſurdum conſequens ad poſitionem aduerſarij, indicat illam eſſe falſam, & aſſertionem huius propoſitionis illi contradicentem, eſſe veram.

## LEMMA II.

### Duas rectas lineas Rationales potentiâ ſolùm commenſurabiles inuenire.

CVm duo ſint genera linearum potentiâ ſolùm commenſurabilium; Aut enim altera earum eſt æqualis Rationali rectæ expoſitæ, aut neutra; duas partes continebit praxis ac demonſtratio huius lemmatis.

Primæ partis ſuppoſitio & conſtructio. Fig.173. Rationali rectæ A expoſitæ, ſumatur recta B ei æqualis; tùm per prop.11. libri huius, reperiatur alia recta C, longitudine tantùm incommenſurabilis ipſi B, vel quod in idem recidit, potentiâ tantùm ipſi B commenſurabilis: Dico rectas B & C eſſe rationales potentiâ ſolùm commenſurabiles.

Primæ partis demonſtratio. Rectæ B inuenta eſt recta C commenſurabilis potentiâ tantùm, ideoque ſecundum hoc commenſurabilis ipſi B rectæ; ſumptæ verò ſunt rectæ A & B æquales, ideoque commenſurabiles; ergo per prop.12. lib. huius, quandoquidem recta A eſt commenſurabilis ipſi B, & C recta eidem B, erunt rectæ A & C commenſurabiles; igitur per defin. 6. erunt rectæ B & C Rationales; interuentæ autem ſunt potentiâ ſolùm commenſurabiles. Ergo rectas B, C, duas reperimus potentiâ ſolùm commenſurabiles, vna illarum B exiſtente æqualis rectæ A Rationali expoſitæ.

Secundæ partis ſuppoſitio & conſtructio. Rationali rectæ A expoſitæ ſumatur per prop.11. recta B lōgitudine tantùm incommenſura-

menſurabilis, vel quod idem eſt potentiâ ſolùm ipſi A commenſurabilis: & per eandem cit. propoſ. huic rectæ B, inueniatur alia recta C potentia ſolum commenſurabilis, maior aut minor quàm A recta: Aſſero rectas B & C, eſſe rationales potentia ſolum commenſurabiles.

Demonſtratio ſecundæ partis. Per conſtructionem conſtat, rectas B & C, eſſe ſolum potentia commenſurabiles; reſtat oſtendere ipſas eſſe Rationales, Rectæ A & C, ſunt rectæ B per conſtructionem potentia ſolùm commenſurabiles, ergo per propoſ. 12. libri huius, erunt ipſæ rectæ A & C, potentia ſolùm commenſurabiles inter ſe. Cùm igitur oſtenderimus rectæ expoſitæ A rationali, ſingulas rectarum B & C, eſſe potentia ſolùm commenſurabiles; ipſæ rectæ B, C, erunt per def. 6. Rationales. Fecimus ergo imperatum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Inuenire plures quàm duas rectas Rationales, potentiâ ſolum commenſurabiles.*

Fig. 174 PEr coroll. noſtrum prop. 20. libr. 9. inueniantur tot numeri primi, quot quæruntur lineæ Rationales; exempli gratia, A, B, C, D, numeri primi tùm ſumpta linea Rationali E, fiat per corollar. 2. propoſ. 6. vt A ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F: tùm vt B ad C, ita quadratum ex F ad quadratum ex G; denique vt C ad D, ita quadratum ex G ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, eſſe Rationales, & potentia ſolum commenſurabiles.

Probatur primùm. Cùm enim per conſtructionem, earum quadrata proportionem habeant, quam numeri; erunt per prop. 6. interſe commenſurabilia, ideoque rectæ ipſæ, potentia ſolùm commenſurabiles. Recta ergo E exiſtente Rationali, reliquæ F, G, H, erunt Rationales per def. 6.

Probatur 2. Quia quadrata rectarum E, F, G, H, ſunt proportionalia numeris A, B, C, D, primis; & primi numeri proportionem non habeant quàm numeri quadrati, ex dictis in libr. 8. ergo neque quadrata rectarum obtinebunt proportionem quàm numeri quadrati, ideoque per 9. prop. rectæ E, F, G, H, erunt lõgitudine incommenſurabiles. oſtenſæ verò ſunt Rationales, ergo potentiâ ſolùm commenſurabiles erunt.

## PROPOSITIO XXII.

### Quod ſub Rationalibus potentiâ ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt, Vocetur autẽ Media.

SVppoſitio. Expoſita ſit recta A Rationalis; & rectangulum BD ſub datis rationalibus, potentiâ ſolùm commenſurabilibus datum ſit: Aſſero rectangulum BD eſſe Irrationale, & rectam cuius quadratum eſt æquale ipſi BD rectangulo prædicto, eſſe Irrationalem, & vocari iſtam rectam ab Euclide, Mediam. Fig. 171.

Conſtructio. Per prop. 46. lib. 1. Super recta BC altera è datis, fiat quadratum BE, quod vti in propoſ. 20. oſtendetur Rationale eſſe.

Demonſtratio. Per lemma 3. præmiſſum ad prop. 20. quia eſt recta EC vel BC, ad rectam CD, ſicut quadratum BE ad rectangulum BD; & ex datis recta BC vel EC eſt incommenſurabilis longitudine ipſi rectæ CD, erit per prop. 10. quadratum BE incommenſurabile rectangulo BD. Sed quadratum BE eſt per def. 9. commenſurabile quadrato ex A Rationali recta expoſita; ergo per prop. 14. quadratum ex A erit incommenſurabile rectangulo BD: igitur per def. 10. ipſum rectangulum BD erit irrationale; & per lemma 1. præmiſſum huic propoſitioni, recta ipſa potens hoc rectangulum BD, ſeu cuius quadratum æquale eſt huic rectangulo BD, erit Irrationalis. Vocatur autem iſta recta linea Irrationalis, Media; quia eſt media proportionalis inter duas datas rectas BC, CD, potentiâ ſolùm commenſurabiles, per prop. 17. libr. 6. quotieſcumque enim ſub extremis duabus rectis rectangulo æquale eſt quadratum aliquod, tres lineæ erunt proportionales, mediaque latus quadrati illius.

## COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentiâ tantùm commenſurabiles, Media erit ex mente Euclidis.*

COROL-

### COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Media huiuſmodi linea, ſic definiri poteſt.*

*Eſt media linea proportionalis inter duas alias Rationales potentia ſolum commenſurabiles.*

*Vel cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus.*

### COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Rectangulum ſub duabus lineis Rationalibus potententia tantum commenſurabilibus comprehenſum: Vel Rectangulum ſiue quadratum vel non quadratum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus lineis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento æquale eſt, Medium eſt.*

*Tum quadratum ex Media recta, Medium dici poteſt.*

## LEMMA NOSTRVM I.

### Ad rectam datam applicare rectangulum dato quadrato æquale, facilius quàm per prop. 45. libr. 1.

Fig.175. SVppoſitio. Ad rectam BC ſit applicandum rectangulum dato quadrato ex recta AE æquale.

Conſtructio. Ipſis rectis BC, AE, reperiatur tertia proportionalis CD per propoſ. 11. libr. 6. Dico rectangulum faciendum per lem. 1. ad libr. 2. ſub BC, CD, eſſe applicatum ad rectam BC datam, æquale dato quadrato ex recta AE.

Demonſtratio manifeſta eſt ex propoſ. 17. libr. 6. Nam cùm tres rectæ BC, AE, CD, ſint proportionales, rectangulum ſub extremis BC, CD, factum & applicatum ad datam BC rectam, erit æquale quadrato ex AE media recta. Fecimus ergo imperatum.

## LEMMA NOSTRVM II.

### Inuenire rectam aliquam Mediam definitam in coroll. noſtro 2. prop. 22. præced.

COnſtructio. Per lemma 2. præmiſſum ad hanc prop. 22. reperiantur duæ rectæ lineæ B, C, potentia ſolum commenſurabiles Rationales: & per prop. 13. libr. 3. inter has reperiatur media recta D proportionalis. Dico rectam D eſſe Mediam qua ſitam definitam. Fig.176.

Demonſtratio. Cùm iſtæ tres lineæ B, D, C, ſint per conſtructionem proportionales, erit per prop. 17. libr. 6. rectangulum ſub extremis B, C, æquale quadrato intermediæ D; ſed extremæ B & C ſunt per conſtructionem potentia ſolum commenſurabiles; ergo recta D potens quadratum æquale rectangulo ſub B, C, rectis potentia ſolum commenſurabilibus erit Media per def. prædictam.

Breuius demonſtrabitur Recta D inuenta, Media, hac ratione. Eſt media proportionalis inter duas B, C, potentia ſolum commenſurabiles, ergo per coroll. noſtrum 1. ad prop. cit. 22. erit recta D Media.

## PROPOSITIO XXIII.

### Quod à media fit, ad Rationalem applicatum; latitudinem efficit Rationalem, & ei ad quam applicatum eſt, longitudinem incommenſurabilem.

SVppoſitio. Linea media ſit A, & alia linea BC rationalis, ſiue expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine, aut potentia tantum: & ſit per lemma noſtrum præcedens hanc prop. applicatum rectangulum BD æquale quadrato ex media data A linea, ad rectam BC, vel æquale rectangulo æquali quadrato prædicto ex A linea media; faciat illud rectangulum BD applicatum, latitudinem CD: Dico hanc rectam latitudinis CD, eſſe rationalem, & incommenſurabilem longitudine ei rectæ lineæ BC. Fig.177.

Demonſtratio. Quia recta A Media eſt, ipſa poterit ex natura ſua definita coroll. no-

ſtro 2.prop. præced. rectangulum ſub duabus rectis Rationalibus potētia ſolum commenſurabilibus; v.g. rectangulum EG ſub huiuſmodi rationalibus rectis EF, FG, potentia tantum commenſurabilibus. Et quoniam eadem A Media poteſt ipſum BD rectangulum, erunt per 1.ax.lib.1.æqualia rectangula duo BD, EG; & per prop.14. lib.6. obtinebunt latera circa æquales angulos reciproca; nimirum erit BC ad EF, ſicut FG ad CD: tùm per propoſ.22. libr. eiuſdem 6.erit quadratum ex BC ad quadratum ex EF, ſicut quadratum ex FG ad quadratum ex CD. Dantur rectæ BC, EF, Rationales; ergo ipſæ erunt commenſurabiles inter ſe vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; quare per def. 3. quadratum ex BC, commenſurabile erit quadrato ex EF; & per prop. 10. libri huius, quadratum ex FG erit commenſurabile quadrato ex CD; vnde etiam fit vt rectæ FG, CD, ſint commenſurabiles ſaltem potentia. Igitur quia recta FG Rationalis eſt commenſurabilis expoſitæ lineæ Rationali, ſi ipſa non ſit expoſita Rationalis, erit etiam recta CD expoſitæ Rationali commenſurabilis per prop. 12. libri huius; vnde recta CD erit etiā Rationalis per def.6.quod erat primo propoſitum ac demonſtrandum.

Supereſt vt oſtendamus ipſam eandem rectam CD eſſe incommenſurabilem longitudine rectæ BC. Cùm rectæ EF, FG, ſint Rationales longitudine incommenſurabiles, eo quod ſint ex dictis potentia ſolùm commenſurabiles; & per lemma 3. præmiſſum prop. 20. ſit vt EF ad FG, ſic quadratum ex EF ad rectangulum ſub EF & FG, hoceſt ad rectangulum EG; erit per prop. 10. quadratum ex EF incommenſurabile rectangulo EG, tum etiam rectangulo BD, per prop. 14. nam æqualia ſunt oſtenſa rectāgula BD, EG, ideoque commenſurabilia. Cùm autem rectæ EF, CD, Rationales oſtenſæ ſint, atque ideo ſaltem potentia commenſurabiles; quadratum ex EF erit commenſurabile quadrato ex CD: ſed rectangulum BD eidem quadrato ex EF eſt incommenſurabile oſtenſum; ergo per propoſ.13. quadratum ex CD, erit incommenſurabile rectangulo BD. ſed per lemma 3.cit. præmiſſum ad propoſ. 20.eſt vt quadratum ex CD ad rectangulum BD, ſic recta CD ad rectam BC, ergo per prop.10. erunt incommenſurabiles longitudine rectæ CD, BC. quod erat ſecundo loco propoſitum ac demonſtrandum.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Omne Medium, æquale eſſe poteſt cuidam alteri rectangulo contento ſub duabus lineis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus.*

SI enim per noſtrum lemma præmiſſum ad hanc prop. 23. applicetur ad Rationalem lineam rectangulum æquale illi Medio, efficiet per hanc propoſitionem alterum latus Rationale incommenſurabile longitudine dictæ lineæ Rationali, vnde rectangulum hoc applicatum æquale Medio, erit Medium ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſum. Et ſic omne Medium reduci poterit ad aliud Medium contentum ſub duabus Rationalibus lineis potentia tantum commenſurabilibus.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Omne Medium eſt Irrationale.*

OMne Medium per corollar. præcedens noſtrum eſſe poteſt æquale rectangulo contento ſub duabus lineis Rationalibus, potentia tantum commenſurabilibus; quod per prop.22. eſt Irrationale; ergo omne Medium eſt Irrationale.

## PROPOSITIO XXIV.

### Mediæ commenſurabilis, Media eſt.

SVppoſitio. Lineæ Mediæ A, ſit recta B commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum: Aſſero rectam B eſſe Mediam. Fig.178.

Conſtructio. Eſto linea CD Rationalis expoſita, ad quam per lemma noſtrum præmiſſum ad prop. præced. 23. applicatum rectangulum DE æquale quadrato ex A Media data: ipſum etiam DE rectangulum erit Medium per coroll. noſtrum 3.ad prop.præced. 23. tùm applicetur ad rectam CD Rationalem, rectangulum DF æquale quadrato ex B linea Rationali.

Demonſtratio. Quia DE Medium applicatum ad lineam CD Rationalem, efficit latitudinem CE, erit per prop.præced.23. ipſa CE Rationalis linea, longitudine incommenſura-

menſurabilis ipſi CD. Et quia dantur rectæ A & B commenſurabiles, erunt per coroll. propoſ. 9. quadrata eorum commenſurabilia: Et quoniam per conſtructionem poſuimus rectangulum DE æquale quadrato ex A, & rectangulum DF æquale quadrato ex B; erit in proportione æqualitatis vt quadratum ex A ad rectangulum DE, ita quadratum ex B ad rectangulum DF; & per prop. 16. lib. 5. vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita rectangulum DE ad rectangulum DF: quadratum autem ex A commenſurabile eſt ex oſtenſis quadrato ex B, ergo per prop. 10. rectangulum DE commenſurabile erit rectangulo DF. Sed iuxta 1. propoſ. libr. 6. eſt recta EC ad rectam CF, ſicut rectangulum DE ad rectangulum DF; ergo etiam per cit. propoſ. 10. recta EC erit commenſurabilis longitudine rectæ CF: Verùm antea demonſtrauimus rectam EC eſſe Rationalem & incommenſurabilem ipſi lineæ CD; ergo per prop. 14. recta CF erit longitudine incommenſurabilis ipſi rectæ CD expoſitæ Rationali; vnde ipſa etiam CF erit Rationalis linea per def. 6. Nihilominus cùm rectæ CF, CD, ſint ambæ Rationales, erunt per ipſam def. 6. Saltem commenſurabiles potentia tantum. Et quia recta B poteſt rectangulum DF ſub Rationalibus lineis CF, CD, potentia tantum commenſurabilibus, ipſa Media erit linea, per prop. 22. quod erat concludendum.

## COROLLARIVM.

*Spatium Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſt.*

Fig. 178. Exempli gratia, poſtquam oſtendimus ſpatium DF eſſe commenſurabile ſpatio Medio DE, demonſtrauimus ex hoc ipſum DF ſpatium eſſe ſub Rationalibus lineis potentia tantum commenſurabilibus, CD, CF, contentum; ideoque Medium per coroll. 3. noſtrum propoſit. 22.

## LEMMA I.

Recta linea lineæ Mediæ commenſurabilis dicetur Media, & ipſi commenſurabilis non ſolū longitudine, ſed & potentia. Si verò recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commenſurabilis & longitudine, dicetur & ſic Media, & ipſi commenſurabilis longitudine & potentia.

Quod ſi Mediæ rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic Media, ipſi potentia ſolum commenſurabilis.

In hoc lemmate explicantur & veluti definiuntur diuerſæ lineæ Mediæ, ſeu diuerſi termini linearum Mediarum; quæ reducuntur ad tres ſpecies, ſi comparentur cum alia Media linea definita in corollario noſtro 2. ad propoſ. 22. Prima ſpecies eſt Recta linea Mediæ commenſurabilis, erit vt ſic nuncupata; Media, & ipſi commenſurabilis non ſolum longitudine ſed & potentia. Altera eſt ſi recta linea Mediæ fuerit potentia & longitudine commenſurabilis, vocabitur Media & ipſi commenſurabilis longitudine & potentia. Tertia, Recta linea exiſtens Mediæ commenſurabilis potentia, longitudine tamen eidem incommenſurabilis, hoc eſt potentia ſolum illi commenſurabilis; nuncupabitur vt ſic Media ipſi potentia ſolùm commenſurabilis.

## LEMMA II.

Duas rectas Medias longitudine commenſurabiles: Item duas potentia tantum commenſurabiles inuenire.

Conſtructio. Per lemma noſtrum 3. præmiſſum ad prop. 23. Inueniatur vna recta linea A Media: & per prop. 11. reperiatur recta linea B longitudine commenſurabilis ipſi A Mediæ; & alia recta C, potentia tantum commenſurabilis ipſi A Mediæ eidem. Dico primò rectas A & B eſſe Medias longitudine commenſurabiles; tùm ſecundò rectas A, C, eſſe Medias potentia ſolùm commenſurabiles. Fig. 179

Demonſtratio quod duæ rectæ A, B, ſint Mediæ, tùm etiam A & C, tùm etiam B, C. Per conſtructionem A recta Media eſt, & per conſtructionem B recta eſt commenſurabilis longitudine Mediæ A, & per eandem conſtructionem recta C eſt commenſurabilis po-

tentia tantum Mediæ A; ergo per prop. 24. rectæ B, C, erunt lineæ Mediæ. Præterea per conſtructionem A & B, rectæ, inuentæ ſunt longitudine commẽſurabiles. Denique rectæ A & C, ſunt inuentæ ſolum potentia commenſurabiles: & omnes ſunt Mediæ oſtenſæ; ergo ſicut fuit propoſitum reperimus duas rectas Medias A, B, longitudine commenſurabiles; & duas alias A & C, potentia ſolum commenſurabiles.

## PROPOSITIO XXV.

### Quod ſub Mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

Fig. 180. SVppoſitio. Rectangulum AD comprehendatur ab Mediis AC, CD: Dico illud eſſe Medium.

Conſtructio. Super recta CD, deſcribatur per prop. 46. lib. 1. quadratum DB, quod erit ſpatium Medium, vti probabitur.

Demonſtratio. Per 1. prop. lib. 6. eſt vt recta AC ad rectam CB, ſic rectangulum AD ad quadratum DB: ſed ex datis ſunt rectæ AC, CB, commenſurabiles longitudine, cùm DC, & CB, ſint æquales; ergo per prop. 10. rectangulum AD erit quadrato DB commenſurabile: igitur per coroll. propoſ. 25. præcedentis, rectangulum AD comprehenſum ab Mediis AC, CD, longitudine commenſurabilibus, Medium eſt, quod erat demonſtrandum.

## LEMMA NOSTRVM.

### Ad rectam aliquam lineam applicare rectangulum æquale dato rectangulo, facilius quàm per prop. 45. lib. 1.

Fig. 181. SVppoſitio. Ad rectam AB, applicandum ſit rectangulum AC, æquale dato rectangulo DF.

Cõſtructio. Per prop. 12. lib. 6. Tribus datis rectis AB, DE, EF, reperiatur quarta proportionalis BC: Dico rectangulũ AC, ſub rectis AB, BC, eſſe æquale dato rectangulo DF.

Demonſtratio manifeſta eſt ex propoſ. 16. libr. 6. Cùm enim quatuor ſint lineæ proportionales AB, DE, EF, BC, rectangulum ſub extremis AB, BC, erit æquale rectangulo ſub mediis DE, EF: & ſic applicauimus ad rectam AB, rectangulum AC, æquale dato rectangulo DF.

## PROPOSITIO XXVI.

### Quod ſub Mediis potẽtia tãtum cõmenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; vel Rationale eſt, vel Medium.

SVppoſitio. Rectangulum ſit AC contentum ſub Mediis AB, BC, potentiâ tantum commenſurabilibus. Dico AC vel eſſe Rationale, vel Medium. Fig. 181.

Conſtructio. Per prop. 46. lib. 1. Super AC & CB, deſcribantur propria quadrata AD, CE, quæ etiam Media erunt per coroll. noſtrum 3. ad prop. 22. Præterea exponatur Rationalis FG, ad quam per lemma noſtrum primum ad prop. cit. 22. applicetur rectangulum FH æquale quadrato AD; & ad rectam HI, rectangulum IK æquale rectangulo AC; tùm rectangulum LM, ad rectam KL æquale quadrato CE ex BC deſcripto: erit totum FM, vnum rectangulum, ob angulos omnes rectos in punctis I, L, H, K, factos ab rectis FI, IL, LO, GH, HK, KM, quæ propterea rectas FO, GM, efficient per prop. 14. lib. 1.

Demonſtratio. Quoniam AD, CE, Media ſunt, erunt FH, LM, illis æqualia Media, per coroll. 3. noſtrum ad 22. quæ cùm applicentur ad Rationales FG, KL, (eſt enim KL æqualis ipſi FG per prop. 34. libr. 1. in rectangulo GL, ideoque Rationalis vt FG) efficiantque latitudines GH, KM, erunt per propoſ. 23. GH, KM, Rationales, ipſi FG ſeu KL incommenſurabiles longitudine. Et quoniam rectæ AB, BC, potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt & earum quadrata AD, CE, ideoque ipſis æqualia rectangula FH, LM, commenſurabilia: Sed per 1. prop. lib. 6. vt FH ad LM, ita eſt recta GH ad KM; ergo per 10. prop. GH, KM, ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles, Rationali verò FG ſolum potentiâ commenſurabiles, quandoquidem ei ſunt probatæ longitudine incommenſurabiles; Quare rectangulum ſub ipſis GH, KM, Rationale eſt per 20. prop. & Quia eſt vt DB ad BC, ita AB ad BE, (eo quod DB, BC, ipſis AB, BE, ſint æquales relatiuè) & vt DB ad BC ita AD ad AC per 1. propoſ. lib. 6. & vt AB ad BE, ita AC ad CE, erit per propoſit. 11. libr. 5. etiam vt AD ad AC, ita AC ad CE; ideoque proportionalia erunt AD, AC, CE, & ipſis æqualia FH, HL, LM, etiam

etiam proportionalia per 7.propoſ.lib.5. Sed per propoſ.1.lib.6.rectæ GH, HK, KM, eaſdem rationes quas rectangula FA, HL, LM, ergo & rectæ GH, HK, KM, proportionales erunt: ideoque per prop. 17. libr. 6. rectangulum ſub GH, KM, erit æquale quadrato ſub HK. Oſtendimus autem rectangulum ſub GH, KM, eſſe Rationale, ergo & quadratum ex HK erit etiam Rationale, & recta HK Rationalis, & propterea ipſi FG Rationali expoſitæ, id eſt ipſi HI, commenſurabilis vel longitudine & potentia, vel potentia ſolùm, per defin. 6. Quod ſi HK ipſi HI longitudine ſit commenſurabilis, erit per propoſit. 20. rectangulum ſub Rationalibus HI, HK, longitudine commenſurabilibus contentum, id eſt AC, illi æquale, Rationale. Quod ſi HK ipſi HI, potentiâ ſolum ſit commenſurabilis, erit per propoſit. 23. rectangulum HL ſub Rationalibus HI, HK, potentiâ tantum commenſurabilibus comprehenſum, hoc eſt AC illi æquale, Medium. Igitur AC rectangulum ſub Mediis AB, BC, potentia tantum commenſurabilibus contentum, vel Rationale, vel Medium. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

Fig.182. *Data vna recta FG, & alia quauis recta GM, angulum rectum in G efficientes; ſi applicentur diuerſa rectangula æqualia aliis rectangulis datis, ad FG rectam, vel illi æquales, contenta ſub recta FG vel illi æquali, & ſub alterius GM ſegmentis: iſta omnia rectangula applicata vnum efficient rectangulum.*

HOc oſtendimus in rectangulo FM, applicando rectangula GI, HL, LM, æqualia aliis, ad rectam FG, datam, vel ad æquales IH, LK, ipſi FG rectæ.

## PROPOSITIO XXVII.

### Medium non ſuperat Medium Rationali.

SVppoſitio. AC Medium, excedat AB Medium, rectangulo DB: Dico DB non non eſſe Rationale.

Fig.183. Conſtructio. Poſito ſi fieri poſſit quod DB ſit Rationale. Exponatur Rationalis EF, ad quam applicetur rectangulum EG, Medio AB æquale, per lemma noſtrum 1. vel 3. ad propoſ.22. & Medio AC, rectangulum EH æquale, vt ſit reliquum HI Rationali DB æquale.

Demonſtratio. Erunt per conſtructionem EG, EH, Media æqualia Mediis AB, AC; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quia igitur Media EG, EH, ad Rationalem EF, ſunt applicata, erunt per 23. propoſ tionem, rectæ FG, FH, Rationales, & ipſi EF incommenſurabiles longitudine. Præterea quia Rationale HI applicatum eſt ad Rationalem HK, eſt enim per propoſ.34. lib.1. HK recta æqualis Rationali FG, erit per 21. prop. recta HG; Rationalis, & ipſi EF longitudine commenſurabilis: igitur quia HG, EF, ſunt longitudine commenſurabiles, & EF ipſi FH longitudine incommenſurabilis oſtenſa, erit per propoſit.14. HG eidem FH longitudine incommenſurabilis. Eſt verò per 3. lemma ad prop. 19. vt FB ad HG, ita quadratum ex FH ad rectangulum ſub FH, HG, ergo per prop. 10. quadratum ex FH incommenſurabile eſt rectangulo ſub FH, HG: At quia quadrata ex FH, HG, ſunt rectarum Rationalium, commenſurabilia erunt, & ſimul ſumpta quadrato ex FH erunt etiam commenſurabilia, per 16. propoſ. Et quia rectangulo ſub FH, HG, commenſurabile eſt id quod bis continetur ſub FH, HG, quia hoc eſt illius duplum, ergo per corollar. noſtrum ad prop.14. & duo quadrata ex FH, HG, ſimul incommenſurabilia erunt rectãgulo ſub FH, HG, bis: Igitur per prop.17. & compoſitum ex quadratis rectarum FH, HG, & ex rectangulo bis ſub FH, HG, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum FH, HG. Verùm per 4. prop. lib.2. quadratis ex FH, HG, vnâ cum rectangulo bis ſub FH, HG, æquale eſt quadratum ex FG; ergo & quadratum ex FG, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum FH, HG: Eſt verò compoſitum hoc Rationale, per lemma 4. ad prop. 19. eo quod probatum ſit commenſurabile quadrato Rationali ex FH; ergo cùm huic compoſito quod eſt Rationale, incommenſurabile ſit quadratum ex FG, erit per 10.def. quadratum ex FG, Irrationale, ideoque & recta FG Irrationalis per 11. defin. quod abſonum eſt. Oſtendimus enim FG Rationalem longitudine ipſi EF incommenſurabilem. Nam igitur DB quo Medium AB, ſuperat Medium AC, Rationale eſt, ſicuti fuit propoſitum.

COROLLARIVM.

*Rationale ſuperat Rationale, Rationali.*

Fig.183. Spatio DB excedat AC Rationale, Rationale AB: Dico DB eſſe Rationale. Cùm enim AB, AC, ſint Rationalia, erunt per 9. def. commenſurabilia quadrato Rationalis expoſitæ, ideoque inter ſe commenſurabilia per prop. 12. Igitur cùm totum AB compoſitum ex AC, DB, commenſurabile ſit ipſi AC, erit etiam idem AB reliquo DB commenſurabile per coroll. propoſit. 16. Eſt verò AB, Rationale; ergo & DB erit Rationale, per 4. lemm. ad prop. 9. quod erat oſtendendum.

## PROPOSITIO XXVIII.

Medias inuenire potentiâ tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

Fig.184. Conſtructio. Ponantur per lemm. 2. ad prop. 21. duæ Rationales A, B, potentiâ tantum commenſurabiles, inter quas per prop. 13. libr. 6. ſumatur media proportionalis C; fiatque per 12. prop. eiuſdem libr. 6. vt A ad B, ita C ad D. Dico rectas C, D, eſſe medias potentiâ tantum commenſurabiles.

Demonſtratio. Quia A, B, Rationales ponuntur potentiâ tantum commenſurabiles, erit per prop. 22. rectangulum ſub ipſis contentum Irrationale, quod Medium vocatur; ideoque cùm ipſum poſſit recta C, per prop. 17. lib. 6. poterit rectangulum ſub ipſis C, D, contentum: eſt verò quadratum ex B, Rationali, Rationale; ergo & rectangulum ſub C, D, Rationale eſt. Medias ergo inuenimus propoſitas quæ Rationale comprehendant.

## PROPOSITIO XXIX.

Medias inuenire potentiâ tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant.

Fig.185. Conſtructio. Per lemma 3. ad prop. 21. Exponantur tres Rationales A, B, C, potentiâ tantum commenſurabiles; & per prop. 13. libr. 6. inter A & B, reperiatur media proportionalis D; tum per propoſit. 12. lib. 6. fiat vt B ad C, ita D ad E: Dico D, E, eſſe Medias ſolum potentiâ commenſurabiles, quæ Medium contineant.

Demonſtratio. Quia A, B, Rationales ſunt potentiâ tantum commenſurabiles; erit rectangulum ſub A, B, vel quadratum ex D illi æquale per propoſ. 17. lib. Irrationale per 22. prop. quod Medium dicitur, & ipſa recta Media. Et quoniam eſt B ad C, vt D ad E; & ſunt B, C, Rationales, & potentiâ ſolùm commenſurabiles; prout in prop. 10. oſtendimus, erunt etiam D, E, potentiâ ſolum incommenſurabiles. Cùm igitur D, Media ſit, erit per prop. 14. E. potentiâ ſolùm illi commenſurabilis Media: ideoque D, E, Mediæ ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles. Aſſero autem ipſas cõprehendere Medium. Nam quia eſt vt B ad C, ita D ad E, & iuxta prop. 16. libr. 5. alternando vt B ad D, ita C ad E; Vt verò B ad D, ita D ad A, per conſtructionem; erit etiam vt D ad A, ita C ad E, per prop. 11. lib. 5. Ergo per prop. 16. libr. 6. Rectangulum ſub D, E, æquale erit rectangulo ſub A, C: ſed eſt rectangulum ſub A, C, Rationalibus potentiâ ſolum commenſurabilibus, Irrationale & Medium, per prop. 22. ergo & rectangulum ſub D, E, Medium erit. Et ſic inuenerimus Medias D, E, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ Medium contineant.

## PROPOSITIO XXX.

Inuenire duas Rationales potentiâ tantum commenſurabiles, ita vt maior quàm minor, plus poſsit, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.

Conſtructio. Exponatur linea Rationalis AB; & inueniantur duo numeri quadrati, v. g. 9. & 4, CD, CE, quorum exceſſus DE, 5, non ſit quadratus: Tùm per corollar. propoſit. 6. fiat vt CD 9, ad numerum DE 5; ita quadratum ex AB ad aliud quadratum, nimirum ad id quod ex AF: fiatque circulus circa AB Rationalem expoſitam lineam, tanquam circa diametrum; & per propoſit. 1. libr. 4. accomodetur recta linea AF inuenta in ipſo, ex puncto A, & ducatur recta FB. Dico autem duas rectas AB, AF, potentiâ ſolum eſſe commenſurabiles, & maiorem AB, plus poſſe quadrato rectæ lineæ FB, longitudine ſibi incommenſurabilis quàm minorem AF. Fig.186.

Demon-

Demonſtratio. Per prop.31. libr.3. angulus AFB in ſemicirculo rectus eſt; ergo per prop.47.lib.1.in triangulo rectangulo AFB, quadratum ex AB æquale erit duobus ſimul quadratis ex AF, BF; id eſt recta AB plus poterit quàm AF, quadrato rectæ FB. Et quoniam ex conſtructione quadratum ex AB ad quadratum ex AF, ſe habet, vt numerus ad numerum, CD ad DE; erunt per prop.6. quadrata ex AB, AF, commenſurabilia: quare cùm quadratum ex AB ſit Rationale, vtpote ex Rationali linea; erit & quadratum ex AF Rationale, ideoque & recta AF Rationalis. Igitur Rationales ſunt lineæ AB, AF, & proinde ſaltem potentiâ commenſurabiles. Et quia quadratum ex AB ad quadratum ex AF, non habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, per ipſam conſtructionem; erunt per propoſit. 9. rectæ AB, AF, longitudine incommenſurabiles: ſunt verò oſtenſæ potentiâ commenſurabiles; ergo Rationales lineæ AB, AF, erunt ſolum potentiâ commenſurabiles. Quoniam autem eſt vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex AF, erit per conuerſionem rationis iuxta coroll. propoſ.19. lib.5. vt quadratus numerus CD ad quadratum numerum CE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex FB, (nam ſicut CD ſuperat DE, quadrato CE, ita etiam quadratum ex AB ſuperat quadratum ex AF, quadrato ex FB.) Igitur per 9. prop. rectæ AB, FB, longitudine ſunt commenſurabiles. Reperimus ergo propoſitum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si circa diametrum datam fiat circulus, & accomodetur intra hunc circulum recta aliqua ab extremo diametri: poterit diameter plus quàm accomodata recta, quadrato rectæ alterius nectentis extremum alius diametri, & extremum alius rectæ accomodata: Et ſi diameter fuerit Rationalis, & accomodata quadratum non ſe habuerit ad illius diametri, quadratum, vt numerus quadratus ad numerum quadratum; illæ duæ Rectæ, Diameter, & accomodata erunt Rationales potentia ſolum commenſurabiles.*

## PROPOSITIO XXXI.

Inuenire duas Rationales potentiâ tantum commenſurabiles; ita vt maior quàm minor plus poſsit, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Constructio. Rationalis linea AB, exponatur; & aſſumantur duo numeri CE 9, ED 4, ita vt illis cõpoſitus CED 13, non ſit quadratus; fiat inſuper iuxta coroll. prop. 6. Vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad aliud quadratum, vel ad id quod ex AF; & per propoſ. 1. lib.4. accomodetur AF in circulo facto circa diametrum rectæ AB Rationalis; denique ducatur recta FB. Dico rectas AB, AF habere requiſita huius propoſitionis. Fig.187.

Demonſtratio. Pôterit per coroll. præcedentis propoſ. recta AB pluſquam AF, quadrato rectæ FB; eruntque rectæ AB, AF, Rationales potẽtiâ ſolùm cõmenſurabiles. Quia verò vt in ſuperiore prop. per conuerſionem rationis vt CED, ad CE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex FB; & non habet CED ad CE proportionem quam quadratus numerus ad quadratum per 24. prop.lib.8. non obtinebit etiam quadratum ex AB ad quadratum ex FB, proportionem quadrati numeri ad numerum quadratum: Igitur rectæ AB, FB, erunt longitudine incommenſurabiles per prop. 9. Rectas ergo inuenimus AB, AF, duas Rationales potentiâ tantum commenſurabiles, ita vt maior AB plus poſſit quàm minor AF, quadrato lineæ FB, longitudine incommenſurabilis ſibi. quod erat propoſitum.

## L E M M A.

Si ſint duæ rectæ inæquales; erit vt maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum ad quadratum minoris.

Svppoſitio. Duæ ſint rectæ lineæ AB maior, BC minor: Dico rectangulum ſub ipſis contentum eſſe ad quadratum minoris BC, vt eſt maior AB ad minorem BC. Fig.188.

Conſtructio. Ex aliqua recta AC, detrahantur

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

lineæ ſe mutuò conſequentes, AB, BC, CD, æquales datis tribus eodem ordine; & per 1. lem. noſtrum ad libr. 2. deſcribatur rectangulum AF ſub tota ABCD, & ſub BC media è datis; & per prop. 31. libr. 1. educantur ex B, & C, parallelæ BE, CD; erunt per noſtrum lem. 2. ad lib. cit. rectangula AE, BD, CF; eritque AE rectangulum ſub AB prima & BC ſecunda, tùm rectangulum CF tertia & BC ſecunda; nam per conſtructionem DF eſt æqualis ipſi BC ſecundæ, cui eſt æqualis BE per prop. 34. lib. 1.

Demonſtratio. Per 1. prop. libr. 6. Eſt vt AB prima ad CD tertiam, ita eſt AE rectangulum ſub prima AB & ſecunda BE vel BC, ad rectangulum CF, ſub CD tertia & ſecunda DF vel BC. quod erat probandum.

## PROPOSITIO XXXIII.

Inuenire duas Medias potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ Medium contineant; ita vt maior plus poſſit quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

Fig. 191. Conſtructio. Per prop. 30. inueniantur duæ Rationales A, C, potentiâ ſolùm commenſurabiles, ita vt A plus poſſit quàm C, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis: & per corollarium noſtrum ad prop. 21. inueniatur alia recta B Rationalis, vtrique A & C, potentiâ ſolum commenſurabilis: & per propoſit. 13. libr. 6. Sumatur media proportionalis D inter A & B inuentas: & propoſitis tribus D, B, C, reperiatur quarta E proportionalis per propoſit. 12. libr. 6. Dico rectas D, E, eſſe Medias quæſitas cum conditionibus requiſitis.

Demonſtratio. Per lemma præced. eſt vt A ad C, ita rectangulum ſub A, B, ad rectangulum ſub B, C; eſtque per 17. propoſit. libr. 6. rectangulo ſub A, B, rectangulum ſeu quadratum ex D æquale; & per propoſ. 16. eiuſdem libr. 6. rectangulo ſub B, C, æquale rectangulum ſub D, E; ergo per propoſit. 11. libr. 5. erit vt A ad C, ita quadratum ex D ad rectangulum ſub D, E. Verùm per lemma 3. propoſ. 19. eſt vt quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E, ita recta D ad rectam E; ergo erit vt A ad C, ita D ad E, per prop. 11. lib. 5. Sunt verò A, C, potentiâ ſolùm commenſurabiles, ergo & D, E, erunt potentiâ ſolum commenſurabiles per prop. 10. Quoniam autem per propoſ. 22. D, potens ſpatium ſub A, B, Rationalibus potentiâ ſolum commenſurabilibus, Irrationalis eſt linea, & Media; erit etiam linea E, ipſi probata commenſurabilis, Media: Inuenimus ergo duas rectas Medias D, E, potentiâ ſolum commenſurabiles, quod erat primò propoſitum.

Iam verò quia B, C, ſunt Rationales potentiâ tantum commenſurabiles, erit rectangulum ſub B, C, Medium, per propoſ. 22. & quia rectangulum ſub D, E, æquale eſt oſtenſum rectangulo ſub B, C; erit etiam rectangulum D, E, Medium, quod erat ſecundo loco propoſitum.

Ad hæc, quia probauimus eſſe vt A ad C, ita D ad E; & poteſt A plus quàm C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, iuxta conſtructionem; poterit per 15. prop. etiam D, plus quàm E. quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quod erat tertio loco propoſitum.

## LEMMA I.

Sit triangulum rectangulũ ABC, angulum rectum habẽs BAC, à quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum ſub CB, BD, æquale eſſe quadrato ex AB: contẽtum autem ſub BC, CD, æquale quadrato ex AC: contentum ſub BD, DC, æquale quadrato ex AD: contentum denique ſub BC, AD, æquale contento ſub AB, AC.

Per coroll. prop. 8. lib. 6. & prop. 17. libr. eiuſdem, tres primæ partes huius lemmatis manifeſtæ ſunt. Fig. 192.

Pro vltima parte probanda, ſit conſtructio huiuſmodi. Per lemma noſtrum 1. ad libr. 4. fiat rectangulum CE ſub BC, AD vel æquali BE ipſi AD; & rectangulum AF, ſub AB, AC, quod biſariàm ſecabit BC diameter per prop. 34. lib. 1. Iam vero BAC triangulũ datum, eſt ſemiſſis rectanguli CE, ſub BC, AD, per prop. 41. lib. 1. ergo duplum huius trianguli BAC, videlicet rectãgulum AF, ſub BC, AC, contentum, erit rectangulo illi EC, æquale. quod erat concludendum.

LEMMA

## LEMMA II.

Si recta linea ſecetur in duas partes inæquales; erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.

Fig. 193. SVppoſitio. Recta AB ſecetur in duas partes, maiorem AC, minorem CB. Dico eſſe vt AC ad CB, ita rectangulum ſub AB & AC, ad rectangulum ſub AB & CB.

Conſtructio. Per propoſ. 46. libr. 1. quadratum AD fiat, ex tota AB, & ducatur recta CF parallela ipſi BD, per propoſ. 31. libr. 1. reſultabit per noſtrum lemma 2. ad lib. 4. rectangulum AF, ſub AC & AE vel AB; & rectangulum CD, ſub CB & BD vel AB tota.

Demonſtratio. Per 1. propoſ. libr. 6. eſt vt AC ad CB, ita rectangulum AF ad rectangulum CD; ſed per conſtructionem iſta rectangula ſunt ſub datis rectis; ergo manifeſtum eſt lemma propoſitum.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Eiſdem datis, erit vt minor pars ad maiorem, ita rectangulum ſub tota & minore parte, ad rectangulum ſub tota & maiore parte.*

HOc enim manifeſtum ex oſtenſis, & per conuerſionem rationis, iuxta corollar. prop. 4. libr. 5.

## LEMMA III.

Si ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariàm: erit rectangulum ſub ipſis contentum, duplum rectanguli, quod ſub maiori linea, & dimidia parte minoris continetur.

Fig. 194. SVppoſitio. Duæ ſint datæ rectæ lineæ AB maior, BC minor, & minor BC, bifariàm ſecta in D. Dico rectangulum AB, BC, duplum eſſe rectanguli ſub AB maiore linea, & BD ſemiſſe minoris datæ BC.

Conſtructio. Per lemma noſtrum 1. ad lib. 4. fiat rectangulum AC ex AB, BC, & per propoſ. 31. libr. 1. ducatur recta DE parallela ipſi AC: reſultabit rectangulum BE ex tota AB, & BD dimidia minoris BC.

Demonſtratio. Per 1. propoſit. libr. 6. vt BC dupla eſt ipſius BD, ita rectangulum ſub BC, AB, ad rectangulum ſub BD, AB, duplum erit. quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Eiſdem datis, & maior recta ſecetur bifariàm; erit rectangulum ſub duabus datis inæqualibus contentum, duplum rectanguli quod ſub minore & ſemiſſe maioris.*

EAdem enim conſtructio, & demonſtratio erit.

## PROPOSITIO XXXIV.

Inuenire duas rectas lineas potentiâ incommenſurabiles; quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Medium.

COnſtructio. Per propoſ. 31. reperiantur duæ Rectæ lineæ Rationales, AB, CD, potentiâ ſolum commenſurabiles, ita vt maior AB, plus poſſit quàm minor CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & per propoſit. 10. libr. 1. ſecetur bifariàm in E, recta CD. Tùm per lem. 2. prop. 17. applicetur ad rectam AB, quartæ parti quadrati ex CD, (id eſt quadrato ex CE iuxta propoſ. 20. libr. 6. coroll. noſtrum,) æquale rectangulum deficiens figura quadratâ; ſitque illud quod AF, FB, continetur. Deinde circa AB deſcribatur circulus, cuius ſemiſſis ſit AGB, & per 11. prop. libr. 1. erigatur recta FG perpendicularis ipſi AB, & ſecans circuli facti circumferentiam in G; ducanturque rectæ GA, GB. Dico rectas iſtas AG, GB, eſſe illas quas requirit hæc propoſitio. Fig. 195.

Demonſtratio. Recta AB cùm plus poſſit quàm recta CD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & applicatum eſt ipſi AB, rectangulum ſub AF, FB,

æquale

æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata: erit per propoſ. 19. AF ipſi FB, longitudine incommenſurabilis: Eſt verò per lemma 2. propoſ. anteced. vt AF ad FB, ita rectangulum ſub AB, AF, ad rectangulum ſub AB, FB; rectangulum verò ſub AB, AF, æquale quadrato ex AG; & rectangulum ſub AB, FB, quadrato ex GB æquale, per lem.1.cit. propoſ. (eo quod angulus AGB, ſit rectus per propoſ. 31. libr. 3. ideoque rectangulum AGB rectangulum.) Ergo erit vt AF ad FB, ita quadratum ex AG ad quadratum ex GB, per 7. & 11. propoſ. libr. 5. ſed AF, FB, ſunt longitudine ſibi incommenſurabiles; ergo per propoſit. 10. quadrata ex AG, GB, erunt incommenſurabilia; & per 4. defin. rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles. inuenimus ergo id quod primò propoſitum erat.

Quoniam autem Quadratum Rationali AB, eſt Rationale; & per propoſit. 47. lib. 1. æquale quadratis ſimul, rectarum AG, GB; erit etiam compoſitum ex ipſis quadratis rectarum AG, GB, Rationale: atque ita probata erit prima conditio requiſita inuentarum rectarum AG, GB.

Præterea. quia per 1. lem. propoſit. præced. rectangulum ſub AF, FB, quod æquale eſt factum quadrato ex CE, æquale eſt quadrato ex FG; erunt quadrata ex FG, CE, æqualia, & proinde per corollar. noſtrum 4. ad propoſit. 46. libr. 1. rectæ FG, CE, æquales: cùm ergo CD dupla ſit ipſius CE, erit per 7. propoſit. libr. 5. etiam recta CD dupla ipſius FG. Ergo iuxta lemma 3. propoſit. præced. rectangulum ſub AB, CD, duplum erit rectanguli ſub AB, FG: ſed per propoſ. 22. rectangulum ſub AB, CD, Rationalibus potentiâ tantum commenſurabilibus contentum, eſt Medium; igitur & rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile, cùm eius ſemiſſis, Medium eſt per coroll. propoſ. 24. Sed rectangulo ſub AB, FG, per lem. 1. propoſ. anteced. eſt æquale rectangulum ſub AG, GB: ergo rectangulum ſub GB, AB, Medium erit: quæ erat ſecunda conditio demonſtranda, inuentarum duarum rectarum. Atque propoſitum impleuerimus ac demonſtrauerimus.

## LEMMA NOSTRVM I.

### Fieri poteſt, vt duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale.

Conſtructio. Rationalis recta AB exponatur; & duo numeri C 6, D 4, aſſumantur, quorum maior habeat rationem ad minorem quam quadratus numerus ad numerum quadratum: fiatque vt C ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & per propoſ. 46, libr. 1. ſuper AB deſcribatur AG quadratum; & ex puncto E educatur recta EF parallela lateri BG quadrati; & reſultabit rectangulum AF, ex tota AB, & AE partæ rectæ AB; & BF aliud rectangulum ex tota AB, & parte eius EB. Dico ſpatia AF, BF, eſſe Irrationalia & componere ſpatium AG. Rationale. *Fig.196.*

Demonſtratio. Cùm ſit vt C ad D, ita quadratum ex AB ad quadratum ex AE; & non ſit C ad D, vt numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt per propoſit. 9. latera AB, AE, dictorum quadratorum non habentium proportionem vt numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine incommenſurabilia: Quare cùm tota AB, longitudine ſit incommenſurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB longitudine incommenſurabilis per coroll. prop. 17. Sed per propoſit. 1. libr. 6. eſt vt AB ad AE, ita quadratum ex AB, ad rectangulum AF; ergo cùm AB, AE ſint incommenſurabiles longitudine, erunt incommenſurabilia quadratum ex AB, & rectangulum AF, per 10. propoſit. Igitur quadrato ex AB exiſtente Rationali, eo quod AB poſita ſit Rationalis, erit AF ſpatium dicto quadrato incommenſurabile, Irrationale, per definit. 10. Eodem diſcurſu probabitur ſpatium BF, eſſe Irrationale. Ergo quia AF, BF, ſunt Irrationalia, & componunt quadratum ex AB, manifeſtum eſt propoſitum.

LEMMA

## LEMMA NOSTRVM I I.

### Fieri poteſt, vt duo ſpatia Rationalia, componant ſpatium Rationale.

Fig. 196 SInt AF, FB, Rationalia ſpatia componentia quadratum ex AB: Dico quadratum ex AB compoſitum ex illis ſpatiis duobus Rationalibus eſſe Rationale.

Demonſtratio. Cùm dentur AF, FB, Rationalia ſpatia, erunt inter ſe commenſurabilia, per 12. prop. cùm ſint Quadrato alicui Rationali commenſurabilia diſiunctiuè, iuxta def. 9. erit per prop. 16. & totum quadratum ex AB compoſitum ex ipſis AF, FB, vtrique eorum commenſurabile: ergo etiam quadratum ex AB erit Rationale per citat. definit. 9.

## PROPOSITIO XXXV.

### Inuenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles; quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarũ quadratis Medium; Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Rationale.

Fig. 195. COnſtructio. Conſule figuram propoſ. præced. 34. Inquire per prop. 32. duas Medias AB, CD, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior earum AB, plus poſſit quàm minor CD, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis: In ſumma aſſumantur reliqua conſtructionis ad propoſ. 34. cit. erunt AG, GB, lineæ quæſitæ.

Demonſtratio. Simili artificio quo in illa propoſ. præced. probauimus rectas AG, GB, potentiâ eſſe incommenſurabiles. Tùm quia quadratum ex AB Media; cùm ſit æquale quadratis rectarum AG, GB, per prop. 47. libr. 1. Medium eſt, erit quoque compoſitum ex illis, etiam Medium, vti ibidem oſtendimus. Eodem modo vt in cit. prop. probabimus rectangulum ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB, FG; ideoque eſſe incommenſurabilia. Igitur quandoquidem rectangulum ſub AB, CD, ſit per conſtructionem, Rationale, erit & Rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile, etiam Rationale. Verùm per lem. 1. prop. 33. rectangulo ſub AB, FG, eſt æquale rectangulum ſub AG, GB, ergo & Rectangulum ſub AG, GB, erit Rationale. Oſtendimus autem compoſitum ex quadratis ipſarum AG, GB, eſſe Medium; ergo duæ rectæ AG, GB, probatæ potentiâ incommenſurabiles, efficiunt compoſitum ex earum quadratis, Medium; & rectangulum ſub eiſdem, Rationale. quod erat imperatum.

## PROPOSITIO XXXVI.

### Inuenire duas rectas lineas potentiâ incõmenſurabiles; quæ faciant compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis.

COnſtructio. Conſulatur figura propoſ. 34. Duæ rectæ lineæ Mediæ AB, CD, reperiantur potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior AB, plus poſſit quàm minor CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, idque per prop. 33. Demum aſſumantur reliqua conſtructionis ad propoſ. 34. Dico rectas AG, GB, eſſe rectas quæſitas. Fig. 195.

Demonſtratio. Vt in cit. prop. 34. probabimus rectas AG, GB, eſſe potentia incommenſurabiles. Verùm quia quadratum ex AB Media, eſt Medium; & per 47. prop. lib. 1. quadratis rectarum AG, GB, æquale; erit & compoſitum ex illis quadratis rectarum AG, GB, Medium. Simili modo vti in cit. prop. oſtendemus rectangulum ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB, FG, ideoque eſſe inter ſe commenſurabilia iſta duo rectangula. Igitur quia ex conſtructione rectangulum ſub AB, CD, Medium eſt, erit etiam rectangulum ſub AB, FG, etiam Medium; & rectangulum ſub AG, GB, æquale prædicto ſub AB, FG, per 1. lem. propoſ. 33. etiam Medium, per coroll. prop. 24. Quia autem recta AB eſt longitudine incommenſurabilis ipſi CD, & eidem CD eſt CE longitudine commenſurabilis, vtpote ſubdupla; erunt per prop. 13. AB, CE, longitudine incommen-

commenſurabiles: verum vt AB ad CE, ita eſt per lemm. 3. prop. 19. quadratum ex AB ad rectangulum ſub AB, CE, hoc eſt ad rectangulum ſub AB,FG, hoc eſt ſub AG,GB, (ſunt enim rectangula ſub AB,FG,ſub AG, GB, æqualia per lemm.1.prop.33.) Ergo per 10. prop. quadratum ex AB incommenſurabile erit rectangulo ſub AG, GB. Fecimus ergo imperatum.

## LEMMA NOSTRVM.

### Inuenire duas Medias longitudine & potentiâ incommenſurabiles.

Fig.195. QVia probauimus tàm compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum ſub ipſis eſſe Medium, & hoc illi compoſito incommenſurabile; erunt etiam lineæ potentes illud Medium compoſitum,& hoc rectangulum Medium, Mediæ incommenſurabiles tàm longitudine, quàm potentia. Nam ſi potentiâ commenſurabiles eſſent, etiam earum quadrata ſimul, hoc eſt compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum ſub AG, GB, commenſurabilia, contra hypotheſim. Quare ſi ſumatur AB, potens compoſitum ex quadratis AG,GB,& alia recta potens rectangulum ſub AG, GB, id eſt media proportionalis inter AG, GB; inuentæ erunt duæ Mediæ, & longitudine & potentia incommenſurabiles. primum autem reperiemus per lemma propoſ. 14. ſecundum vero per prop.13. lib.6. nam quadratum huius erit æquale rectangulo ſub AG, GB. Fecimus ergo imperatum.

Notandum eſt, ſequentes propoſitiones vſque ad 4. agere da diuerſis lineis Irrationalibus, ortum ſumentes per comparationem, quas ad diſtinctionem aliarum multarum,peculiaribus vocabulis denominabit, ita vt ſint veluti definitiones.

## PROPOSITIO XXXVII.

### Si duæ Rationales potentiâ tantum commenſurabiles componantur;tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

Fig.197. SVppoſitio & cōſtructio. Datæ duæ Rationales AB,BC,potentiâ ſolum commenſurabiles, ſint compoſitæ in vna recta ABC Dico totam AC, eſſe Irrationalem, quam vocat Euclides ex binis nominibus, quaſi ſingulæ illa componentes eſſent eius partes, maior & minor; quas tamen nomina vocat, ad definitionem rectæ diuiſæ extrema & media ratione in duas partes,maiorem & minorem. hoc igitur deinceps intelligatur.

Demonſtratio. Cùm detur AB longitudine incommenſurabilis ipſi BC;& ſit per lemma propoſ.31.vt AB ad BC,ita rectangulum ſub AB,BC, ad quadratum BC;erit per 10. prop.rectangulum ſub AB, BC, quadrato ex BC incommenſurabile: ſed rectangulo ſub AB, BC, eſt commenſurabile eius duplum, nimirum quod bis continetur ſub AB,BC;& quadrato ex BC, eſt commenſurabile rectæ AB, (ſunt enim Rationalia) ideoque per propoſ.16.& compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, eidem quadrato ex BC, eſt commenſurabile: ergo per prop. 14. & quod bis continetur ſub AB, BC, erit incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarū AB, BC. Cùm autem per prop.4. libr.2. quadratum ex tota AC, ſit æquale quadratis rectarum AB, BC, & rectangulo bis ſub AB, BC; erit cōpoſitum ex eo quod bis ſub AB,BC,& ex cōpoſito quadratorum rectarum AB, BC, id eſt quadratum totius AC, compoſito ex quadratis AB, BC rectarum, incommenſurabile erit per prop.17. Eſt verò compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC, Rationale, cùm ſit probatum commenſurabile quadrato Rationali ex BC, iuxta def. 9. Ergo quadratum ex AC, quadrato Rationali ex BC, incommenſurabile, erit per def. 10. Irrationale; vnde & recta AC Irrationalis erit per defin.11. Vocetur autem iuxta Euclidis mentem, huiuſmodi linea AC Irrationalis, compoſita ex duabus Rationalibus potentiâ ſolum commenſurabilibus; ex binis nominibus, ſeu vt alij Commentatores volunt Binomium,quia ex duabus Rationalibus lineis potētiâ ſolum cōmenſurabilibus; veluti ex duobus nominibus componitur. Demonſtrauimus ergo propoſitum,& explicauimus quid ſit Irrationalis linea,vocata ex binis nominibus,vel binomiū.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Ex duabus Rationalibus potentiâ ſolum commenſurabilibus, procreantur duæ lineæ Irrationales.*

NImirum Binomium,ſeu ex binis nominibus, per iſtam propoſ. 37. & Media, per prop.22. ſi media proportionalis reperiatur inter duas datas Rationales potentia ſolum commenſurabiles reperiatur per prop. 13. libr. 6.

## PROPOSITIO XXXVIII.

Si duæ Mediæ potentiâ tantum commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

Fig.197. SVppoſitio & conſtructio. Datæ ſint duæ Mediæ AB, BC, in vnam rectam AC compoſitæ, ſintque illæ duæ potentiâ tantum commenſurabiles. Dico totam AC eſſe Irrationalem; & vocandam ex binis Mediis primam, vel vt alij Interpretes volunt Bimediale prius aut primum.

Demonſtratio. Per propoſ. 31. lemm. 1. eſt AB ad BC, vt rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex BC; ſuntque AB, BC, longitudine incommenſurabiles ex datis: ergo per 10. prop. rectangulum ſub AB, BC, & quadratum BC, erunt incommenſurabilia. Verum cùm AB, BC, ſint potentiâ commenſurabiles ex datis, erunt ipſarum quadrata commenſurabilia; ideoque & per propoſ. 16. compoſitum ex ipſarum quadratis, commenſurabile erit quadrato ex BC: ergo rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt quod ſub AB, BC, bis; & quadrato ex BC eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC. Igitur & rectangulum ſub AB, BC, bis, & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabilia erunt, per prop. 14. Ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & ſimul rectangulum bis ſub AB, BC, id eſt quadratum ex AC, quod per 4. prop. libr. 2. huic compoſito eſt æquale, incommenſurabile etiam erit rectangulo ſub AB, BC, bis, per 7. propoſ. Eſt vero eidem rectangulo bis ſub AB, BC, commenſurabile rectangulum ſemel ſub AB, BC; ergo per prop. 13. quadratum ex AC, incommenſurabile erit rectangulo ſub AB, BC. Datur verò rectangulum ſub AB, BC, Rationale; igitur per 10. prop. quadratum ex AC, erit Irrationale; & recta AC, Irrationalis per defin. 11. Vocetur verò ex binis Mediis prima, vel vt alij volunt Bimediale primum. Demonſtrauimus ergo propoſitum.

## LEMMA.

Quod ſub linea Rationali, & Irrationali, continetur Rectangulum; Irrationale eſt.

SVppoſitio. Rectangulum DB, contentum ſit ſub linea AB Rationali, & Irrationali BC. Dico ipſum eſſe Irrationale. Fig.198.

Demonſtratio. Nam ſi fuerit Rationale, ipſum efficiet ad Rationale AB, applicatum, latitudinem BC Rationalem, iuxta propoſ. 21. hoc vero abſurdum eſt, cùm ponatur BC Irrationalis. ergo rectangulum DB non Rationale, ſed Irrationale, quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XXXIX.

Si duæ Mediæ potentiâ tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda.

SVppoſitio. Datæ duæ Mediæ AB, BC, potentiâ tantum commenſurabiles, ſint compoſitæ in vnam totalem AC, cõtineantque Medium: Dico totam AC eſſe Irrationalem, quam vocat Euclides ex binis Mediis ſecundam, vel eius Interpretes nonnulli, Bimediale ſecundum. Fig.199.

Conſtructio. Exponatur enim Rationalis DE, ad quam per lemma noſtrum 1. propoſ. 22. applicetur Rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; & compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, æquale alterum DG, applicetur ad eandem DE.

Demonſtratio. Per 4. propoſ. libr. 2. Cùm quadratum ex AC, ſit æquale quadratis rectarum AB, BC, & rectangulo bis ſub eiſdem BC, AB; erit reliquum HF, reliquo rectangulo quod bis ſub AB, BC, continetur. Quia autem per ſuppoſitionem rectangulum ſub AB, BC, Medium eſt; erit rectangulum bis ſub AB, BC, ei cõmenſurabile, hoc HF Medium, per coroll. prop. 24. Inſuper quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commenſurabilium, commenſurabilia ſunt, erit per propoſ. 16. compoſitum ex illis, videlicet rectangulum DG, vtriuis ipſorum commenſurabile: at vtrumque quadratorum ex Mediis AB, BC, Medium eſt; ergo per corollar. cit.

prop.

propoſ. 24. & DG Medium erit. Cùm verò per prop. 34. libr. 1. recta GH, ſit æqualis Rationali DE, & Media DG, HF, applicentur ad Rationalem DE, erunt per prop. 23. eorum latitudines EG, GF, Rationales, ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Prætereà quoniam AB, BC, longitudine incommenſurabiles ſunt; eſtque per lemma 3. prop. 19. vt AB ad CB, ita quadratum ex AB ad rectangulum ſub AB, BC, erit quadratum ex AB incommenſurabile rectangulo ſub AB, BC, per propoſit. 10. Sed quadrato ex AB eſt probatum commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & ex eo quod continetur bis ſub AB, BC, rectangulo; ergo per prop. 14. erit & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, id eſt rectangulum DG, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC, nimirum rectangulo HF. Cùm igitur per 1. prop. libr. 6. ſit vt DG ad HF, ita EG ad GF, erit per prop. 10. EG ipſi GF, longitudine incommenſurabilis. Probatæ verò ſunt ipſæ EG, GF, Rationales: Rationales ergo EG, GF, potentia erunt ſolum commenſurabiles; ideoque per prop. 37. tota compoſita EF, Irrationalis erit: & proinde per lemma præcedens, DF contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, erit Irrationale; ideoque etiam & quadratum ex AC, ipſi DF æquale, erit Irrationale. Igitur recta AC erit per defin. 11. Irrationalis. Vocetur autem ex Euclide, ex Mediis ſecunda, vel vt aliis arridet Bimediale ſecundum. Demonſtrauimus ergo propoſitum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Appoſitè huiuſmodi Recta vocatur ex binis Mediis ſecunda, & alia præcedens ex binis Mediis prima. quia Rationale eſt prius naturâ & origine quàm Medium.*

## LEMMA.

Si recta linea non bifariàm ſecetur; erit compoſitum ex quadratis partium maius quàm rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem ſuperat.

Fig.100. SVppoſitio. Secta ſit recta AD in B, non bifariàm, ſitque maior AB, quàm BD; & ſumatur per 3. prop. lib. 1. recta BC æqualis minori BD; erit AC exceſſus maioris AB, ſupra minorem BD: Dico quadrato rectarum AB, BD, ſimul ſumpta eſſe maiora rectangulo bis ſub AB, BD, quadrato rectæ AC.

Demonſtratio. Per 7. prop. lib. 2. cùm quadrata ex AB, BC, æqualia ſint rectangulo bis ſub AB, BC, & ſimul quadrato ex AC, eſtque BC æqualis ipſi BD; erunt etiam quadrata rectarum ex AB, BD, æqualia rectangulo bis ſub AB, BD, & quadrato ſimul ex AC. Igitur quadrata rectarum AD, BD, maiora ſunt rectangulo bis ſub AB, BD, quadrato rectæ AC. quod erat propoſitum.

## COROLLARIVM.

*Secta linea recta non bifariàm: quadrata partium inæqualium ſimul ſumpta, ſimpliciter ſunt maiora rectangulo bis contento ſub partibus illis inæqualibus.*

OStendimus enim illa quadrata eſſe maiora illo rectangulo bis ſumpto, quadrato lineæ exceſſus maioris partis ſupra minorem; ergo ſimpliciter erunt maiora dicto rectangulo bis ſumpto.

## PROPOSITIO XL.

Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem, Maior.

SVppoſitio. Compoſitæ ſint in vnam rectam AC, duæ rectæ lineæ AB, BC, potentiâ incommenſurabiles, efficientes compoſitum ex ipſarum quadratis, Rationale; & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium. Dico totam rectam AC, eſſe Irrationalem, vocandam ex mente Euclidis Maiorem. Fig.197.

Demonſtratio. Quia rectangulum ſub AB, BC, datur Medium, erit per coroll. propoſ. 24. rectangulum bis ſub AB, BC, illi commenſurabile, Medium; ideoque Irrationale. Datur verò compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale; ergo per 10.

10. def. erit incommenſurabile rectangulum bis ſub AB, BC, compoſito ex quadratis rectarum AB, BC: Igitur per prop. 17. & rectangulum bis ſub AB, BC, vnà cum quadratis rectarum AB, BC, id eſt quadratum ex AC iuxta prop. 4. libr. 2. incommenſurabile erit compoſito ex quadratis rectarum AB, BC: ſed ponitur hoc compoſitum, Rationale, erit ergo per 10. defin. quadratum ex AC, illi incommẽſurabile, Irrationale: ideoque per def. 11. recta AC, Irrationalis. Denominetur autem Maior, quia cùm poſſit quadrata duo quadrata ex AB, BC, & rectangulum bis ſub AB, BC, compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, maius eſt rectangulo bis ſub AB, BC, per coroll. lemmatis præcedentis. Cumque compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale ſit, rectangulum verò bis ſub AB, BC, Medium; recta vocabitur AC Maior, quia ab Rationali quod maius eſt, nomen conuenit attribuere. Probauimus ergo propoſitum.

## PROPOSITIO XLI.

Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles componantur; quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea erit Irrationalis.

Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

Fig. 197. SVppoſitio. In vnam rectam AC, compoſitæ ſint duæ rectæ lineæ AB, BC, potentiâ incommenſurabiles, efficientes compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; & rectangulum ſub ipſis Rationale. Dico totam rectam AC eſſe Irrationalem, nuncupandam, Rationale ac Medium potens.

Demonſtratio. Quia compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, datur Medium; & quod continetur ſub eiſdem rectis bis, datur Rationale, quod eius dimidium nempe quod continetur ſemel ſub AB, BC, Rationale detur; erit per def. 10. compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC: ergo per prop. 17. & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, vnà cum rectangulo bis ſub AB, BC, id eſt iuxta prop. 4. lib. 2. quadratum rectæ AC, incommenſurabile erit rectangulo bis ſub AB, BC. Quandoquidem igitur rectangulum bis ſub AB, BC, ſit Rationale, erit per 10. defin. quadratum ex AC, illi incommenſurabile, Irrationale; & per defin. 11. recta AC, Irrationalis. Vocabitur autem Rationale ac Medium potens; quia poteſt Medium nempe compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC; & Rationale, id eſt rectangulum bis ſub BC, AB. conuenit verò Rationale anteponi Irrationali. Demonſtrauimus ergo & explicauimus propoſitum.

## PROPOSITIO XLII.

Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit.

Vocetur autem bina Media potens.

SVppoſitio. Duæ rectæ lineæ AB, BC, potentia incommenſurabiles ſint vnam AC compoſitæ, faciantque compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem Medium, & incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum: Dico totam AC eſſe Irrationalem, quæ vocanda ſit bina Media potens. Fig. 199.

Conſtructio. Ad expoſitam Rationalem DE, applicetur rectãgulum DF æquale quadrato ex AC. per lemma noſtrum 1. prop. 22. & compoſito ex quadratis ipſarum rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG, per idem cit. lemma.

Demonſtratio. Quandoquidem per 4. propoſ. lib. 2. quadratum ex AC, eſt æquale quadratis partium AB, BC, & rectangulo bis ſub AB, BC; & rectangulum DF æquale eſt quadrato ex AC, per conſtructionem; erit per 7. prop. lib. 5. rectangulum DF æquale compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulo bis ſub AB, BC; & per conſtructionem rectangulum DG æquale eſt compoſito ex quadratis ipſarum AB, BC: ſi ex toto DF, dematur rectangulum DG, erit reliquum HF æquale rectangulo bis ſub AB, BC. Quia verò tàm compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC,

AB, BC, id eſt rectangulum DG, quàm rectangulum ſub AB, BC, ideoque per coroll. prop. 24. quod bis continetur ſub AB, BC, id eſt ipſum HF, ( cùm illi ſit commenſurabile ) Medium datur; efficient per 23. propoſ. DG, HF, ad Rationalem DE, applicata, latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE longitudine incommenſurabiles. Inſuper quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc eſt rectãgulum DG ponitur incommenſurabile rectangulo ſub AB, BC; & eidem rectangulo cõmenſurabile eſt ipſius duplum, videlicet quod bis continetur ſub AB, BC, videlicet ipſum HF; erunt per prop. 13. DG, HF, incommenſurabilia. Igitur per 1. prop. libr. 6. quia eſt vt DG ad HF, ita EG ad GF; erunt per 10. prop. rectæ EG, GF, longitudine incommenſurabiles: ſed EG, GF, probatæ ſunt Rationales; igitur EG, GF, Rationales, ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ideoque iuxta propoſit. 37. tota EF ex ipſis compoſita erit Irrationalis. Proindeque DF contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, erit per lemma prop. 38. Irrationale: ergo & quadratum ex AC illi æquale, etiam erit Irrationale; & per 11. def. recta AC erit Irrationalis. Vocanda verò eſt hæc recta AC Irrationalis ex mente Euclidis, bina Media potens, videlicet compoſitum ex quadratis partium eius AB, BC, & rectangulum bis ſub AB, BC. Demonſtratum igitur erit intentum.

## L E M M A.

### Si recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales: erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualium ſimul.

Fig. 201. SVppoſitio. Secta ſit in C inæqualiter recta AB, iterumque inæqualiter in D; ſintque priores partes AC, CB, magis inæquales, quàm poſteriores AD, DB: Dico quod ſimul ſumpta quadrata rectarum AB, BC, ſint maiora ſimul quadratis rectarum AD, DB.

Conſtructio. Per prop. 10. libr. 1. ſecetur data AB recta, biſariàm in E; cadet punctum E medium, vel inter A & D, vel inter D & B.

Demonſtratio. Poſito quod E cadat inter A & D. Cùm per 5. prop. libr. 2. rectangulum ſub AC, CB, vnà cum quadrato EC, ſit æquale quadrato ex EB; tùm rectangulum ſub AD, DB, vnà cum quadrato ED, æquale ſit quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato rectæ EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, vna cum quadrato rectæ ED, per 1. axio. lib. 1. quod ſi ex his æqualibus tollamus inæqualia quadrata, rectarum inæqualium EC maioris, ED minoris; remanebit rectangulum ſub AC, CB, minus rectangulo ſub AD, DB: ideoque per prop. 15. lib. 5. rectangulum bis ſub AC, CB, etiam minus erit rectangulo bis ſub AD, DB. Iam verò quia per 4. prop. libr. 2. quadratum ex AB, æquale eſt quadratis rectarum AC, CB, & rectangulo bis ſub AC, CB; tùm etiam quadratis rectarum AD, DB, & rectangulo bis ſub AD, DB; erunt per 1. ax. libr. 1. vel 9. prop. libr. 5. erit rectangulum ſub AC, CB, bis, vnà cum quadratis rectarum AC, CB, æquale rectangulo bis ſuo AD, DB, vnà cum quadratis rectarum AD, DB: ex primo ergo ſi demamus rectangulum bis ſub AC, CB, & ex ſecundo rectangulum ſub AD, DB; quia illud rectangulum bis ſub AC, CB, oſtenſum eſt minus rectangulo bis ſub AD, DB; relinquentur quadrata rectarum AC, CB, maiora ſimul, quadratis ſimul ſumptis rectarum AD, DB. quod erat concludendum in hoc caſu primo.

Demonſtratio ſecundi caſus. Dantur partes AC, CB, magis inæquales, quàm partes AD, DB; ergo AD minor poſteriorum maior quam CB minor priorum; quare cum AE, EB ſint æquales per conſtructionem, erit reliqua EC maior quàm reliqua DE. Præterea per prop. 5. lib. 2. quia rectangulum ſub AC, CB, vnà cum quadrato rectæ EC, æquale eſt quadrato rectæ EB; tùm etiam rectangulum ſub AD, DB, vnà cum quadrato rectæ DE, æquale eſt quadrato rectæ EB; erit per prop. 7. lib. 5. vel 1. axio. libr. 1. rectangulum ſub AC, CB, vnà cum quadrato rectæ EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, vnà cum quadrato rectæ DE. quare vti in prima, ex eiſdem principiis reliqua concludemus.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Eiſdem poſitis quæ in lemmate. Rectangulum ſub magis inæqualibus partibus minus erit rectangulo ſub partibus minus inæqualibus.*

## PROPOSITIO LXIII.

### Quæ ex binis nominibus, ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in Nomina.

Fig.202. SVppoſitio. Data ſit Irrationalis linea AB, ex binis nominibus, ſeu Binomium, diuiſa in puncto C, in ſua nomina, hoc eſt in partes ſuas AC, CB, Rationales, potentiâ tantum commenſurabiles, iuxta propoſ. 37. Dico hanc rectam AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina ſeu partes quæ ſcilicet ſint Rationales potentiâ tantum commenſurabiles.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit, diuidatur iterum in puncto D in ſua nomina. Primum certum eſt non diuidi in puncto C, bifariàm; & neque in puncto D etiam bifariàm; nam ſic AC, CB, vel AD, DB, eſſent longitudine commenſurabiles, cōtra ſuppoſitionem; debent enim eſſe partes eius ſeu nomina, potentia tantum commenſurabiles. Secabitur ergo recta AB binomium, tàm in C, quàm in D, inæqualiter; ideoque partes AC, CB, vel minus inæquales ſunt, vel magis inæquales, reſpectu partium AD, DB: quare per lemm.præced. quadrata ex AC, CB, vel minora ſunt ſimul, quadratis ſimul rectarum AD, DB, vel maiora: (partes enim AD, DB, partibus AC, CB, æquales eſſe nequeunt, vtraque vtrique, maior minori, minor minori; nam ſic ſecaretur AC Binomium in eadem nomina, contra ſuppoſitionem.) Ergo ſi ab æqualibus inæqualia detrahantur, eſt exceſſus reſiduorum æqualis exceſſui ablatorum, per ax. 16. libr. 1. Et quadrata ex AC, CB, vnâ cum rectangulo bis ſub AC, CB, æqualia ſunt quadratis ex AD, BD, vnâ cum rectangulo bis ſub AD, DB, per 1. ax. lib. 1. eo quod per 4. prop. libr. 2. ſint æqualia quadrato ex AC: ſit vt qui exceſſus fuerit ablati compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, idem planè ſit reliqui rectanguli bis ſub AC, CB, & reliqui rectanguli ſub AD, DB: Verùm cùm rectæ AC, CB, Rationales ſint & ob id earum quadrata Rationalia; erit & compoſitum ex earum quadratis Rationale per lemma noſtrum 2. ad prop. 34. igitur cùm Rationale ſuperet Rationale Rationali, per coroll. prop. 27. patet exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, eſſe ſpatium Rationale. Exceſſus igitur rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium erit Rationale. Sed per prop. 22. rectangulum ſub AC, CB, Medium eſt; ergo & quod bis continetur ſub AC, CB, illi commenſurabile, per coroll. propoſ. 24. Medium erit. Simili diſcurſu rectangulum bis ſub AD, DB, Medium eſſe concludetur. Quare per propoſ. 27. quandoquidem Medium non ſuperat Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale, quod oſtenſum eſt eſſe Rationale. Pugnantia ergo cùm ſequantur ex poſitione aduerſarij contradicente aſſertioni huius propoſitionis; poſitio illa falſa erit, & aſſertio huius propoſitionis vera.

## PROPOSITIO XLIV.

### Quæ ex binis Mediis prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SVppoſitio. Diuiſa ſit in C, Recta AB ex binis Mediis prima, ſeu Bimediale primum, in ſua nomina vel partes AC, CB, quæ ſint Mediæ potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, iuxta propoſ. 38. Dico rectam AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe in ſua nomina ſeu partes, quæ ſint etiam ſingulæ Mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles, & Rationale continentes. Fig.202.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit, diuiſa in D, in alia nomina AD, DB. Ex eiſdem principiis, vt in præcedenti propoſitione, demonſtrabimus exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti rectarum AD, DB. Verùm exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eſt ſpatium Rationale, vti nunc oſtendemus ſic; AC, CB, dantur cōtinere Rationale, erit id quod continetur bis ſub AC, CB, ei quod continetur ſub AC, CB, commenſurabile, Rationale: Eodéque artificio Rationale erit quod continetur bis ſub AD, DB: quare cùm per coroll. propoſ. 27. Rationale ſuperet Rationali, Rationale, erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale. Igitur exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium erit Rationale. Cùm autem rectæ AC, CB, Mediæ ſint potentiâ tantum commenſurabiles, erunt earum quadrata Media & commenſurabilia:

igitur per prop. 16. cõpoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit; ergo cùm vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis Medium per coroll.prop.24. Ex eiſdem principiis probabimus compoſitum ex quadratis rectarum AD, DB, eſſe Medium. Sed per prop. 27. Medium ooo ſuperat Medium Rationali; ergo exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti rectarum AD, DB, non erit ſpatium Rationale, contra conceſſa. Cùm ergo pugnantia ſequantur ex poſitione aduerſarij contradicente huic propoſitioni, falſa erit illa poſitio, & propoſitio vera ac demonſtata.

## PROPOSITIO XLV.

### Quæ ex binis Mediis ſecunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Fig.205. SVppoſitio. Diuiſa ſit in C, recta AB ex binis Mediis ſecunda, vel bimediale ſecundum, in ſua oomina ſeu partes AC, CB, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ Medium cõtineant, iuxta prop.39. Dico rectam AB, non poſſe diuidi in aliud punctum in alia diuerſa nomina, quæ ſint lineæ Mediæ poteotiâ tantum commenſurabiles, & Medium continentes.

Conſtructio. Eſto ſi fieri poſſit diuidatur Bimediale ſecundum AB, in D aliud punctum ab C, in ſua nomina ſeu partes prædictas cooditiones retinentes: oſtendemus vt in propoſ.43. quadrata ex AC, CB, maiora eſſe quadratis rectarum AD, DB; vel minora. Præterea ſumpta EF Rationali, ad eam applicetur rectangulum EG æquale quadrato ex AB, per noſtrum lemma 1.propoſ.22. item aliud rectangulum EH æquale compoſito ex quadratis rectarum AC, CB: tunc reliquum IG æquale erit ei quod continetur bis ſub AC, CB, rectangulo; (quia per 4. propoſ.libr.2. quadratum ex AB, æquale eſt quadratis rectarum AC, CB, & rectangulo bis ſub AC, CB.) Simili ratione ſi ad EF applicetur rectangulum EK, æquale quadratis rectarum AD, DB, æquale erit reliquum LG, rectangulo bis ſub AD, DB. Et quoniam per lemm.propoſ.42.quadrata ex AC, CB, inæqualia ſunt quadratis rectarum AD, DB; erunt etiam rectangula EH, EK; illis æqualia, inæqualia; ideoque rectæ FH, FK, inæquales erunt. Præterea cùm quadrata ex AC, CB maiora ſint per lemmatis prop. 39. coroll. rectangulo bis comprehenſo ſub AC, CB; erit & EH maius quàm IG, ideoque EH maius quàm dimidium EG, ideoque vlterius recta FH maior dimidio ipſius FG. Simili methodo demõſtrabimus FK maiorem eſſe dimidio ipſius FG. Ioæquales ergo partes erunt FH, HG, partibus FK, KG, ſingulæ ſingulis. Iam verò quoniam AC, CB, Mediæ dantur, potentiâque ſolum commenſurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia: ergo per 16.prop.compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Quandoquidem igitur vtrumque ipſorum eſt Medium, erit etiam compoſitum ex ipſis; videlicet EH Medium, per coroll.prop. 24. Eodem modo erit EK Mediũ. Sed applicantur ad Rationalem EF, ipſa EH, EK, faciuntque latitudines FH, FK, Rationales, ipſi EF longitudine incommẽſurabiles, iuxta propoſ.23. Eodem modo quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur Medium, erit & quod bis ſub AC, CB, continetur, videlicet IG illi commenſurabile, Medium, per cit. corollar. prop. 24. quare quia applicatur ad Rationalem HI, erit HG Rationalis ipſi HI longitudine incommenſurabilis, per prop.23. Ex eiſdem principiis demooſtrabimus EG eſſe Medium, & KG Rationalem ipſi KL longitudioe incommenſurabilem.Ættereà AC, CB, ſunt longitudine incommenſurabiles, & eſt per lemm.3.prop.29. vt AC ad CB, ita quadratum ex AC ad rectangulum ſub AC, CB; erit per 20. propoſ. quadratum ex AC, rectangulo ſub AC, CB, incommenſurabile: at quadrato ex AC eſt commẽſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, (quia enim AC, CB, potentiâ ſunt commenſurabiles, ideoque ipſarum quadrata commenſurabilia, erit per 10.prop. compoſitum ex ipſis vtrilibet illorum, nimirum quadrato AC commenſurabile.) & rectãgulo ſub AC, CB, commenſurabile eſt quod bis ſub AC, CB; ergo & compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, id eſt rectangulum EH, erit incommenſurabile rectaogulo bis ſub AC, CB, nimirum ipſi EG, iuxta prop.14. Quare, quia per 1.prop.li.6. eſt vt EH ad IG, ita FH ad HG, erunt per prop.10. FH, HG, lõgitudine incõmenſurabiles, quæ oſtẽſæ ſunt Rationales. Ergo Rationales erunt FH, HG, potentia ſolùm commenſurabiles, igitur FG tota per propoſ.37. Irrationalis erit, & Binomium, diuiſaque in G in duo nomina. Simili ratione FG eadem diuiſa erit in K, in alia duo nomina. quod fieri non poſſe oſtendimus. Recta igitur AB bimediale ſecundum, non diuidetur in ſua nomina in alio puncto ab C. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XLVI.

### Maior ad vnum duntaxat punctum, diuiditur in nomina.

Fig.203. SVppoſitio. Data maior AB, ſit diuiſa in C, in duo ſua nomina ſeu partes AC, CB, potentia incommenſurabiles, efficientes quidem compoſitum ex ipſarum partium quadratis Rationale, rectangulum autem ſub eiſdem AC, CB, Medium, iuxta propoſ.40. Dico AB non poſſe diuidi in alio puncto diuerſo ab C, in alia diuerſa nomina ſeu partes potentia incōmenſurabiles, & facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, & rectangulum ſub eiſdem partibus, Medium.

Demonſtratio. Si enim diuidatur in alio puncto D, in alia nomina, conditiones præ-requiſitas obtinentia; ex eiſdem principijs citatis in demonſtratione prop.43. oſtendemus exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, illum eſſe qui rectanguli ſub AC, CB bis, & rectanguli bis ſub AD, DB. Verùm exceſſus cōpoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti quadratorum ex AD, DB, ſpatium eſt Rationale, cùm vtrumque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, & eorum exceſſus ſpatium Rationale per coroll. prop. 27. Ergo & exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium erit Rationale. Quoniam autem rectangulum ſub AC, CB, datur Medium, erit & rectangulum bis ſub AC, CB, Medium, per coroll.prop.24. quia ei eſt commenſurabile. Eodem artificio probabitur eſſe Medium, rectangulum bis ſub AD, DB. Igitur quia Medium non ſuperat Medium, Rationali, per 27. prop. non erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale, conceſſum antea Rationale. Falſa ergo erit poſitio aduerſarij contradicens huic propoſitioni, ex qua poſitione ſequuntur iſta pugnantia; veráque erit ac demonſtrata propoſitio.

## PROPOSITIO XLVII.

### Rationale ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Fig.203. SVppoſitio. Data ſit linea Irrationalis, Rationale ac Medium potens AB, diuiſa in C in duo nomina ſeu partes ſuas AC, CB, incommenſurabiles potētia, & efficientes compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, rectangulumque verò ſub ipſis AC, CB, Rationale, iuxta prop.41. Dico rectam AB, non diuidi in alio puncto diuerſo ab C, in alia nomina, prædictas conditiones habentia.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit Recta prædicta AB, diuidatur in D diuerſo puncto ab C, in alia duo diuerſa nomina prædicta. Tunc vti in prop. 43. oſtendemus exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DC, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB: ſed vti in propoſ. 44. probabimus exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eſſe ſpatium Rationale; ergo exceſſus compoſiti quadratorum ex AC, CB, & compoſiti quadratorum ex AD, DB, erit ſpatium Rationale. Quoniam autem compoſita ex his quadratis dantur eſſe Media, & per prop. 27. Medium non excedit Medium, Rationali; non erit eorum exceſſus ſpatium Rationale, contra conceſſa. Cùm igitur pugnantia iſta ſequantur ex poſitione aduerſarij contradicente huic propoſitioni; ipſa poſitio rationi contraria erit, & propoſitioni conformis. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XLVIII.

### Bina Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SVppoſitio. Sit recta linea Irrationalis AB, Bina Media potens diuiſa in C, in duo ſua nomina ſeu partes AC, CB, potentia incommenſurabiles, efficientes compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium & incommenſurabile compoſito ex earum quadratis, iuxta prop. 42. Dico rectam AB non poſſe diuidi in duo ſua nomina prædictas conditiones obtinentia in diuerſo puncto ab C. Conſulatur vero figura & conſtructio figuræ prop.45. Fig.203.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit prædicta recta AB, diuidatur in alio puncto D diuerſo ab C, in duo alia diuerſa nomina, prædictas conditiones habentia: tunc vti in propoſ. 45. demonſtratione oſtendemus partes FH, FG, partibus FK, KG, inæquales eſſe, ſingulas ſingulis. Quia ergo compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, Medium datur, erit EH illi compoſito æquale, Medium: tùm etiam quia

quia rectangulum ſub AC, CB, datur Medium, erit IG, eius duplo æquale etiam Medium per coroll. propoſ. 24. quia illi eſt commenſurabile. Ergo per prop. 23. Media EH, IH, applicata ad Rationalem EF, efficient latitudines FH, HG, Rationales longitudine ipſi EF incommenſurabiles. Eodem modo demonſtrabimus rectas lineas FK, KG, Rationales eſſe, longitudine ipſi EF incommenſurabiles. Quoniam autem compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, id eſt rectangulum EH, incommenſurabile eſt ex datis, rectangulo bis ſub AC, CB, nimirum rectangulo IG; eſtque per 1. prop. libr. 6. vt EH ad IG, ita FH ad HG; per propoſ. 10. FH, HG, longitudine incommenſurabiles: Verùm oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur FH, HG, Rationales erunt potentiâ ſolum commenſurabiles: quare tota FG Irrationalis erit, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Ex eiſdem principiis oſtendemus eandem rectam FG Binomium, diuiſam eſſe in K, in alia nomina, contra demonſtrata in prop. 43. Cùm ergo pugnantia iſta deriuentur ex poſitione contradicente huic propoſitioni, ipſa poſitio falſa erit, & propoſitio vera ac demonſtrata.

# DEFINITIONES SECVNDÆ.

DEfinitiones iſtæ ſecundæ, ſupponunt expoſitam Rationalem lineam, & lineam Binomium ſeu ex binis nominibus, diuiſam in duo nomina, cuius maius nomen plus poſſit quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. & primò quidem commenſurabilis.

## I.

*Si quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine.*
*Vocetur tota ex binis nominibus prima.*

ID eſt, quando lineæ Binomij diuiſæ in duo nomina inæqualia, & maius expoſitæ Rationali commenſurabile eſt, tota vocanda eſt ex binis nominibus prima.

## I I.

*Si verò minùs nomen expoſitæ Rationali, longitudine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.*

HOc eſt, quando lineæ Binomij diuiſæ in duo nomina inæqualia, & minus expoſitæ Rationali eſt commenſurabile: tota nuncupanda erit ex binis nominibus ſecunda.

## I I I.

*Quod ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali: Vocetur ex binis nominibus tertia.*

NImirum, quando lineæ Binomij diuiſæ in duo nomina inæqualia, neutrum eſt commenſurabile Rationali expoſitæ: tota dicenda erit ex binis nominibus tertia.

## I V.

*Si quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine.*
*Vocetur ex binis nominibus quarta.*

HOc eſt in iſta definitione & ſequentibus, ſi lineæ Binomij diuiſæ in duo nomina, cuius maius nomen plus poſſit quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, maiuſque nomen expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabile: tota denominanda erit ex binis nominibus quarta.

## V.

*Si verò minus nomen, vocetur quinta.*

VIdelicet quando lineæ Binomij minus nomen expoſitæ Rationali eſt commenſurabile longitudine, poſitaque conditione generali prædicta in defin. 4. vocanda erit tota linea Binomium ex binis nominibus quinta.

## V I.

*Quod ſi neutrum ipſorum nominum. Vocetur ſexta.*

NEmpe ſi lineæ Binomij diuiſæ in duo nomina inæqualia, ita vt maius plus poſſit quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſi neutrum nomen expoſitæ Rationali ſit commenſurabile longitudine: tota appellanda erit, ex binis nominibus ſexta.

PRO-

## PROPOSITIO XLIX.

### Inuenire ex binis nominibus primam.

Fig.204. Conſtructio. Aſſumantur duo numeri quadrati AB 9. CB 4.quorum exceſſus AC 5.non ſit quadratus; ita vt AB,CB, proportionem habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum; ſed AB, AC, non habeant proportionem quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Tùm exponatur quæpiam Rationalis linea D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur linea alia EF, quæ etiam erit Rationalis per def.6. Denique per coroll.2.propoſ.6.fiat vt numerus AB ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG. Dico rectam EG, eſſe ex binis nominibus primam.

Demonſtratio. Cùm quadrata ex EF,FG, proportionem habeant quam numeri AB, AC,ipſa erunt per prop.6.commenſurabilia, & rectæ EF,FG,ſaltem potentia commenſurabiles: Verùm EF Rationalis eſt per conſtructionem, ergo & FG Rationalis erit per def.6. Quoniam autem AB ad AC, non obtinet proportionem quam quadratus numerus ad numerum quadratum, non habebunt etiam quadrata ex EF, FG, proportionem quam numerus quadratus ad quadratum; quare per 9. prop. incommenſurabiles erunt longitudine ipſæ EF, FG. Cùm igitur ſint rectæ EF,FG, Rationales potētiâ commenſurabiles tantummodo, erit tota EG Irrationalis quæ ex binis nominibus vocatur, iuxta propoſ.37. Verùm cùm ſit vt numerus AB ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG, per conſtructionem ipſam;ſitque AB maior quam AC,erit etiam quadratum ex EF maius quadrato ex FG, per coroll.noſtrum 2.ad propoſ.14. libr.5. ſit verò per lemma propoſ. 14. quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG,quadrato rectæ H. Iam verò quia eſt vt AB ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG; erit iuxta propoſ.19. libr.5. coroll. per conuerſionem rationis, vt AB ad CB, ita quadratum ex EF ad quadratum rectæ H; habet vero AB ad CB proportionem quadrati numeri ad quadratum numerum; quadrata igitur ex EF & ex H,proportionem obtinebunt quam quadratus numerus ad numerum quadratum; ideoque per prop.9. ipſæ rectæ EF, & H, erunt longitudine commenſurabiles. Denique quia maius nomen EF plus poteſt quàm minus FG, quadrato rectæ H ſibi longitudine commenſurabilis, eſtque idem maius nomen EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine, erit EG per definitionem 1. ſecundarum, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo Rectam, ex binis nominibus primam, ſicuti ſuit imperatum.

## PROPOSITIO L.

### Inuenire ex binis nominibus ſecundam.

Conſtructio. Aſſumantur duo numeri AB 9,CB,4.quadrati, ita tamen vt differentia illorum AC 5,non ſit numerus quadratus: ſumaturque Recta aliqua Rationalis D, & ei longitudine commenſurabilis recta aliqua FG, quæ etiam per def.6. erit Rationalis: Tùm per coroll. 2. propoſ. 6. fiat vt numerus AC ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico rectam EG eſſe ex binis nominibus ſecundam. Fig.204.

Demonſtratio. Quadrata ex FG,EF,proportionem habent vt numeri AC, AB, per ipſam conſtructionem;ergo per prop.6.erunt commenſurabilia, rectæque ipſæ FG, EF, ſaltem potentiâ commenſurabiles: oſtenſa verò eſt FG Rationalis, ergo & EF Rationalis erit per defin. 6. Quoniam autem AC, AB, non obtinent proportionem quam quadrati numeri,ipſarum FG,EF quadrata proportionem non habebunt quam quadrati numeri: quare ipſæ rectæ FG, EF, erunt per 9. prop.longitudine incommenſurabiles. Erunt ergo rectæ FG, EF, Rationales potentiâ tantum commenſurabiles;ideoque per prop.37. tota EG, erit Irrationalis vocata Binomium ſeu ex binis nominibus. Præterea cùm ſit vt numerus AC ad numerum AB, ita quadratum ex FG ad quadratum ex EF; eritque conuertendo per coroll. propoſ.4. libr.5. vt AB ad AC,ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG; ſit verò AB maior quàm AC, erit iuxta coroll.noſtrum 2.ad prop.14. libr. 5.quadratum ex EF maius quadrato ex FG: ſitque iuxta lemm.prop.14. maius, quadrato rectæ H;demonſtrabimus vt in præced.prop. 49. rectam H eſſe incommenſurabilem longitudine ipſi EF. Igitur quia maius nomen EF plus poteſt quàm minus FG, quadrato rectæ H ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque minus nomen FG, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit per defin.2. ſecundarum, recta EG, ex binis nominibus

minibus ſecunda. Fecimus ergo propoſitum, ac demonſtrauimus rectè factum.

## PROPOSITIO LI.

### Inuenire ex binis nominibus tertiam.

Fig.104. CONſtructio. Aſſumantur duo numeri quadrati AB 9 maior, & CB minor 4. ita vt differentia AC 5, illorum, non ſit numerus quadratus. Sumatur verò alius 1 numerus proximè maior quàm AB, v.g. 10, qui non ſit quadratus, idcoque ad neutrum aſſumptorum AB, CB, proportionem habeat quam quadratus numerus ad numerum quadratum; differetque ſola vnitate ab AB 9, & per coroll. noſtrum 1. ad prop. 8. libr. 8. inter hos non poterit medius eſſe numerus proportionalis. Præterea exponatur Rationalis quæpiam D linea; fiatque per noſtrum corol. 2. propoſ. 6. vt 1 ad AB, ita quadratum ex D ad quadratum ex EF; erunt per 6. prop. quadrata ex D, & EF, proportionem habentia quam numerus 1 ad numerum AB, commenſurabilia; ideoque ipſæ rectæ D, & EF, commenſurabiles ſaltem potentia. Rurſus fiat per cit. coroll. vt AB ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG.

Demonſtratio. Cùm recta D ſit Rationalis, erit & EF illi commenſurabilis ſaltem potentiâ, etiam Rationalis per defin. 6. Quoniam autem 1 ad AB, id eſt quadratum ex D ad quadratum ex EF, proportionem non habet quam numerus quadratus ad numerum quadratum, erunt per 9. prop. D & EF, rectæ longitudinc inuicem incommenſurabiles. Prætereà cùm ſit vt AB ad AC, ita quadratũ ex EF ad quadratum ex FG; erunt per 6. prop. quadrata ex EF, FG, proportionem habentia quam numerus ad numerum, commenſurabilia, & proinde rectæ EF, FG, ſaltem potentiâ commenſurabiles: Cùm ergo EF ſit Rationalis oſtenſa, erit etiam recta FG Rationalis per def. 6. Et quoniam AB ad AC, hoc eſt quadratum ex EF ad quadratum ex FG, proportionem non habet quam numerus quadratus ad numerum quadratum, erunt per propoſ. 9. rectæ EF, FG, longitudine incommenſurabiles. Igitur rectæ EF, FG, ſunt Rationales, potentiâ tantum commenſurabiles; ideoque per 37. prop. tota EG erit Irrationalis ex binis nominibus nuncupata. Quia verò eſt 1 ad AB, ita quadratum ex D ad quadratum ex EF; & vt AB ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG, erit per coroll. prop. 22. lib. 5. vt 1 ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: ſed non habet 1 ad AC proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ergo nec quadratum ex D ad quadratum ex FG, proportionem obtinebunt quadrati numeri ad numerum quadratum: ideoque per propoſ. 9. rectæ D & FG, erunt longitudine incommenſurabiles. Sed eſt vt AB ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG; & AB maior eſt quam AC, ergo per coroll. noſtrum ad prop. 14. libr. 5. & quadratum ex EF maius erit quadrato ex FG. Sit verò per lemma propoſ. 14. maius quadrato rectæ H; Probabimus vt in propoſit. 49. H eſſe ipſi EF longitudine commenſurabilem. Quia ergo maius nomen EF plus poteſt quàm minus FG, quadrato rectæ H ſibi longitudine commenſurabilis; & neutra ipſarum EF, FG, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D; erit EG per defin. 3. ſecundarum, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ac demonſtrauimus imperatum.

## PROPOSITIO LII.

### Inuenire ex binis nominibus quartam.

CONſtructio. Aſſumantur duo numeri quadrati AC 9. CB 4, ita vt AB 13: compoſitus ex ipſis, non ſit quadratus, hoc eſt non habeat proportionem ad vtrumuis illorum quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Tùm exponatur recta aliqua D Rationalis, cui longitudine commenſurabilis aſſumatur recta EF; erit ideo EF etiam Rationalis per def. 6. Reliqua verò fiant vt in conſtructione prop. 49. Fig.104.

Demonſtratio. Simili methodo vti ad prop. cit. 49. oſtendetur recta EG eſſe ex binis nominibus, ſeu Binomium. Hanc verò probabimus nunc eſſe quartam ex illis. Nam ex diſcurſu & principiis citatis in demonſtratione prop. 49. quadratum ex EF, maius erit quadrato ex FG, taliſque exceſſus ſit per lemm. prop. 14. ſit quadratum rectæ H. Quia igitur vti in demonſtratione propoſit. 49. per conuerſionem rationis eſt vt AB ad CB, ita quadratum ex EF ad quadratum ex H; & non eſt AB ad CB, vt numerus quadratus ad numerum quadratum, ergo neque quadratum ex EF, erit ad quadratum ex H, vt quadratus numerus ad numerum quadratum: quare per prop. 9. rectæ EF, & H, erunt longitudine incommenſurabiles. Atque ita quia maius

nomen

nomen EF, plus poteſt quàm minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis; tùm maius EF prædictum nomen longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali D: erit EG per defin. 4. ſecundarum, ex binis nominibus quarta. Reperimus ergo imperatum.

## PROPOSITIO LIII.

### Inuenire ex binis nominibus quintam.

Fig. 204. CONſtructio. Reperiantur duo numeri AC, CB quadrati, vt in præcedente prop. Fiatque conſtructio vt in prop. 50. aſſumendo rectam FG longitudine commenſurabilem expoſitæ Rationali D. &c.

Demonſtratio. Probabimus enim vt in prop. 50. rectam EG eſſe ex binis nominibus; & nunc eſſe quintam. Nam vt in propoſ. 50. quadratum ex EF maius erit quàm quadratum ex FG; v. g. quadrato ex H recta. Et quia vt in prop. 49. probauimus per conuerſionem rationis eſſe vt AB ad CB, ita quadratum ex EF ad quadratum ex H: demonſtrabimus quemadmodum in antecedente propoſit. rectas EF, H, eſſe longitudine incommenſurabiles. Ideoque cùm maius nomen EF plus poſſit quàm minus FG, quadrato rectæ H ſibi longitudine incommenſurabilis, & minus nomen FG longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali D: erit ex def. 5. ſecundarum, recta EG, ex binis nominibus quinta. Igitur reperimus propoſitum.

## PROPOSITIO LIV.

### Inuenire ex binis nominibus ſextam.

Fig. 204. CONſtructio. Aſſumantur duo numeri plani inæquales AC 8. CB 6. quorum neuter ſit quadratus; & AB 14 compoſitus ex ipſis non ſit etiam quadratus, habeatque ad neutrum ipſorum proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Sumaturque alius quicumque numerus, v. g. I 10, qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Denique exponendo rectam aliquam D. Rationalem, fiat per corol. noſtrum 2. propoſ. 6. vt I ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF: & reliqua præparentur, vt in conſtructione propoſ. 51.

Demonſtrabimus vt in cit. prop. 51. rectas D & EF eſſe longitudine incommenſurabiles, atque totam EG eſſe ex binis nominibus: & nunc oſtendemus eſſe etiam ſextam quæſitam.

Demonſtratio. Nam ex principiis ablatis ad propoſ. 51. ſimiliter probabimus rectas D & FG eſſe longitudine incommenſurabiles; & eſſe quadratum ex EF maius quàm quadratum ex FG; ſitque iuxta lemma prop. 14. exceſſus huiuſmodi, quadratum ex H: demonſtrabimus vt in prop. 49. per conuerſionem rationis eſſe, vt AB ad CB, ita quadratum ex EF ad quadratum ex H. Quandoquidem ergo AB ad CB, ideoque quadratum ex EF ad quadratum ex H, non habet proportionem quam quadratus numerus ad numerum quadratum, erunt per prop. 9. rectæ EF, & H, longitudine incommenurabiles. Quare cum maius nomen EF plus poſſit quàm minus FG, quadrato rectæ H ſibi longitudine incommenſurabilis, neutrumque ipſorum nominum EF, FG, longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali D: ipſa EG erit iuxta definitionem 6. ſecundarum, ex binis nominibus ſexta. quod erat faciendum ac demonſtrandum.

## L E M M A.

### Si recta linea ſecta ſit vtcunque: erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum contentum ſub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SVppoſitio. Recta AB, ſecta ſit vtcunque in C: Dico primò rectangulum contentum ſub AC & CB eſſe medium proportionale inter quadrata ex AC, CB: Dico ſecundò rectangulum ſub tota AB, & AC, eſſe medium proportionale inter quadratum ex AB, & quadratum ex AC: vel rectangulum ſub tota AB, & CB, eſſe medium proportionale inter quadratum ex AB, & quadratum ex CB. Fig. 205.

Conſtructio. Per prop. 46. libr. 1. ſuper recta AB, fiat quadratum AD, & ducta diametro EB, tranſmittatur ex C, recta CF parallela lateri BD, quæ ſecabit in G diametrum

obuiam

obuiam EB, denique per prop. 31. lib. 1. ſicuti alia ducatur recta HGI, parallela ipſi AB: reſultabunt per noſtrum lemma 2. ad lib. 4. quadrata HF, CI, partium AC, CB, totius AB; & rectangula GD, AG, ſingula ſub partibus AC, CB, ęqualia inter ſe per prop. 43. l. 1.

Demonſtratio. Per 1 prop. lib. 6. eſt vt HG ad GI, ita HF ad GD, & ita AG ad CI; erit per 11. prop. lib. 5. vt FH ad GD, ita AG ad CI: ſed oſtenſa ſunt æqualia; ergo per prop. 7. lib. 5. erit vt FH ad GD, ita GD ad CI; videlicet rectangulum GD ſub ſegmentis AC, CB, erit medium proportionale inter HF, & CI, quadrata dictorum ſegmentorum AC, CB, quod ęrat primò propoſitum, ac demonſtrandum.

Præterea quia eſt per cit. prop. lib. 6. vt AB ad CB, ita AD quadratum rectæ AB, ad rectangulum CD ſub tota AB & ſegmento eius CD: tùm etiam quia eſt vt AB ad CB, ita rectangulum ex AI, ad quadratum CI, per eandem cit. prop. ſunt autem AI, CD, æqualia, addendo CI commune ipſis AG, GD, æqualibus oſtenſis: ergo erit per 11. prop. lib. 5. vt AD ad CD, ita CD ad CI. Atque ita CD rectangulum ſub tota AB & ſegmento eius CD, erit medium proportionale inter quadratum AD ex tota AB, & quadratum C ex parte eius CB prædicta. Simili modo probabitur AF rectangulum eſſe medium proportionale inter quadrata AD & HF. Quod erat ſecundò propoſitum ac demonſtr.

## PROPOSITIO LV.

**Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea ſpatium potens, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.**

Fig. 206. SVppoſitio, Spatium AC comprehendatur ſub Rationali AB, & AD ex binis nominibus prima. Dico rectam lineam quæ ſpatium AC poteſt, eſſe Irrationalem quæ vocatur Binomium.

Conſtructio. Sit ipſius AD maius nomen AE, erunt ex def. 1. ſecundarum AE, ED, Rationales potentiá tantum commenſurabiles, & AE plus poterit quàm ED, quadrato rectę ſibi longitudine commenſurabilis; denique AE, expoſitæ Rationali AB longitudine cõmenſurabilis erit. Secetur autem in F biſariàm recta ED per 10. prop. lib. 1. Quoniam AE plus poteſt quàm ED, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, ſi parti quartæ quadrati ex ED, hoc quadrato ex EF, æquale parallelogrammum ſub AG, GE, contentum, per lem. 2. prop. 17. applicetur deficiens figura quadrata; per prop. 18. ipſam diuidet in partes longitudine commenſurabiles: igitur AG, GE, partes inter ſe longitudine commenſurabiles erunt. Tranſmittantur autem per puncta G, E, F, ipſis AB, CD, parallelæ, GH, EI, FK, per prop. 31. lib. 1. & parallelogrammo AH, æquale quadratum LM fiat per prop. 14. lib. 2. Et parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN, per cit. prop. tùm ad angulum M, aptentur quadrata LM, MN, ita vt latera MO, MP, vnam rectam efficiant OP, ex principijs prop. 14. lib. 1. tùm etiam latera MQ, MR, conſtituent vnam rectam QR. Completo autem rectangulo LN, quia rectæ OM, MP, rectis QM, MR, ſunt æquales, ideóque tota OP, toti QR; ſitque per prop. 34. lib. 1. recta OP, ipſis SN, LT; & recta QR ipſis LS, TN, æqualis: æquilaterum erit rectangulum, ac proinde quadratum. Et quia rectangulum ſub AG, GE, ęquale eſt per iſtam conſtructionem quadrato ex EF, erit iuxta prop. 17. lib. 6. vt AG ad EF, ita EF ad GE; ideóque per 1. prop. lib. 6. vt AH ad EK, ita EK ad GI: igitur EK erit medium proportionale inter AH & GI, id eſt inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Verùm inter eadem quadrata LM, MN, medium eſt proportionale TM, per præced. lemma; ergo TM, ipſi EK, erit æquale per 9. prop. lib. 5. ſed per prop. 43. lib. 1. ipſi TM eſt æquale MS, & per 36. prop. lib. eiuſdem 1. ipſi EK eſt æquale FC; ergo per 1. ax. lib. 1. MS erit æquale ipſi FC. Ideóque totum quadratum LN, toti rectangulo AC erit æquale: & recto OP poteſt ſpatium AC contentum ſub AB Rationali, & AD ex binis nominibus prima. Dico autem rectam OP, eſſe Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

Demonſtratio. AG, GE, oſtenſæ ſunt longitudine commenſurabiles, ergo per prop. 16. tota AE, vtrique ipſarum erit longitudine commenſurabilis; Eſt verò AE, quia eſt maius nomen ipſius AD ex binis nominibus primæ, Rationali AB commenſurabilis longitudine ex natura ſua: Ergo & AG, GE, eidem AB, longitudine commenſurabiles erunt, per coroll. noſtrum ad prop. 12. Quare cùm AB ſit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales; vnde per prop. 20. rectangula AH, GI, ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus comprehenſa, erunt Rationalia; & proinde quadrata LM, MN, ipſis æqualia, Rationalia; ideóque vlterius, rectæ OM, MP, Rationales erunt per def. 6. Præterea quia

AE ipſi ED longitudine incommenſurabilis eſt; & ipſi AE longitudine oſtenſa eſt commenſurabilis recta AG; & ipſi ED commenſurabilis eſt longitudine EF eius dimidia; erunt per prop. 14. rectæ AG, EL, longitudine inter ſe, incommenſurabiles. Igitur & ſpatia AH, EK, eandem proportionem habentia per 1. prop. lib. 6. quam AG, EF, incommenſurabilia erunt per 10. prop. ideoque etiam ipſis æqualia LM, MN, incommenſurabilia erunt. Ergo etiam per cit. prop. 10. rectæ OM, MP, longitudine erunt incommenſurabiles, cùm eodem modo referantur, quo LM, MT, per 1. prop. lib. 6. Sed anteà ſunt oſtenſæ Rationales OM, MP; ergo OM, MP, Rationales, erunt potentiâ ſolum commenſurabiles. Igitur iuxta prop. 37. OP tota recta, potens ſpatium AC, Irrationalis erit quæ vocatur ex binis nominibus. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali ex binis nominibus prima: Recta &c. quod erat concludendum. Aduerte hanc figuram inſeruire poſſe propoſitionibus ſequentibus vſque ad GO. incluſiuè.

## PROPOSITIO LVI.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali; & ex binis nominibus ſecunda: Rectalinea ſpatium potens, Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

Fig. 206. SVppoſitio. AC ſpatium comprehendatur ſub Rationali AB, & ex AD, ex binis nominibus ſecunda: Dico rectam lineam quę ſpatium AC poteſt, eſſe Irrationalem quæ ex binis Medijs prima nuncupatur.

Constructio. Sit ipſius AD maius nomen AE, erunt per def. 2. rectæ AE, ED Rationales potentiâ tantum commenſurabiles; & AE plus poterit quàm ED, quadrato rectælineæ ſibi longitudine commenſurabilis; & ED Rationali expoſitæ AB longitudine commenſurabilis. Secetur præterea ED bifariàm in F, per 10. prop. lib. 1. Et reliqua fiant, vt in præc. constructione ſuperioris 55. prop. Nam ſimiliter probabimus vt ibi, rectā OP, poſſe ſpatium AC contentum ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda AD: Et Dico rectam OP eſſe Irrationalem, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

Demonſtratio. Quia recta AE eſt longitudine incommēſurabilis ipſi ED, & ED minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, longitudine commenſurabilis eſt Rationali AB; erunt per prop. 13. AE, AB, longitudine incommenſurabiles. Quia verò AG, GE, probatę ſunt in antecedentis prop. demonſtratione longitudine commenſurabiles, erit tota AE vtrique ipſarum commenſurabilis, iuxta prop. 16. Igitur cùm AE maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, ſit Rationalis, erunt & AG & GE, Rationales etiam. Cùm igitur vtraque AG, GE, ipſi AE ſit longitudine commenſurabilis; & AE, Rationali AB longitudine incommenſurabilis; erit per 14. prop. vtraque AG, GE, eidem AB incommenſurabilis longitudine: ideoque tàm AB, AG, quàm AB, GE, Rationales, potentiâ ſolum commenſurabiles. Rectangula ergo AG, GI, Media ſunt, per coroll. noſtrum 3. ad prop. 22. vnde & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, Media ſunt, per idem coroll. Ergo & rectæ OM, NP, erūt Mediæ per coroll. noſtrū 2. ad cit. prop. 22. Quoniam autem rectæ AG, GE, longitudine ſunt commenſurabiles, erunt per 10. prop. AH, GI, eandem cum illis obtinentia proportionem, commenſurabilia; ideoque & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, commenſurabilia etiam erunt. Quare rectæ OM, MP, commenſurabiles erunt ſaltem potentiâ. Et quia AE, ED, longitudine ſunt incommenſurabiles; ipſi verò AE probata eſt longitudine commenſurabilis ipſi AG; & AD longitudine commenſurabilis eſt EF, eius ſemiſſis; erunt per prop. 14. AG, EF, longitudine incōmenſurabiles. Ideoque AH, EK, eandem obtinentia cum ipſis proportionem, incommenſurabilia erunt, per prop. 10. Quare & LM, MT, ipſis AH, EK, æqualia, incommenſurabilia erunt: & per 10. prop. rectæ OM, MP, longitudine incommenſurabiles erunt, quia eandem proportionem quam LM, MT. Cùm igitur probauerimus rectas OM, MP, eſſe Medias, & commenſurabiles, erunt ipſæ OM, MP, Mediæ, potentiâ ſolum commenſurabiles. Denique quia FD minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea eſt longitudine commenſurabilis ipſi AE, vel ipſi EI; & eſt EF ipſi ED, longitudine etiam commenſurabilis; erūt per 12. prop. EI, EF, longitudine commenſurabiles. Quare cùm EI ſit Rationalis, erit & EF Rationalis. Igitur per 20. prop. EK rectangulum Rationale eſt: & quia MT, ſub OM, MP, comprehenſum ipſi EK æquale eſt; erit MT etiam Rationale. Ideo OM, MP, Mediæ ſunt potentiâ tantum commenſurabiles,

Rationale continentes; ac proinde iuxta propoſ. 38. recta OP Irrationalis erit, quæ ex binis Mediis prima dicitur. Si igitur ſpatium &c. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO LVII.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia: Recta linea ſpatium potens, Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur.

Fig. 206. SVppoſitio. Sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD, ſpatium AC contineatur: Dico rectam potẽtem ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ nuncupatur ex binis Mediis ſecunda.

Conſtructio. Sit AE maius nomen ipſius AD: erunt ex natura ſua, AE, ED, Rationales potentiâ ſolum commenſurabiles; & AE plus poterit quàm ED, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; neutraque ipſarum AE, ED, Rationali AB erit longitudine commenſurabilis. Secetur autem per prop. 10. libr. 1. recta ED bifariàm in F; & reliqua fiant vt in propoſ. 55. conſtructione: Eodem modo, vt ibi, probabimus rectam OP poſſe ſpatium AC; & vt in præced. prop. 56. rectas OM, MP, eſſe Medias potentiâ tantum commenſurabiles, eo quod AE, Rationali AB, ponatur longitudine incommenſurabilis, ſicut & ibidem eadem AE, ipſi AB longitudine erat incommenſurabilis. Nunc vero oſtendemus rectam OP, eſſe Irrationalem quæ ex binis Mediis ſecunda dicetur.

Demonſtratio. Quia ED, EF ſunt commenſurabiles longitudine, eſtque ED ipſi AB Rationali, vel EI, longitudine incommenſurabilis; erit per prop. 14. EF eidem EI, longitudine incommenſurabilis: ſed ſunt EF, EI, Rationales, quia EF eſt ſemiſſis ipſius ED, Rationalis; & EI, expoſitæ Rationali AB æqualis. Igitur EF, EI, Rationales ſunt, potentiâ ſolum commẽſurabiles. Quare per prop. 22. coroll. noſtrum 3. EK Medium eſt, ideoque MT æquales ipſi EK, etiam medium erit, eo quod ſub Mediis OM, MP, contineatur. Quare cùm OM, MP, Mediæ ſint potentiâ ſolum cõmenſurabiles, contineantque ſpatium Medium; erit per prop. 39. tota OP, Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda vocatur. Si igitur ſpatium, &c. quod erat probandum.

## PROPOSITIO LVIII.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta: Recta linea ſpatium potens, Irrationalis erit, quæ vocatur Maior.

SVppoſitio. Sub Rationali AB, & ſub ex binis nominibus quarta AD, ſpatium AC contineatur: Dico rectam potentem ſpatium AC eſſe Irrationalem, vocatam Maiorem. Fig. 206.

Conſtructio. Sit AE ipſius AD, maius nomen: erunt ex natura ſua, AE, ED, Rationales, potentiâ tantum commenſurabiles; & AE plus poterit quàm ED, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis; tùm AE ipſi AB, erit longitudine commenſurabilis. Præterea per prop. 10. lib. 1. ſecetur recta ED bifariàm in F; fiantque reliqua vt in conſtructione propoſ. 55. erunt vt ibi, rectæ AG, GE, longitudine incommenſurabiles: tum oſtendemus ſimiliter vt in cit. conſtr. rectam OP poſſe ſpatium AC. Iam vero probandum eſſe ipſam OP, eſſe Irrationalem, vocatam Maiorem.

Demonſtratio. AG, GE, ſunt longitudine incommenſurabiles, ergo per 10. propoſ. rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem incommenſurabilia erunt per 10. prop. ideoque & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, erunt etiam inter ſe incommenſurabilia: quare & rectæ OM, MP, potentia ſunt incommenſurabiles per defin. 4. Quoniam autẽ AE maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine commenſurabilis Rationali AB, erit & AE Rationalis; & per propoſ. 20. rectangulum AI ſub ipſis contentum Rationale. Eſt verò AI æquale compoſito ex quadratis LM, MN; ergo compoſitum ex quadratis LM, MN Rationale eſt. Et quia ED maius nomen ipſius AD, ipſius ex binis nominibus quartæ, eſt linea longitudine incommenſurabilis Rationali AB, erit & EF ipſius ſemiſſis, eidem AB longitudine incommenſurabilis: eſtque EF Rationalis, quia eſt Rationali ED commenſurabilis: Ergo EF, AB, Rationales erunt, potentiâ ſolum commenſurabiles. Quapropter per 22. propoſ. coroll. noſtrum 3. EK, Medium eſt ſub ipſis contentum; & MT illi æquale, ſub OM, MP contentum, Medium. Ergo cùm OM, MP, ſint potentiâ in-

commenſurabiles, efficiantque compoſitum ex ipſarum quadratis LM, MN, Rationale; & rectangulum ſub ipſis MT Medium; erit tota OP Irrationalis quæ vocatur Maior per propoſ. 40. Igitur ſi ſpatium, &c. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO LIX.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta: Recta linea ſpatium potens, Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

Fig. 206. SVppoſitio. Sub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD, contineatur ſpatium AC: Dico rectam lineam quæ ſpatium AC poteſt, eſſe Irrationalem; quæ dicitur potens Rationale & Medium.

Conſtructio. Sit AE maius nomen ipſius AD: tunc ex natura ſua erunt AE, ED, Rationales potentiâ ſolùm commenſurabiles; & AE plus poteſt quam ED, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ED longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali AB. Præterea per prop. 10. libr. 1. ſecetur ED bifariàm in F: & reliqua præſtentur vt in prop. 55. conſtructione: eruntque per prop. 19. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et ex eiſdem principiis citatis in dicta propoſ. 55. recta OP poterit ſpatium AC. Nunc verò Dico ipſam OP eſſe Irrationalem, quæ potens Rationale ac Medium vocitatur.

Demonſtratio. Nam erunt vt in propoſ. præcedente 58. rectæ OM, MP, potentiâ incommenſurabiles. Quoniam autem AE maius nomen ipſius AD ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis & longitudine incommenſurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentiâ tantum commenſurabiles: Vnde per 22. prop. rectangulum AI ſub ipſis contentum, Medium erit; ſed AI æquale eſt compoſito ex quadratis LM, MN; igitur compoſitum hoc, Medium erit. Inſuper quia ED, Rationalis datur longitudine commenſurabilis Rationali AB, quia eſt maius nomen ipſius AD ex binis nominibus quintæ; erit & EF ipſius ſemiſſis, eidem AB commenſurabilis longitudine, & Rationalis; ergo per 20. propoſ. EK contentum ſub Rationalibus EI, EF, longitudine commenſurabilibus, Rationale erit; & ideo MT contentum OM, MP, contentum, ipſi EK æquale, Rationale etiam erit. Igitur quandoquidem rectæ OM, MP, potentiâ incommenſurabiles ſint, efficiantque compoſitum ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium, rectangulumque MT ſub ipſis comprehenſum, Rationale; erit per prop. 41. tota OP recta Irrationalis, quæ vocatur potens Rationale ac Medium. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, &c. quod erat oſtendendum.

## PROPOSITIO LX.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

SVppoſitio. Spatium AC comprehendatur ſub AB Rationali, & AD ſexta ex binis nominibus: Dico rectam potentem ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ dicitur bina potens Media. Fig. 206.

Conſtructio. Sit AE maius nomen ipſius AD: igitur erunt ex definitione AE, ED, Rationales potentiâ ſolùm commenſurabiles; & AE plus poterit quàm ED, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit commenſurabilis Rationali AB. Fiant vero cætera vt in conſtructione prop. 55. Erunt verò per 19. rectæ AG, GE, longitudine incommenſurabiles: & conſtabit vt in propoſ. cit. 55. rectam OP, poſſe ſpatium AC: tùm vt in propoſ. 58. rectas OM, MP, potentia eſſe incommenſurabiles: Præterea vt in 59. erit compoſitum ex quadratis LM, MN, Medium: Denique vt in propoſ. 58. erit MT contentum ſub OM, MP, Medium. Aſſero verò rectam OP, eſſe rectam quæſitam.

Demonſtratio. Quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommenſurabilis eſt longitudine ipſi ED, hæc verò eidem commenſurabilis; erunt per propoſ. 13. AE, EF, longitudine incommenſurabiles: ergo per propoſ. 10. & AI, EK, incommenſurabilia erunt, cùm per 1. prop. libr. 6. eandem habeant rationem quam AE, EF: igitur & compoſitum ex quadratis LM, MN, æquale ipſi AI, & rectangulum MT æquale ipſi EK, erunt incommenſurabilia. Quare cùm rectæ OM,

OM, MP, ſint potentiâ incommenſurabiles, efficiantq; compoſitum ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium, & MT ſub ipſis contentum, Medium, & incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis; erit per prop. 42. recta OP Irrationalis, quę bina Media potens appellatur. ſi ergo ſpatium contineatur, &c. quud erat oſtendendum.

## PROPOSITIO LXI.

### Quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum; latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SVppoſitio. Sit ex binis nominibus AB, ciuſque maius nomen AC; & per lemm. noſtrum 1. propoſ. 22. ad Rationalem expoſi-
Fig. 106. tam DE, applicatum rectangulum DF æ-
& 107. quale quadrato ex AB latitudinem efficiens DG: Dico rectam DG eſſe ex binis nominibus primam.

Conſtructio. Per cit. lemm. applicetur ad eandem Rationalem DE rectangulum DH æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK æquale quadrato ex CB: erit ergo reliquum LF æquale illi quod bis ſub AC, CB, quandoquidem per propoſ. 4. libr. 2. quadrata ex AC, CB, & rectangula bis ſub AC, CB, æqualia ſunt quadrato ex AB, ſicuti per conſtructionem factam eidem quadrato ex AB, æquale eſt rectangulum DF. Secetur autem per propoſ. 10. lib.. 1. LG biſariàm in M, per quod iuxta propoſ. 31. libr. 1. ipſis LK, GF, parallela ducatur MN; erit vtrumque rectangulum LN, MF, æquale illi quod bis ſub AC, CB, comprehenditur. Et quia per prop. 37. AC, CB, Rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, quia tota AB eſt ex binis nominibus; erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, ideoque commenſurabilia: quorum vtrique cum ſit per prop. 16. commenſurabile compoſitum ex ipſis; erit etiam compoſitum ex AC, CB quadratis, Rationale: Eſt vero huic compoſito æquale rectangulum DK; ergo & DK Rationale erit, quod cùm ſit applicatum ad Rationalem DE, efficiet per 21. prop. latitudinem DL Rationalem, ipſique DE longitudine commenſurabilem. Præterea cùm AC, CB, Rationales ſint ſolùm potentiâ commenſurabiles, erit per propoſ. 23. rectangulum ſub ipſis Medium; ideoque & quod bis ſub ipſis, cùm ſit ei commenſurabile, hoc eſt ipſum LF, Medium erit iuxta coroll. prop. 24. Igitur LF applicatum ad LK, Rationalem efficiet LG latitudinem Rationalem, ipſique LK, id eſt DE, longitudine incommenſurabilem. Eſt verò DL probata ipſi DE commenſurabilis longitudine; ergo per prop. 13. DL, LG, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt ergo DL; LG, Rationales, potentiâ tantùm commenſurabiles; ideoque per prop. 37. recta DG ex binis nominibus eſt. Et nunc Aſſero [illegible] primam ex binis nominibus.

Demonſtratio. Quia ex lemm. propoſ. 54. Rectangulum ſub AC, CB, medium eſt proportionale inter quadrata rectarum AC, CB, erit etiam LN, medium proportionale inter DH, IK; ideoque per 1. prop. lib. 6. cùm rectæ DI, LM, IL, eandem obtineant proportionem, quam DH, LN, IK, erit etiam recta LM media proportionalis inter DI, IL: Igitur iuxta prop. 17. libr. 6. rectangulum ſub DI, IL, æquale erit quadrato ex LM. Et quoniam quadrata ex rectis AC, CB, commenſurabilia ſunt, propter ipſas AC, CB, commenſurabiles; erunt & DH, IK, ipſis æqualia, commenſurabilia: ergo per propoſ. 10. & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commenſurabiles erunt. Quia verò DK maius eſt quàm LF, eo quod quadrata per lemm. prop. 39. rectarum AC, CB, maiora ſint bis ſub AC, CB; erit & recta DL maior quàm LG, quandoquidem per 1. propoſ. libr. 6. DL, LG; eodem modo referantur quo DK, LF. Itaque quia DL maior eſt quàm LG, & ad DL applicatum eſt rectangulum ſub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, id eſt quartæ parti quadrati ex minore LG deſcripti; (oſtendimus enim rectangulum ſub DI, IL, æquale quadrato eſſe ex LM.) Secaturque DL in I ad partes DI, IL, longitudine commenſurabiles; poterit iuxta prop. 18. DL maior plus quam LG, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Igitur cùm DG probata ſit ex binis nominibus, & DL maius nomen plus poſſe quàm LG minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; atque idem maius nomen DL, longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ DE: erit DG ex binis nominibus prima, iuxta defin. 1. ſecundarum. quod erat demonſtrandum.

Hac eadem figura poterimus vti in prop. ſeq. vſque ad 66. incluſiuè.

## PROPOSITIO LXII.

### Quadratum eius, quæ ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum; latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

*Fig.206. & 207.* SVppoſitio. Sit ex binis Mediis ptima AB, ciuſque maius numero AC; & pet lemm. noſtrum 1. propoſ. 22. ad Rationem DE applicatum rectangulum DF æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico rectam DG ex binis nominibus eſſe ſecundam.

Conſtructio ſit eadem quæ in præcedente propoſitione.

Demonſtratio. Quia AC, CB, ex binis Mediis primam AB componentes, ſunt per prop. 38. Mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex AC, CB; tùm rectangula ipſis æqualia DH, IK, commenſurabilia, atque Media. Et cùm totum DK per prop. 16. vtrique eorum DH, IK, ſit commenſurabile; erit per coroll. prop. 24. DK, Medium; quod cùm ſit applicatum ad Rationalem DE; erit per propoſ. 23. eius latitudo DL Rationalis ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Præterea quia Rectangulum ſub AC, CB, eſt Rationale, erit & eius duplum LF Rationale; quod cùm applicatum ſit ad Rationalem LK, erit per propoſ. 21. eius latitudo LG, Rationalis ipſi LK, id eſt DE, longitudine commenſurabilis. Ergo cum duarum rectarum DL, LG, ipſa LG ſit ipſi DE commenſurabilis longitudine; & DL longitudine incommenſurabilis; erunt per ptop. 13. DL, LG longitudine incommenſurabiles. Quod cùm DL, LG, oſtenſæ ſint Rationales, etunt ipſæ Rationales potentiâ ſolum commenſurabiles; ideoque per prop. 37. tota DG ex binis nominibus erit. Iam verò vt in præcedenti, demonſtrabimus DL eſſe maius nomen, & plus poſſe, quàm minus LG nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cùm ipſius DG, maius nomen DL plus poſſit quàm minus LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſutabilis; & minus nomen LG probatum ſit lõgitudine commenſurabile Rationali expoſitæ DE: erit per defin. 2. ſecundarũ tecta DG ex binis nominibus ſecunda. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Mediis. &c. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO LXIII.

### Quadratum eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum; latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SVppoſitio. Eſto AB ex binis Mediis ſecunda, eiuſque maius nomen AC; & per lemma noſtrum 2. ad propoſ. 22. ad Rationalem DE, applicatum rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem efficiens DG: Dico rectam DG eſſe ex binis nominibus tertiam. *Fig.206. & 207.*

Conſtructio eadem fiat quæ in ptopoſitione 61.

Demonſtratio. Quia AC, CB, componentes ex binis Mediis ſecundam AB, ſunt per prop. 39. Mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ Medium continent; erunt quadrata ex AC, CB, atque ideo rectangula DH, IK, ipſis æqualia, commenſurabilia & Media. Quandoquidem igitur & totum DK per propoſ. 16. vtrique DH, IK, eſt commenſurabile; et it per coroll. propoſit. 24. DK Medium; quod cùm ſit applicatũ ad Rationalem DE, erit pet prop. 23. eius latitudo DL, Rationalis, ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Prætereà cùm rectangulum ſub AC, CB, Medium ſit; erit & eius duplum, Medium; quod cùm ſit applicatũ ad Rationalem LK; erit per prop. cit. 23. latitudo LG Rationalis ipſi LK, id eſt ipſi ED, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam AC ipſi CB longitudine eſt incommenſurabilis; eſtque per lemm. 3. prop. 19. vt AC ad CB, ita quadratum ex AC ad rectangulum ſub AC, CB, incommenſurabile erit pet 10. propoſ. quadratnm ex AC, tectangulo ſub AC, CB. Eſt verò per prop. 16. quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, eo quod quadrata ex AC, CB, ſint commenſurabilia, quippe quod rectæ ipſæ dentur potentiâ commenſurabiles; & rectangulo ſub AC, CB, commenſurabile eſt eius duplum, videlicet rectangulum bis ſub AC, CB: Ergo compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, id eſt rectangulum DK incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, CB, nimirum rectangulo LF, per propoſ. 14. Ergo rectæ DL, LG, eodem modo comparatæ cum DK, LF, iuxta prop. lib. 6. erunt longitudine incommenſurabiles per propoſ. 10.

ſed

ſed eædem ſunt oſtenſæ Rationales; Rationales igitur ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ideoque per 37. prop. tota DG ex binis nominibus erit. Ad hæc, vt in propoſ. 61. probabimus DL eſſe maius nomen, ac poſſe plus quàm minus nomen LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. quare cùm DL maius nomen plus poſſit quàm minus LG, quadrato ſibi lõgitudine commenſurabilis rectæ, & neutra ipſarum, Rationali expoſitæ DE, ſit longitudine commenſurabilis, erit ex binis nominibus tertia, iuxta def. 3. ſecundarum. Quadratum igitur eius quæ &c. quod erat probandum.

## PROPOSITIO LXIV.

### Quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

*Fig. 206. & 207.* SVppoſitio. AC ſit maius nomen Maioris AB; & per lemma noſtrum 1. ad prop. 22. applicatum rectangulum DF ad Rationalem DE, æquale quadrato ex AB, latitudinem efficiens DG: Dico Rectam DG eſſe quartam ex binis nominibus.

Conſtructio ſit eadem quæ in prop. 61.

Demonſtratio. Quoniam AC, CB, Maiorem AB, componentes, ſunt ex prop. 40. potentiâ incommenſurabiles, faciuntque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale; rectangulum verò ſub ipſis Medium; erit etiam DK, compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, per lem. 4. prop. 19. & LF duplum eius quod ſub AC, CB, continetur, Medium, per coroll. propoſ. 24. Et quia Rationale DK ad Rationalem DF eſt applicatum, erit per 21. prop. DL, Rationalis, ipſi DE longiiudine incommenſurabilis. Inſuper quia LF Medium, ad Rationalem LK applicatum eſt, erit LG Rationalis, ipſi LK, vel DE, longitudine incommenſurabilis. Ergo quia duarum rectarum DL, LG, prima quidem ipſi DE ſit longitudine commenſurabilis, altera verò eidem DE ſit longitudine incommenſurabilis; erunt per prop. 13. ipſæ DL, LG, longitudine incommenſurabiles inter ſe: fuerunt autem ambæ Rationales probatæ: ergo DL, LG, ſunt tantùm potentiâ commenſurabiles Rationales, & propterea iuxta prop. 37. recta DG, ex binis nominibus erit. Præterea cùm in prop. 61. demonſtrauerimus rectangulum ſub DI, LI, eſſe æquale quadrato ex LM: & quadrata rectarum AC, CB, incommenſurabilia ſint, per def. 4. eo quod rectæ AC, CB, potentiâ ſint incommenſurabiles; erunt etiam DH, IK, illis æqualia, incommenſurabilia, & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommenſurabiles iuxta prop. 10. Denique quia iuxta demonſtrata in prop. 61. DL eſt maior quàm LG, & ad DL eſt applicatum rectangulum ſub DI, IL, quadrato ex LM, id eſt quartæ parti ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod ſecat ipſam DL in I, in partes longitudine incommenſurabiles, poterit per prop. 19. DL plus quàm LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis: ideoque quia ipſa DL maius nomen ipſius DG quæ ex binis nominibus eſt, probata ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali DB; erit per defin. 4. ſecundarum, ex binis nominibus quarta. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO LXV.

### Quadratum eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum; latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SVppoſitio. Data ſit recta AB, potens Rationale ac Medium, cuiuſque maius nomen ſit AC, & per noſtrum lemm. 1. ad prop. 22. ſit ad Rationalem DE, applicatum rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem efficiens DG: Dico hanc rectam DG eſſe ex binis nominibus quintam. *Fig. 206. & 207.*

Conſtructio verò ſit eadem quæ ad propoſit. 61.

Demonſtratio. Quia rectæ AC, CB, componentes rectam AB, potentem Rationale ac Medium, ſunt per prop. 41. potentia incommenſurabiles, efficientes quidem compoſitam ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Rationale; erit DK æquale compoſito ex quadratis ipſarum AC, CB, Medium, per coroll. noſtrum 3. ad prop. 22. & LN æquale rectangulo ſub AC, CB, Rationale per lemma 4. ad prop. 19. ideoque etiam per idem hoc lemma, LF duplum ipſius LN, etiam Rationale. Quare Medium DK applicatum ad Rationalem DE, efficit per prop. 23. latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE incommenſurabilem. Sed & Rationale LF ad Rationalem LK applicatum, efficit per prop. 21. latitudi-

 nem

nem LG Rationalem, longitudine ipſi LK vel DE, commenſurabilem. Igitur cùm duarum rectarum DL, LG, illa quidem ſit longitudine incommenſurabilis ipſi DE Rationali, hæc verò commenſurabilis eidem; erunt per 13. prop. ipſæ DL, LG, longitudine incommenſurabiles. Igitur DL, LG, Rationales erunt, & potentiâ ſolùm commenſurabiles; & per prop. 37. recta DG tota, erit ex binis nominibus. Et quia ex dictis in demonſtratione prop. 61. rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex LM; & ſicut in antecedente propoſitione, DL eſt maius nomen ipſius DG, pluſque poteſt quàm LG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & minus nomen LG, oſtenſum eſt expoſitæ Rationali DE, longitudine commenſurabile, erit per def. 5. ſecundarum, recta DG ex binis nominibus quinta. quod erat oſtendendum.

## PROPOSITIO LXVI.

### Quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum; latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

Fig. 106. & 107. SVppoſitio. Data ſit recta AB, potens bina Media; eiuſque maius nomen AC; & ad Rationalem DE, applicatum rectangulum DF, æquale quadrato ex ipſa AB, per lemma noſtrum 1. ad prop. 22. facienſque latitudinem DG: Dico ipſam DG eſſe ex binis nominibus ſextam.

Conſtructio petatur ex propoſitione 61.

Demonſtratio. Quia rectæ AC, CB, efficientes totam AB, potentem bina Media, ſunt per prop. 42. potentiâ incommenſurabiles, & efficiunt compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub eis contentum, Medium, & incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum: erit DK æquale compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium; & LF æquale illi quod bis ſub rectis AC, CB, etiam Medium, per coroll. propoſ. 24. Quoniam verò Media DK, LF, ſunt applicata ad Rationalem DE, erunt per 23. prop. eorum latitudines DL, LG, Rationales, ipſi DE longitudine incommenſurabiles: Et quia etiam compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AC, CB, per propoſit. 42. eidemque rectangulo commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, CB; erit per prop. 13. compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, id eſt DK incommenſurabile rectangulo bis ſub AC, CB, hoc eſt ipſi LF: ideoque per 10. prop. rectæ DL, LG, eandem habentes rationem cum dictis DK, LF, iuxta prop. 1. lib. 6. erunt longitudine inter ſe commenſurabiles. Rationales igitur ſunt rectæ DL, LG, potentiâ ſolum commenſurabiles; ideoque per prop. 37. ex binis nominibus. Cùm verò vt in præcedente propoſitione DL ſit maius nomen ipſius DG, poſſitque plus quàm LG minus nomen eiuſdem DG, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & neutra ipſarum DL, LG, probata ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali DE; erit per def. 6. ſecundarum, recta ipſa DG, ex binis nominibus ſexta. quod erat declarandum.

## PROPOSITIO LXVII.

### Ei, quæ ex binis nominibus longitudine commenſurabilis; & ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordine eadem.

SVppoſitio. Recta quæcumque AB ſit ex binis nominibus, diuiſa in ſua nomina AC, maius, CB minus; ſitque recta DE ipſi AB longitudine commenſurabilis: Dico rectam DE, eſſe etiam ex binis nominibus, eiuſdem ordinis cum AB; hoc eſt ſi recta AB ſit ex binis nominibus, prima, rectam DE eſſe ex binis nominibus primam, &c. Fig. 108.

Conſtructio. Fiat per prop. 12. libr. 6. vt tota AB ad totam DE, ita AC, ad DF.

Demonſtratio. Quia eſt tota AB ad totam DE, vt ablata AC ad ablatam DF, erit per prop. 19. libr. 5. & reliqua CB ad reliquam FE, vt tota AB ad totam DE: Ponitur autem AB ipſi DE longitudine commenſurabilis, erit per 10. prop. AC longitudine commenſurabilis ipſi DF, & CB ipſi FE etiam longitudine commenſurabilis: ſunt verò per prop. 37. AC, CB, nomina totius AB ex binis nominibus, Rationales; ergo & DF, FE, erunt Rationales. Præterea quia eſt vt AC ad DF, ita CB ad FE, per 11. prop. libr. 5. erit permutando iuxta prop. 16. libr. eiuſdem 5. vt AC ad CB, ita DF ad FE; ſuntque AC, CB, potentiâ ſolum commenſurabiles per prop. 37. ergo rectæ DF, FE, erunt etiam potentiâ ſolum commenſurabiles: ergo DF, FE, Rationales erunt potentiâ ſolum commenſurabiles, ideoque per 37. prop. tota DE erit ex binis nominibus. Supereſt vt probemus rectam DE eſſe eiuſdem ordinis ex binis nominibus

minibus,vt eſt data AB. Quia enim AC plus poteſt quàm CB, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis: ſi primum,poterit per 15.prop. & DF plus quàm FE quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis: ſi verò AC commenſurabilis ſit longitudine Rationali expoſitæ, ita vt AB ſit ex binis nominibus prima, erit per 12.prop. & DF eidem Rationali longitudine commenſurabilis,cùm vtraque & Rationalis, & DF eidem AC commenſurabilis longitudine;quare ex def.1. ſecundarum, ipſa DE etiam erit ex binis nominibus prima. Si autem CB ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali, ita vt AB ſit ex binis nominibus ſecunda; erit eodem modo & FE, Rationali expoſitæ longitudine commenſurabilis, ideoque DE per def.2. ſecundarum, ex binis nominibus ſecunda. Quod ſi neutra ipſarum AC, CB, ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali, ita vt AB ſit ex binis nominibus tertia; erit per prop. 12. & neutra ipſarum DF, FE, longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali; ac proinde per def.3.ſecundarum, recta DE erit ex binis nominibus tertia. Si verò ſecundum ſit, poterit per propoſ. 15. & DF plus quàm FE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis: vnde vti priùs demonſtrabimus DE eſſe ex binis nominibus quartam, vel quintam, vel ſextam, vti AB fuerit ex binis nominibus quarta vel quinta vel ſexta. quod erat concludendum.

Eadem figura vti poterimus in ſequentibus propoſitionibus vſque ad 71.incluſiuè.

## PROPOSITIO LXVIII.

### Ei, quæ ex binis Mediis longitudine commenſurabilis; & ipſa ex binis Mediis eſt, atque ordine eadem.

Fig.108. SVppoſitio. Data ſit recta AB ex binis Mediis,diuiſaque in ſua nomina AC maius, CB minus; ſitque recta DE ei longitudine commenſurabilis: Dico rectam DE eſſe quoque ex binis Mediis, vt AB; tùm eſſe eodem ordine primam vel ſecundam,prout AB fuerit prima vel ſecunda.

Conſtructio. Per propoſ.12. libr.6. fiat vt AB ad DE, ita AC ad DF.

Demonſtratio. quia eſt tota AB ad totam DE, vt ablata AC, ad ablatam DF; erit per prop. 19. libr. 6. & reliqua CB ad reliquam FE,vt tota AB ad totam DE: ponitur autem tota AB commenſurabilis ipſi DE; etiam erit per 10. prop. AC ipſi DF,& CB ipſi FE, commenſurabilis, vt tota AB ad totam DE: ſunt verò AC, CB, Mediæ datæ; ergo per prop.24. rectæ DE,FE, illis cōmenſurabiles, erunt Mediæ. Præterea cùm ſit AC, ad DF, vt CB ad FE; & permutando vt AC ad CB, ita DF ad FE; & per prop.38. ſint AC, CB; potentiâ ſolùm commenſurabiles, erunt per propoſ. 10. etiam DF, FE, potentiâ ſolùm commenſurabiles. Oſtendimus ergo rectas DF, FE, eſſe Medias potentiâ ſolùm commenſurabiles; quare per 38. vel 39. recta DE erit ex binis Mediis. Reſtat vt probemus eſſe ordine ordinis ex illis binis Mediis, quo eſt data AB. Cùm ſit vt AC ad CB, ita DF ad FE; ſitque per lem.3. ad prop.19. vt AC ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB; & vt DF ad FE,ita quadratum ex DF ad rectangulum ſub DF, FE; erit etiam per propoſ.11. libr. 5. vt quadratum ex AC ad rectangulum ſub AC,CB,ita quadratum ex DF ad rectangulum ſub DF, FE; & iuxta prop.16. libr.5. permutando vt quadratum ex AC ad quadratum ex DF,ita rectangulum ſub AC,CB,ad rectangulum ſub DF, FE. Commenſurabile verò eſt quadratum rectæ AC, quadrato rectæ DF, eo quod rectæ AC,DF,ſint oſtenſæ commenſurabiles; ergo per 10.prop. rectangulum ſub AC,CB, erit commenſurabile rectangulo ſub DF,FE. Igitur ſi rectangulum ſub AC,CB,fuerit Rationale, ita vt AB ſit ex binis Mediis prima, erit & Rectangulum ſub DF,FE, Rationale per lemm.4.prop.19. quia eſt illi commenſurabile oſtenſum; erit recta DE ex binis Mediis prima, per propoſ.38. Quod ſi rectangulum ſub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB ſit ex binis Mediis ſecunda; erit & rectangulum ſub DF, FE ei commenſurabile, Medium, iuxta coroll. prop. 24. ac proinde per propoſ. 39. recta DE erit ex binis Mediis ſecunda. quod erat oſtendendum.

## PROPOSITIO LXIX.

### Maiori commenſurabilis; & ipſa Maior eſt.

SVppoſitio. Data ſit linea AB Maior, diuiſa in C in ſua nomina, AC maius, CB minus; ſitque data ei commenſurabilis recta DE,ſiue longitudine & potentia, ſiue potentiâ ſolummodo: Dico rectam DE eſſe etiam Maiorem. Fig.108.

Conſtructio ſit eadem quæ in ſuperiori propoſitione 67. vel 68. ita vt etiam vti ibidem

dem oſtendimus, partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem obtineant rationem.

Demonſtratio. Quia AB, DE, commenſurabiles ſunt longitudine & potentia, vel potentia ſolum, erunt per propoſ. 10. tàm AC, DF, quàm CB, EF, eodem modo commenſurabiles. Præterea quia eſt vt AC ad DF, ita CB ad FE, erit iuxta prop. 16. lib. 5. permutando, vt AC ad CB, ita DF ad FE; erit per prop. 22. lib. 6. vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF ad quadratum ex FE; & componendo iuxta coroll. prop. 18. libr. 5. vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB ad quadratum ex CB, ita compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; tùm iuxta coroll. prop. 4. eiuſdem libr. 5. vt quadratum rectæ CB ad compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum rectæ FE, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE; & alternando iuxta cit. propoſ. 16. libr. 5. vt quadratum rectæ CB ad quadratum rectæ FE, ita compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE: ſunt autem oſtenſæ rectæ CB, FE, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum; ergo quadratum rectæ CB commenſurabile erit quadrato rectæ FE, per 9. propoſ. & compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, erit etiam commenſurabile compoſito ex quadratis rectarum DF, FE, per 10. prop. Sed compoſitum ex quadratis illarum rectarum AC, CB, componentium Maiorem datam AB, eſt Rationale, per 40. prop. ergo per 9. defin. compoſitum etiam ex quadratis rectarum DF, FE, erit Rationale. Inſuper quia eſt vt AC ad CB, ita DF ad FE; vt verò AC ad CB, ita eſt quadratum ex AC ad rectangulum ſub AC, CB; & vt DF ad FE, ita eſt quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, per 3. lemma prop. 19. erit etiam vt quadratum ex AC ad rectangulum ſub AC, CB, ita quadratum ex DF ad rectangulum ſub DF, FE, per 11. prop. lib. 5. & permutando iuxta prop. 16. lib. 5. vt quadratum ex AC ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, CB, ad rectangulum ſub DF, FE: ſunt verò commenſurabiles inter ſe probatæ rectæ AC, DF, vel longitudine & potentia, vel potentia ſolùm, ergo quadratum ex AC, quadrato ex DF erit commenſurabile per 9. prop. Ergo etiam per prop. 10. & rectangulum ſub AC, CB, erit rectangulo ſub DF, FE, commenſurabile. Porrò per 40. propoſ. rectangulum ſub AC, CB, eſt Medium, igitur & rectangulum ſub DF, FE, illi commenſurabile, erit per 9. def. vel coroll. prop. 24. etiam Medium. Cùm autem ſit AC ad CB, vt DF ad FE, ſintque AC, CB, potentiâ incommenſurabiles per 40. prop. erunt etiam per prop. 10. rectæ DF, FE, potentiâ incommenſurabiles. Quandoquidem ergo rectæ DF, FE, ſunt potentia incommēſurabiles, efficiuntque compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, & rectangulum ſub ipſis Medium; erit tota DE Maior. Maiori igitur commenſurabilis, ipſa Maior eſt. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO LXX.

### Rationale ac Medium potenti commenſurabilis; & ipſa Rationale ac Medium potens eſt.

Svppoſitio. Data ſit recta AB, potens Rationale ac Medium, diuiſa in ſua nomina in C, AC maius, CB minus; eique AB, data ſit recta DE commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum: Dico rectam DE, eſſe etiam potentem Rationale ac Medium. Fig. 108.

Demonſtratio. Facta conſtructione vt in ſuperioribus propoſitionibus 67. vel 68. vel 69. probabitur vt in præcedente 69. compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, eſſe commenſurabile compoſito ex quadratis rectarum DF, FE: ſed rectæ AC, CB, componunt AB potentem Rationale Mediumque, ergo per prop. 41. compoſitum ex quadratis ipſarum AC, CB, erit Medium. igitur iuxta def. 9. vel coroll. propoſ. 24. compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, erit Medium. Simili diſcurſu vt in antecedentis prop. 69. demonſtratione, erit rectangulum ſub AC, CB, quod Rationale eſt per 41. propoſ. commenſurabile rectangulo ſub DF, FE, atque etiam rectangulum ſub DF, FE, Rationale erit per 9. def. vel coroll. propoſ. 24. Præterea vt in eadem prop. 69. erunt DF, FE, potentiâ incommenſurabiles. Igitur quia DF, FE, ſunt potentiâ incommenſurabiles, faciuntque compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, rectangulumque ſub ipſis Rationale, erit per 41. prop. tota DE, Rationale ac Medium potens linea. Quare linea potenti Medium ac Rationale commenſurabilis, erit & ipſa potens Rationale ac Medium.

PRO-

## PROPOSITIO LXXI.

### Bina Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

Fig. 208. DAta ſit recta AB potens bina Media, ſecta in C in ſua nomina; dataque recta DE, ipſi AB commenſurabilis; ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm: Dico & rectam DE eſſe potentem bina Media.

Conſtructio ſit eadem quæ in ſuperioribus propoſitionibus 67. 68. 69. 70.

Demonſtratio. Vt in demonſtratione propoſ. 69. probabimus compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, eſſe commenſurabile compoſito ex quadratis rectarum DF, FE: tùm rectangulum ſub AC, CB, rectangulo ſub DF, FE, eſſe commenſurabile. Quoniam igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum ex ipſis AC, CB, ſit Medium per prop. 42. erit etiam per def. 9. vel coroll. prop. 24. & compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, Medium, & rectãgulum ex ipſis DF, FE, Medium. Etiam vt in antecedente prop. 69. oſtendimus rectas DF, FE, eſſe potentià incommenſurabiles. Denique quia AB eſt potens bina Media, erit per propoſ. 42. compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, incommenſurabile rectangulo ſub AC, CB: Eſt verò compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, commenſurabile probatum compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE; & rectangulum ſub AC, CB, commenſurabile rectangulo ſub DF, FE; erunt per 14. prop. compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulum ſub DF, FE, incommenſurabilia. Ergo quia rectæ DF, FE ſunt potentia incommenſurabiles, faciuntque compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis comprehenditur, Medium, incommenſurabilia; erit per prop. 42. recta DE, bina Media potens. Ergo recta linea commenſurabilis rectæ potenti bina Media; & ipſa bina Media eſt potens quod erat concludendum.

## PROPOSITIO LXXII.

### Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SVppoſitio. Sit Rationale AB ſpatium compoſitum cum Medio CD ſpatio: Dico rectam quæ totum ſpatium AD poteſt, eſſe vel ex binis nominibus, vel ex binis Medijs primam; vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Fig. 209.

Conſtructio. Erit AB maius quàm CD, vel minus: nam æquale eſſe non poteſt, ſi enim eſſent æqualia, cùm AB ſit Rationale, eſſet CD Rationale, per lemma 4. prop. 19. Sit ergo primum & ad Rationalem EF expoſitam applicetur rectangulum EG æquale ipſi AB, per lemma noſtrum propoſ. 25. tùm ad rectam HG aliud rectangulum HI applicetur æquale ipſi CD; ſic enim totum EI, toti AD rectangulo fiet æquale.

Demonſtratio primi caſus. Quia AB eſt Rationale, & CD Medium, erit etiam per lemma cit. 4. propoſ. 19. EG Rationale; & per coroll. propoſ. 24. HI Medium: quæ cùm ad Rationalem EF ſint applicata, erit per propoſ. 21. EH Rationalis, ipſi EF longitudine commenſurabilis; & HK Rationalis per 23. propoſ. eidem EF longitudine incommenſurabilis. Præterea cùm ex definitionibus, EG, HI, ſint incommenſurabilia, eò quòd EG ſit Rationale, & HI Irrationale vtpote Medium; erunt per 10. propoſ. EH, HK, eandem cum illis habentes proportionem per 1. propoſ. lib. 6. incommenſurabiles longitudine. Rationales ergo erunt EH, HK, potentiâ ſolum commenſurabiles: igitur per 37. propoſ. EK tota ex binis nominibus erit. Et quia maius datur AB quàm CD, hoc eſt EG quàm HI, erit etiam EH maior quàm HK, per cit. propoſ. 1. lib. 6. Et quia maius nomen EH, plus poterit quàm minus HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis vel incommenſurabilis; ſi primum erit EK ex binis nominibus prima iuxta def. 1. Secundarum; quandoquidem EH maius nomen ſit longitudine probatum commenſurabile Rationali EF; ideoque recta potens ſpatium EI contentum ſub Rationali

tionali EF, & ex binis nominibus EK prima 5 : & ideo ſpatium AD compoſitum ex Rationali AB, & Medio CD; Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur per propoſ. 55. Si ſecundum, hoc eſt EH plus poſſit quàm HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit EA ex binis nominibus quarta, per def. 4. Secundarum, eò quòd EH maius nomen probatum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF: igitur recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, ideoque ſpatium AD, erit per propoſ. 58. Irrationalis quæ vocatur maior.

Eſto autem AB minus quàm CD, eademque conſtruantur quæ in primo ſuperiore caſu. Erit vt antea EK ex binis nominibus, & EH ipſi EF longitudine commenſurabilis. Quoniam verò AB minus eſt quàm CD, hoc eſt EG quàm HI; erit etiam recta EH minor quàm HK, quandoquidem per 1. propoſ. lib. 6. ſit EH ad HK, vt EG ad HI. Poterit ergo HK maius nomen ipſius EK ex binis nominibus, plus quàm EH minus nomen, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis, vel incommenſurabilis: ſi primum, erit EK ex binis nominibus ſecunda per def. 2. ſecundarum, eò quòd EH minus nomen commenſurabile ſit longitudine Rationali EF; vnde recta potens ſpatium EI comprehenſum ſub Rationali EF, & ſub binis nominibus ſecunda EK, atque adeo ſpatium AD ex Rationali AB & Medio CD conſtans, Irrationalis eſt, quæ dicitur ex binis Medijs prima, per propoſ. 56. Quod ſi ſecundum erit EK ex binis nominibus quinta per def. 5. ſecundarum, eo quod minus nomen EH oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Igitur recta potens ſpatium EI comprehenſum ſub Rationali EF, & ſub binis nominibus quinta EK, ideoque ſpatium AD, erit per prop. 59. Irrationalis quæ nuncupatur Rationale & Medium potens. Si ergo Rationale & Medium componantur &c. quod erat oſtendendum.

## PROPOSITIO LXXIII.

Si duo Media inter ſe incommenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs ſecunda, vel bina Media potens.

Fig. 109. SVppoſitio. Duo Media AB, CD, incommenſurabilia, ſunt compoſita in vnum ſpatium AD: Dico rectam potentem ſpatium AD, vel eſſe ex binis Mediis ſecundam, vel bina Media potentem.

Conſtructio eadem ſit quæ in præcedente propoſitione, in duobus caſibus, primò nimirum ſi AB ſit maius quàm CD, ſecundò verò ſi AB ſit minus quàm CD: æqualia enim eſſe non poſſunt, ob rationem allatam in præced. propoſ. Porrò eiſdem figuris vti poterimus, quibus in præced. propoſ.

Demonſtratio primi caſus. Spatia AB, CD, Media & incommenſurabilia cùm ponantur, erunt illis æqualia ſpatia EG, HI, Media & incommenſurabilia, tùm per coroll. propoſ. 24. tùm per propoſ. 10. Cùmque per 1. propoſ. lib. 6. ſint EH, HK, vt EG, HI, & iſta ſint incommenſurabilia, erunt per cit. propoſ. 10. rectæ EH, HK, longitudine incommenſurabiles: Cùmque EG, HI, ſint applicata ad Rationalem EF, vel HG, vtraque rectarum EH, HK, Rationalis erit, ipſi EF longitudine incommenſurabilis per propoſ. 23. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentiâ ſolum commenſurabiles, ideoque ipſa EK ex binis nominibus iuxta propoſ. 37. Quoniam autem AB maius ponitur quàm CD, erit vt in præcedente propoſ. EH maius nomen rectæ EK; & poterit plus quàm HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis vel incommenſurabilis: ſi plus poſſit modo prædicto, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cùm vtrumque nomen EH, HK, probatum ſit longitudine incommenſurabile Rationali EF, erit per def. 3. ſecundarum, ex binis nominibus tertia, vnde recta potens ſpatium EI comprehenſum ſub Rationali EF, & ſub binis nominibus tertia EK, atque adeo ſpatium AD, erit per prop. 57. Irrationalis, ex binis Medijs ſecunda nuncupata. Quod ſi EH plus poſſit quàm HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quia vtrumque nomen EH, HK, ſit oſtenſum longitudine incommenſurabile Rationali EF; erit EK per def. 6. ſecundarum, ex binis nominibus ſexta: vnde Recta potens ſpatium EI vel AD, erit per propoſ. 60. Irrationalis, bina Media potens appellata.

Demonſtratio ſecundi caſus, quando AB minus eſt quàm CD, erit eadem vt ex figura conſtat. Quare ſi duo Media inter ſe commenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt &c. quod erat demonſtrandum.

COROL-

## COROLLARIVM

*Conſequens ad omnes ſuperiores propoſitiones de lineis Irrationalibus ſit huiuſmodi.*

*Qua ex binis nominibus, & reliqua ipſam ſubſequentes Irrationales, differunt ab Media, & inter ſe.*

NAm quadratum Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, efficit per prop. 23. latitudinem Rationalem ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem. Et quadratum lineæ ex binis nominibus ad Rationalem applicatum, facit per propoſ. 61. latitudinem ex binis nominibus primam. Et quadratum eius quæ ex binis Mediis prima ad Rationalem applicatum, efficit per prop. 62. latitudinem ex binis nominibus ſecundam. Et quadratum eius quæ ex binis Mediis ſecunda ad Rationalem applicatum, latitudinem parit per propoſit. 63. ex binis nominibus tertiam. Quadratum verò Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem reddit per prop. 64. ex binis nominibus quartam. Inſuper Quadratum eius quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem creat per prop. 65. ex binis nominibus quintam. Denique quadratum bina Media potentis, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit, per prop. 66. ex binis nominibus ſextam. Itaque cùm hæ latitudines differant, & à latitudine Mediæ, & inter ſe; ab latitudine in quam Mediæ, quod Rationalis ſit hæc latitudo, illæ verò Irrationales: Inter ſe verò quod non ſunt eædem ordine ex binis nominibus: manifeſtum eſt omnes Irrationales lineas de quibus actum eſt, inter ſe differentes eſſe.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

### I.

*Vniuerſale, breuiter comprehendens ea quæ in ſuperioribus propoſitionibus de lineis Irrationalibus tradita ſunt, redacta ad ſeptem ſenarias proprietates illarum.*

### PRIMVM SENARIVM.

*In propoſitionibus* 37. 38. 39. 40. 41. 42. *oſtendit Euclides ortum ſeu originem ſex linearum Irrationalium: videlicet eius quæ ex binis nominibus; quæ ex binis Mediis prima; quæ ex binis Mediis ſecunda; Maioris; quæ Rationale ac Medium poteſt; & eius quæ bina Media poteſt.*

### SECVNDVM SENARIVM.

*In propoſitionibus* 43. 44. 45. 46. 47. 48. *demonſtrat ſingulas prædictas lineas Irrationales, ſolummodò poſſe diuidi in vno puncto, in ſua propria nomina, maius ac minus.*

### TERTIVM SENARIVM.

*In propoſitionibus* 49. 50. 51. 52. 53. 54. *Detexit inuentionem ſex linearum quæ ex binis nominibus dicuntur; nimirum primæ, ſecundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, ſextæ.*

### QVARTVM SENARIVM.

*In propoſitionibus* 55. 56. 57. 58. 59. 60. *Deſignauit differentias linearum Irrationalium primi ſenarij; docendo quænam linea Irrationalis ſit illa, quæ ſpatium ſub Rationali contentum, & ſub ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel ſexta.*

### QVINTVM SENARIVM.

*In propoſitionibus* 61. 62. 63. 64. 65. 66. *explicuit quáſnam latitudines Irrationales efficiant quadrata linearum ſex Irrationalium primi ſenarij, applicata ad lineam Rationalem.*

### SEXTVM SENARIVM.

*In propoſitionibus* 67. 68. 69. 70. 71. *Oſtendit lineam quamcumque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium linearum primi ſenarij, eſſe Irrationalem eandem illi, cui eſt commenſurabilis.*

### SEPTIMVM DENIQVE SENARIVM.

*In prop.* 72. & 73. *docuit differentiam aliam ſex prædictarum linearum Irrationalium primi ſenarij.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

### II.

*Dimidium cuiuſcumque lineæ Irrationalis primi Senarij eſt medium proportionale Arithmeticum, inter duo nomina aſſumpta lineæ è prædictis.*

SVmpta enim exempli gratia AB ex binis nominibus ſeu binomium, diuiſum in ſua Fig. 210.

 nomina

nomina AC, maius,& CB minus: diuiſaque bifariàm in D, tota AB: Dico eſſe AC ad AD, vt AD ad CB, in proportionalitate Arithmetica, in qua iuxta def. 32. digreſſionis 2. ad lib. 5. termini progrediuntur ſecundum eandem differentiam. Quis enim non videat AC maius nomen ſuperare AD dimidium totius AB, quantitate DC; & ipſummet AD vel DB dimidium excedere ipſum CB minus nomen, eadem quantitate DC: quare per cit. def. dimidium totius AB lineæ Irrationalis, erit medium proportionale Arithmeticum, inter eius duo nomina.

COROLLARIVM NOSTRVM

III.

*Dimidium cuiuſcumque lineæ Irrationalis primi Senarij eſt quoque Irrationalis linea eadem illi inter cuius nomina media exiſtit in proportionalitate Arithmetica.*

Fig.210. IN eodem exemplo. Cùm AD ſit commenſurabilis lineæ toti AB, in longitudine, vt puta ſub dupla; erit AD linea Irrationalis eadem ipſi AB, vti in prop. 67. 68. 69. 70. 71. demonſtrauimus.

Notandum eſt Euclidem acturum de ſeptem aliis ſenariis, hoc eſt de aliis ſex lineis Irrationalibus, quæ per detractionem oriuntur: de quibus etiam eadem proportione ſeruata demonſtrabit, quæ de aliis ſuperioribus ſeptem ſenariis. Porrò multæ huiuſmodi propoſitiones cenſeri poterunt definitiones, vt in aliis præcedentibus, proponit enim proprietates fluentes ab lineis detractis ab aliis, quas peculiari nomine ad diſtinctionem aliarum ſuperiorum denominat, eiſque competunt dictæ proprietates, ipſas conſtituentes in tali natura ſpecifica linearum.

## PROPOSITIO LXXIV.

Si à Rationali, Rationalis auferatur potentiâ tãtum commenſurabilis exiſtens toti: Reliqua Irrationalis eſt.
Vocetur autem Apotome.

Fig.211. SVppoſitio. Ab Rationali AB, detracta ſit Rationalis AC, potentiâ ſolum commenſurabilis ipſi toti AB: Dico reliquam BC eſſe Irrationalem, quæ vocari debet ex Euclide, Apotome, vel Reſiduum ex recentioribus.

Demonſtratio. Per lemm. 3. ad prop. 19. eſt vt AB ad AC, ita quadratum ex AB ad rectangulum ſub AB, AC; & ſunt AB, AC, longitudine incommenſurabiles ex datis; ergo per 10. prop. quadratum ex AB, erit incommenſurabile rectangulo ex AC, AB. Cùm vero AB, AC, dentur potentiâ tantum commenſurabiles, erũt quadrata eorum commenſurabilia, ergo per 16. propoſit. compoſitum ex ipſis dictis quadratis erit commenſurabile quadrato ex AB. Sed & rectangulo ſub AB, AC, eſt commenſurabile rectangulum bis ſub AB, AC; ergo per prop. 14. compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, erit incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. Eſt verò per 7. prop. libr. 2. compoſitum ex quadratis rectarum AC, AB, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato rectæ BC: igitur per coroll. propoſit. 17. & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, erit incommenſurabile quadrato rectæ BC. Quoniam ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, ſit Rationale, per 9. defin. eo quod commenſurabile ſit quadrato Rationali ex AB linea Rationali; erit quadratum rectæ BC, Irrationale, per defin. 10. & proinde recta ipſa BC Irrationalis per defin. 11. Vocanda verò eſt hæc linea Apotome iuxta Euclidis mentem, vel ſecundum recentiores Reſiduum. Si igitur ab Rationali detrahatur Rationalis potentia ſolum commenſurabilis toti; reliqua erit Irrationalis vocanda Apotome vel Reſiduum. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Poteſt hæc propoſitio ita dari. Si à maiori nomine eius quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome, vel Reſiduum.*

CVm enim AB, AC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles, erit per 37. propoſit. compoſita ex ipſis Irrationalis ex binis nominibus dicta, cuius maius nomen AB, & minus AC: detrahitur autem AC minus nomen ex maiori AB, ergo relinquetur BC Apotome vel Reſiduum. Fig. 211.

Hac eadem figura vti poterimus in ſequentibus prop. vſque ad 79. incluſiuè.

PRO-

## PROPOSITIO LXXV.

Si à Media, Media auferatur potentiâ tantum commenſurabilis exiſtens toti; quæ cum tota, Rationale contineat: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autē Mediæ Apotome prima.

Fig.211. SVppoſitio. Ab recta Media AB, detracta ſit Media AC, potentia ſolum ipſi toti AB commenſurabilis; ſitque rectangulum ſub AB, AC, contentum Rationale: Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem, vocandam Mediæ Apotomen primam.

Demonſtratio. Dantur rectæ AB, AC, potentiâ tantum commenſurabiles, erunt quadrata earum inter ſe commenſurabilia; & per prop. 16. compoſitum ex ipſis erit commenſurabile quadrato rectæ AC. Eſt verò quadratum ex AC, Irrationale ac Medium per 22. prop. ergo per coroll. propoſ. 24. compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit & Medium. Sed & quia datur rectangulum ſub AB, AC, Rationale, etiam per 9. defin. rectangulum bis ſub AB, AC, erit Rationale: Igitur per def. 10. incommenſurabilia erunt, compoſitum illud ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum bis ſub AB, AC. Sed per prop. 7. libr. 2. compoſito ex quadratis rectarum AC, AB, æquale eſt rectangulum bis ſub AB, AC, vnâ cum quadrato ex BC; ergo etiam rectangulum bis ſub AB, AC, vnâ cum quadrato ex BC, erit incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC, per prop. 14. Igitur per propoſ. 17. rectangulum bis ſub AB, AC, & quadratum BC, erunt incommenſurabilia. Igitur per defin. 10. cùm rectangulum bis ſub AB, AC, ſit Rationale, erit quadratum ex BC Irrationale, & proinde recta BC Irrationalis per lemma 1. ad propoſ. 20. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia relinquitur poſt detractionem minoris Mediæ ab maiore Media: & prima ad diſtinctionem alterius ſecundæ de qua in ſeq. prop. Ergo ſi à Media auferatur Media, &c. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Hoc præſens theorema ſic proponi potuiſſet.*
*Si à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.*

CVm enim AB, AC, ſint Mediæ potentiâ ſolum commēſurabiles, contineantque Rationale ex datis; erit per prop. 38. cōpoſita ex ipſis linea, Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferendo igitur AC nomen minus ex maiori AB, relinquetur BC, dicta Mediæ Apotome prima. *Fig.211.*

## PROPOSITIO LXXVI.

Si à Media, Media auferatur potentiâ tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

SVppoſitio. Ab recta AB Media, auferatur recta Media AC, potentiâ ſolum commenſurabilis toti AB; ſitque rectangulum ſub AB, AC, Medium: Dico reliquam rectam BC, eſſe Irrationalem, vocādamque ex mente Euclidis, Mediæ Apotomen ſecundam. *Fig.211.*

Demonſtratio. Quadrata rectarum AB, AC, commenſurabilia ſunt ex datis: quare per prop. 16. compoſitum ex iſtis quadratis erit commenſurabile vtrilibet dictorum quadratorum: Eſt verò vtrumque ipſorum Medium per prop. 22. coroll. noſtrum 3. ergo per coroll. propoſ. 24. compoſitum ex prædictis quadratis Medium erit. Præterea cùm detur rectangulum ſub AB, AC, Medium, eius duplum videlicet rectangulum bis ſub AB, AC, etiam Medium erit, per eit. coroll. prop. 24. Sed per prop. 7. libr. 2. compoſitum ex quadratis AB, AC, rectarum, æquale eſt rectangulo bis contento ſub AB, AC, vnâ cum quadrato ex BC: ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, ſuperabit rectangulum bis ſub AB, AC, quadrato rectæ BC: Verum tàm compoſitum ex quadratis illis, quàm rectangulum bis ſub AB, AC, Media ſunt oſtenſa; & per propoſ. 27. Medium non ſuperat Medium Rationali, ergo quadratum

ex BC non erit Rationale, ergo erit Irrationale; ideoque per lem. 1. ad propoſ. 21. recta BC, erit Irrationalis. Vocetur vero Mediæ Apotome ſecunda; Apotome quidem quia relinquitur poſt detractionē minoris Mediæ ab Media maiore; ſecunda vero ad diſtinctionem primæ, ab qua diſtinguitur, cùm tota & detracta Medium comprehendere debeant, quod poſterius eſt naturâ Rationali contento ab tota & detracta in ſuperiore propoſitione etiam Mediis, quæ ideo vocata eſt prima.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Theorema iſtud, etiam proponi potuiſſet hac ratione. Si à maiori nomine eius quæ ex binis Mediis ſecunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Media Apotome ſecunda.*

Fig. 111. QVia enim AB, AC, Mediæ ſunt lineæ, potentiâ ſolum commenſurabiles, continentque Medium, per coroll. 3. noſtrum ad prop. 22. erit compoſita recta ex ipſis Irrationalis quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur per prop. 39. cuiuſque maius nomen AB, & minus AC. Auferendo igitur ex AB, maiore, minus AC, relinquitur BC, Mediæ Apotome ſecunda.

## PROPOSITIO LXXVII.

Si à recta linea auferatur potentiâ incōmenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis erit. Vocetur autem Minor.

Fig. 111. SVppoſitio. Ab recta AB, altera ſit recta AC, potentiâ incommenſurabilis ipſi toti AB, & relinquatur CB; ſitque compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; & rectangulum ſub ipſis AB, AC, Medium: Dico reliquam CB eſſe lineam Irrationalem, vocandam Minorem.

Demonſtratio. Cùm detur compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum verò ſub AB, AC, Medium; erit per corollar. propoſit. 24, rectangulum bis ſub AB, AC, commenſurabile dicto rectangulo, etiam Medium, ideoque Irrationale per coroll. noſtrum ad 23. & per prop. 22. ac proinde per defin. 10. quodcumque ex his rectangulis erit incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum AB, AC. Eſt autem per prop. 7. libr. 2. compoſitum ex quadratis rectarum AC, AB, æquale rectangulo bis ſub AC, AB, vnâ cum quadrato ex CB; igitur per prop. 10. rectangulum bis ſub AB, AC, vnâ cum quadrato ex CB, erit incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC; & per coroll. prop. 17. compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, erit incommenſurabile quadrato ex CB. Datur vero compoſitum illud Rationale, ergo per def. 10. quadratum ex BC, illi compoſito incommenſurabile, erit Irrationale, & linea ipſa BC per lemma 1. ad prop. 21. erit Irrationalis, vocanda Minor ad diſtinctionem ſuperiorum, quia eſt minor, quam detracta.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Sic idem theorema potuiſſet proponi. Si à maiore nomine lineæ Maioris, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.*

CVm enim AB, AC, dentur incommenſurabiles potentia, faciantque compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, & quod ſub ipſis continetur Medium: erit per 40. prop. compoſita ex ipſis Irrationalis quæ vocatur Maior, eiuſque maius nomen AB, & minus AC. Auferendo ergo AC minus nomen ab Maiore AB, relinquetur CB minus nomen, ſeu linea vocanda Minor, ob iſtam rationem allatam. Fig. 111.

## PROPOSITIO LXXVIII.

Si ab recta auferatur recta potentiâ incōmenſurabilis toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

SVppoſitio. Ab recta AB, ablata ſit recta AC, potentia ipſi AB incōmenſurabilis; Fig. 111.
& ſit

& ſit compoſitum ex ipſarum AB, AC, quadratis, Medium; & rectangulum ſub ipſis AB, AC, Rationale: Dico reliquam CB, eſſe Irrationalem; vocandam cum Rationali Medium totum efficientem.

Demonſtratio. Quandoquidem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium eſt ex datis; illud erit Irrationale per coroll. noſtrum 2. ad prop. 23. Rectangulum verò ſub ipſis AB, AC, eiuſque duplum videlicet rectangulum bis ſub AB, AC, eſt Rationale ex hypotheſi, & per coroll. prop. 24. erit per def. 10. compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. Sed per propoſ. 7. libr. 2. compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, eſt æquale rectangulo bis ſub AB, AC, & ſimul quadrato ex BC; ergo & rectangulum bis ſub AB, AC, & ſimul quadratum rectæ BC, erit incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC, per prop. 14. Igitur per propoſ. 17. Rectangulum bis ſub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC, erit incommenſurabile quadrato rectæ BC. Quoniam igitur rectangulum bis ſub AB, AC, eſt Rationale, per lem. 4. propoſ. 19. erit per def. 10. quadratum rectæ BC Irrationale, & recta BC Irrationalis per 11. defin. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens; eo quod quadratum eius additum rectangulo bis ſub AB, AC, Rationali, efficit totum compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium totum. Si igitur ab recta &c. quod erat oſtendendum.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Theorema hoc ſic potuiſſet proponi. Si à maiori nomine eius quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.*

Fig. 211. CVm enim ſint potentiâ incommenſurabiles rectæ AB, AC, efficientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod verò continetur ſub ipſis Rationale; erit per 41. prop. compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ nuncupatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen eſt AB, minus verò AC: Auferendo ergo minus AC ab maiore AB, relinquitur BC, cum Rationali Medium totum efficiens.

## PROPOSITIO LXXIX.

Si à recta, recta auferatur potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

SVppoſitio. Ex recta AB ſit ablata recta AC, potentiâ ipſi AB incommnſurabilis; ſitque compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium; tùm etiam rectangulum ſub ipſis AB, AC, Medium, & incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum prædicto. Dico reliquam BC rectam eſſe Irrationalem, quæ vocetur cum Medio Medium totum efficiens. Fig. 211.

Demonſtratio. Per prop. 7. lib. 2. compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, eſt æquale rectangulo bis ſub AB, AC, & ſimul quadrato reliquæ CB; ergo compoſitum illud ex quadratis prædictis, ſuperabit quadrato CB rectæ, rectangulum bis ſub AB, AC: Compoſitum autem illud ex quadratis rectarum AB, AC, Medium ponitur; & per coroll. prop. 24. rectangulum bis ſub AB, AC, etiam Medium eſt, vt rectangulum ſub AB, AC: Ergo cùm per prop. 27. Medium non ſuperet Medium Rationali, erit quadratum rectæ CB Irrationale, & per lemma 1. prop. 21. recta ipſa CB Irrationalis. Vocanda verò eſt cum Medio Medium totum efficiens; quia eius quadratum cum rectãgulo ſub AB, AC, Medio, efficit totum compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium eſt oſtenſum, Medium.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Potuiſſet hac ratione proponi. Si à maiori nomine eius quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.*

QVia enim AB, AC ſunt potentiâ incommenſurabiles, faciuntque compo- Fig. 211.

ſitum ex ipſarum quadratis Medium, rectangulumque ſub ipſis Medium, & incommenſurabile compoſito ex prædictis quadratis; erit tota compoſita ex illis Irrationalis per prop. 42. quæ bina Media potens appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Demendo igitur minus AC, ex maiore AB, relinquetur CB, cum Medio Medium totum faciens.

## L E M M A.

Si idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem & ſecundam, qui inter tertiam & quartam; erit viciſſim idem exceſſus inter primam magnitudinem & tertiam, qui inter ſecundam magnitudinem & quartam.

SVppoſitio. Quatuor ſint magnitudines AB 6. CD 4. EF 8, GH 6, ſitque IB 2, exceſſus inter primam & ſecundam, æqualis exceſſui KF, inter tertiam & quartam: Dico eundem eſſe exceſſum inter primam AB & tertiam EF, atque inter ſecundam CD & quartam GH.

Demonſtratio. Quia IB eſt exceſſus inter AB & CD, erit AI æqualis ipſi AB: ſimili ratione erit EK æqualis ipſi GH. Igitur erit idem exceſſus inter AI & EK, qui inter CD & GH, quandoquidem iſtæ magnitudines illis ſint æquales relatiuè. Eſt verò per ax. 16. lib. 1. totorum AB, EF, exceſſus idem, qui inter ablata AI, EK, eo quod IB, KF, ponantur. Ergo erit idem exceſſus inter AB, EF primam & tertiam, qui inter CD, GH, ſecundam & quartam. ſicuti fuit propoſitum.

### COROLLARIVM.

***Quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, continuam: habebunt viciſſim Arithmeticam analogiam.***

## PROPOSITIO LXXX.

Apotomæ vna tantum congruit recta linea Rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

Fig. 212. SVppoſitio. Apotomæ AB, ſit Rationalis BC, potentiâ ſolum commenſurabilis toti AC: Dico ipſi AB Apotomæ nullâ aliam rectam ab BC, congruere Rationalem, quæ toti AC ſit potentiâ ſolum commēſurabilis.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit recta alia BD Rationalis congruat Apotomæ datæ AB, ita vt toti AD ſit potentia ſolum commenſurabilis. Iam quia datur Rationalis BC, erit AC, illi ſolum potentia commenſurabilis, Rationalis per 6. def. Rationales ergo ſunt AC, BC, potentiâ ſolum commenſurabiles. Simili diſcurſu erunt rectæ AD, BD, Rationales potentiâ ſolum commenſurabiles. Cùm autem per prop. 7. lib. 2. Compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale ſit rectangulo bis ſub AC, BC, & ſimul quadrato AB; ſuperabit compoſitum illud, rectangulum bis prædictum, quadrato rectæ AB: Eadem methodo, compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, ſuperare rectangulum bis ſub AD, BD, oſtendetur, quadrato rectæ AB: igitur erit idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & inter rectangulum bis ſub AC, BC; qui inter compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, & inter rectangulum bis ſub AD, BD; videlicet quadratum rectæ AB: erit per lemma præcedens idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & inter compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD; qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & inter rectangulum bis ſub AD, BD. Cùm autem AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles, erunt earum quadrata commenſurabilia, ideoque Rationalia, per 9. def. ergo etiam compoſitum ex ipſis, vtrique erit commenſurabile per prop. 16. ideoque Rationale per cit. 9. defin. Similiter Rationale probabitur compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD. Sed per coroll. prop. 27. exceſſus inter illa compoſita Rationalia prædicta, eſt ſpatium Rationale; ergo etiam exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, CB, & inter rectangulum bis ſub AD, BD, erit ſpatium Rationale. Et quoniam per prop. 22. rectangulum ſub AC, CB, potentia ſolum commenſurabilibus lineis, Medium eſt; tùm etiam rectangulum ſub AD, BD, potentiâ ſolum commenſurabilibus lineis, Medium eſt; & per coroll. prop. 24. eorum dupla ſunt Media etiam; & per prop. cit. 27. Medium non ſuperat Medium Rationali, ſed Irrationali: Exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, CB, & inter rectangulum bis ſub AD, BD, nimirum quadratum ex AB Rationale iam probatum, erit Irrationale. Hæc pugnantia indicant poſitionem aduerſarij contradicentem huic propoſitioni eſſe falſam, & propoſitionem veram.

PRO-

## PROPOSITIO LXXXI.

Mediæ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Rationale continens.

Fig. 212. SVppoſitio. Data ſit Mediæ Apotome prima AB, ipſique congruens BC Media, toti AC potentiâ ſolum commēſurabilis; ſitque rectangulum ſub tota AC, & BC, Rationale. Dico ipſi AB, aliam Mediam non congruere, toti AC potentiâ ſolum commenſurabilem, quæque cum tota AC contineat ſpatium Rationale.

Demonſtratio. Congruat ſi fieri poſſit alia Media BD, cum circumſtantiis prædictis. Cumque BC Media detur potentia ſolum commenſurabilis ipſi AC, erit per prop. 24. AC Media: Mediæ ergo ſunt AC, BC, potentiâ ſolum commenſurabiles. Iam verò quia vti demonſtrauimus in præcedēte prop. idem eſt exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, CB, & rectangulum bis ſub AD, BD; eſtque hic exceſſus ſpatium Rationale, inter hæc rectangula; ergo exceſſus inter dicta compoſita ex quadratis prædictis erit ſpatium Rationale: quæ probabuntur vt in anteced. propoſitione. Verum quia rectæ AC, BC, ſunt Mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles, erunt ipſarum quadrata commenſurabilia & Media; ergo per prop. 16. & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum erit commenſurabile, ideoque Medium per coroll. prop. 24. Ex eiſdem principiis probabitur compoſitum ex quadratis rectangulum AD, BD, eſſe Medium. Sed per prop. 27. cùm Medium ſuperet Medium Irrationali; exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, erit ſpatium Irrationale, conceſſum antea Rationale: hæc pugnantia conſequentia ad poſitionem contradicentem huic propoſitioni, manifeſtam faciunt falſitatem poſitionis, & veritatem propoſitionis.

## PROPOSITIO LXXXII.

Mediæ Apotomæ ſecundæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.

SVppoſitio. Data ſit Mediæ Apotome ſecunda AB, eique congruat Media BC, toti AC potentiâ ſolum commenſurabilis; rectangulumque ſub tota AC, & BC data, ſit Medium: Dico ipſi AB Mediæ Apotomæ ſecundæ non conuenire aliam Mediam, quæ toti AC ſit commenſurabilis, rectangulumque efficiat cum tota AC, Medium. Fig. 213.

Demonſtratio. Conueniat ſi fieri poſſit alia BD Media, toti AD ſolum potentia commenſurabilis, ſitque rectangulum Medium ſub tota AD & BD. Expoſitaque ſit Rationalis EF, & ad eam applicatum rectangulum EG, æquale compoſito ex quadratis rectarum AC, BC, per lemma noſtrum ad prop. 26. vel lemma noſtrum 1. ad prop. 22. tùm per eadem lemmata ad eādem EF, aliud EI rectangulum applicatum æquale quadrato rectæ AB; tùm aliud rectangulum EL æquale compoſito ex quadratis rectarum AD, BD, applicatum ad eandem EF. Iam quia per prop. 7. libr. 2. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, & ſimul quadrato rectæ AB; erit per 1. ax. lib. 1. KG rectangulum æquale rectangulo bis ſub AC, BC. Ex eiſdem principiis erit KL rectangulum æquale rectangulo bis ſub AD, BD. Cumque BC ponatur Media, erit AC potentia ſolum ei commenſurabilis etiam Media per propoſ. 24; igitur AC, & BC erunt Mediæ, & potentia ſolum commenſurabiles; earumque quadrata commenſurabilia; & Media per coroll. noſtrum 3. ad prop. 22. Ergo per prop. 16. & compoſitum ex quadratis iſtis rectarum AC, BC, vtrique eorum erit commenſurabile; ideoque per coroll. propoſ. 24. etiam Medium: & per coroll. idem, rectangulum EG, illi compoſito æquale, erit etiam Medium; quod cùm ſit applicatum ad Rationalem EF, erit EH Rationalis, ipſi EF Rationali longitudine incommenſurabilis per prop. 23. Prætereà cùm ſit rectangulum ſub AC, BC, Medium ex datis, erit eius duplum, etiam Medium per coroll. prop. 24. quod cùm ſit ad Rationalem KI vel EF applicatum, erit KH Rationalis, ipſi KI Rationali vel EF, longitudine in-

commenſurabilis, per eandem cit. prop. 23. Cùm ergo AC,BC, longitudine ſint incommenſurabiles ex datis; eſtque per lemm. 3. ad propoſ. 19. vt AC ad BC, ita quadratum ex AC ad rectangulum ſub AC, BC; erit per prop. 10. quadratum ex AC, incommenſurabile rectangulo ſub AC, BC: Eſt verò quadrato rectæ AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, videlicet rectangulum EG, (nam rectæ AC,BC, cùm dentur potentiâ ſolum commenſurabiles, erunt earum quadrata commenſurabilia; ideoque compoſitum ex his quadratis, vtrique eorum erit commenſurabile, per 16. propoſ.) & rectangulo ſub AC,CB, commenſurabile eſt eius duplum, id eſt KG: ergo per prop. 14. EG & KG erunt incommenſurabilia. Sed per prop. 1. lib. 6. rectæ EH,KH, eandem habent rationem cum EG, KG incommenſuiabilibus rectangulis; ergo per propoſ. 10. rectæ EH,KH, erunt longitudine incommenſurabiles, quæ ſunt antea oſtenſæ Rationales: Rationales ergo ſunt EH,KH, potentia tantum commenſurabiles. Igitur quia ex Rationali EH, auſertur Rationalis KH, potentia ſolum commenſurabilis ipſi EH, erit per prop. 74. EK Apotome, & illi congruens KH. Eodem modo probabimus EK eſſe Apotomen, & illi congruentem KM. Ergo duæ rectæ lineæ Rationales potentiâ ſolum commenſurabiles toti, conuenient Apotomæ vni, contra prop. 80. abſurdum hoc proueniens ex poſitione contradicente huic propoſitioni, manifeſtam reddit falſitatem poſitionis, ac veritatem huius propoſitionis.

## PROPOSITIO LXXXIII.

Minori vna tantum congruit recta linea, potentiâ commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciẽs compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur Medium.

Fig. 212. SVppoſitio. Data ſit Minor AB, & illi congruens BC, toti AC potentiâ incommenſurabilis, efficiẽſque compoſitum ex quadratis ipſarum AC,BC, Rationale; rectangulumque ſub ipſis AC,BC, Medium: Dico ipſi Minori AB, non competere aliam rectam cum conditionibus datis, diuerſam ab BC. Sed eſto ſi fieri poſſit alia BD.

Demonſtratio. Quia, ſicuti in propoſ. 80. probatum eſt, idem eſt exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarũ AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD; qui inter rectangulum bis ſub AC,BC, & rectangulum bis ſub AD, BD: & per coroll. prop. 27. exceſſus inter dicta Rationalia compoſita, eſt ſpatium Rationale; igitur exceſſus inter dicta rectangula bis ſumpta, erit ſpatium Rationale. Sed quia rectangulum ſub AC, BC, detur Medium, erit per coroll. prop. 24. rectangulum bis ſub AC,BC, Medium: eodemque modo cùm rectangulum ſub AD, BD, detur Medium, erit per cit. coroll. rectangulum bis ſub AD, BD, Medium: Ergo cùm per coroll. propoſ. 24. Medinm ſuperet Medium, Medio, exceſſus inter dicta rectangula bis ſumpta erit Medium, conceſſus antea Rationale. Hoc abſurdum condemnat falſitatis poſitionem contradicentem huic propoſitioni quæ ideo vera erit.

## PROPOSITIO LXXXIV.

Ei quæ cũ Rationali Medium totum facit, vna tantũ congruit recta linea potentia incommẽſurabilis exiſtens toti; & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SVppoſitio. Data ſit recta AB, cum Rationali Medium totum faciẽs, eique congruat recta BC, toti AC potẽtiâ incommenſurabilis, facienſque compoſitum ex quadratis rectarum AC; BC, Medium; rectangulumque ſub ipſis AC, BC, Rationale: Dico ipſi AB rectæ non conuenire aliam rectam diuerſam ab BC, quæ prædicta efficiat cum circumſtantia adhibita. Fig. 212.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit alia recta BD, congruens datæ AB, & prædicta efficiens cum conditione præerequiſita. Eodem modo probabimus vt in propoſ. 80. eundem eſſe exceſſum inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD; qui eſt inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD: Eſtque ſicuti in propoſ. 81. probaui-

probauimus, huiuſmodi exceſſus ſpatium Rationale inter prædicta rectangula bis ſumpta, ergo etiam erit inter dicta compoſita, ſpatium Rationale; ſed vtrumque ex his compoſitis eſt Medium ex datis, & per prop. 27. Medium non ſuperat Medium Rationali; ergo hic exceſſus non erit ſpatium Rationale, conceſſus ſpatium Rationale. hæc pugnantia indicant falſitatem poſitionis contradicentis huic propoſitioni, quæ ideo vera erit.

## PROPOSITIO LXXXV.

Ei quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum cõgruit recta linea, potentiâ incõmenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

Fig. 214. SVppoſitio. Data ſit recta AB, efficiens cum Medio Medium totum; & data recta BC ipſi AB congruens, & toti AC potentiâ incommenſurabilis, efficiens compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; tùm rectangulum ſub ipſis AC, BC, Medium & incommenſurabile compoſito prædicto ex earundem rectarum AC, BC, quadratis: Dico ipſi AB non conuenire aliam rectam cum data conditione, & efficiens prædicta.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit, alia recta BD conueniat datæ AB, diuerſa ab data BC, eadem prædicta efficiens cum conditionibus datis. Et facto apparatu eodem qui in propoſ. 82. & proinde eadem figurâ inſeruire poterit. Quia compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, datur Medium, erit & EG ſpatium illi æquale, etiam Medium per coroll. prop. 24. ergo recta EH Rationalis erit, longitudine ipſi Rationali EF, incommenſurabilis, per prop. 23. Inſuper quia datur rectangulum ſub AC, BC, Medium, erit & eius duplum KG etiam Medium per cit. coroll. prop. 24. tùm per cit. prop. 23. recta KH erit Rationalis, longitudine ipſi EF Rationali incommenſurabilis. Cumque KG commenſurabile ſit rectangulo ſub AC, BC, eo quod illud ſit huius duplum; & rectangulum ſub AC, BC, incommenſurabile detur compoſito ex quadratis rectarum AC, BC; erit per propoſ. 14. KG, eidem compoſito, id eſt ipſi EG, incommenſurabile: ſed per prop. 1. libr. 6. rectæ EH, KH, eandem habent proportionem cum ſpatiis EG, KG; ergo per prop. 10. rectæ EH, KH, erunt longitudine incommenſurabiles, quæ oſtenſæ ſunt Rationales: Rationales ergo ſunt rectæ EH, KH, potentiâ ſolum commenſurabiles. Igitur quia ex Rationali EH, demitur Rationalis KH, potentiâ ſolum commenſurabilis ipſi EH; erit per prop. 74. rectâ EK, Apotome, & ei congruens KH. Eodem artificio probabimus rectam EK eſſe Apotomen, & ei congruentem eſſe KM. Ergo Apotomæ vni, duæ conuenient rectæ, contra propoſ. 80. hoc abſurdum conſequens ad poſitionem contradicentem huic propoſitioni, indicat ipſam poſitionem eſſe falſam, & propoſitionem veram.

# DEFINITIONES TERTIÆ.

*Expoſita Rationali, & Apotoma; ſi tota plus poſſit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.*

HOc debet intelligi in ſequentibus tribus definitionibus.

I.

*Si quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis: Vocetur Apotome prima.*

II.

*Si verò congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis. Vocetur Apotome ſecunda.*

III.

*Si neque tota, neque congruens, expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis. Vocetur Apotome tertia.*

*Præterea. Si tota plus poſſit quàm congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.*

Hoc

HOc debet intelligi in ſequentibus tribus definitionibus. 4.5.6.

I V.

*Si quidem tota expoſita Rationali ſit longitudine commenſurabilis. Vocetur Apotome quarta.*

V.

*Si verò congruens expoſita Rationali ſit longitudine commenſurabilis. Vocetur Apotome quinta.*

V I.

*Si neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis. Vocetur Apotome ſexta.*

VIdes colligi hunc numerum ſex Apotomarum per detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus ſex linearum quæ ex binis nominibus dicuntur.

## PROPOSITIO LXXXVI.

Inuenire primam Apotomen.

## PROPOSIT. LXXXVII.

Inuenire ſecundã Apotomen.

## PROPOS. LXXXVIII.

Inuenire tertiam Apotomen.

## PROPOSIT. LXXXIX.

Inuenire quartam Apotomen.

## PROPOSITIO XC.

Inuenire quintam Apotomen.

## PROPOSITIO XCI.

Inuenire ſextam Apotomen.

Fig.215. OMnes iſtas propoſitiones reducemus ad praxim vnicam, hac methodo, ac demonſtrabimus.

Sit reperienda exempli gratia Apotome prima. Reperiatur per propoſ. 49. Recta ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen ſit AC, & minus CB: tùm per propoſ. 3. libr. 1. ex maiori nomine AC, detrahatur recta CD æqualis ipſi CB minori nomini: Dico AD eſſe primam Apotomen.

Demonſtratio. quia per prop. 37. ſunt AC, BC, Rationales potentiâ ſolùm commenſurabiles, erunt etiam AC, DC, etiam Rationales & potẽtiâ ſolum commenſurabiles, vtpotè ipſis æquales relatiuè: erit igitur per prop. 74. recta AD Apotome. Et quoniam AC plus poteſt ex natura ſua quàm CB, vel quam DC, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, Rationali expoſitæ longitudine commenſurabilis, iuxta def. 1. ſecundarum; erit ex def. 1. tertiarum recta AD, prima Apotome. Reperimus ergo primam Apotomen, ſicuti fuit propoſitum.

Alias Apotomas reperiemus aſſumendò alias rectas ex binis nominibus eodem ordine, & reliqua præcepta ſeruando; & demonſtrabimus intentum applicando def. proprias, & propoſitiones, vti in exemplo allato fecimus.

## PROPOSITIO XCII.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima: Recta linea ſpatium potens, Apotoma eſt.

SVppoſitio. Spatium AC datum ſit contineri ſub Rationali AB, & Apotoma prima AD: Dico rectam lineam ſpatium AC potentem, eſſe Apotomam. Fig.216.

Conſtructio. Sit ipſi AD congruens recta DE; erunt per def. 1. tertiarum, rectæ AE, DE, Apotomæ primæ, Rationales potentiâ ſolum commenſurabiles; & tota AE longitudine commenſurabilis Rationali AB; & ipſa AE tota plus poterit quàm cõgruens DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Præterea per prop. 10. libr. 1. ſecetur DE bifariàm in F; & per lemma 2. ad prop. 17. quadrato rectæ FE, id eſt quartæ parti quadrati rectæ DE, applicetur rectangulum ad rectam AE, æquale ſub AG, GE, deficiens figura quadrata. Iam quia AE plus poteſt quàm DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; erunt per propoſ. 18. rectæ AG, GE, longitudine cõmenſurabiles; ideoque per prop. 16. & vtraque erit longitudine commenſurabilis toti AE: ſed AE Rationali

AB

AB & longitudine commenſurabilis, ergo per propoſ.12. vtraque AG, GE, ipſi AB eſt commenſurabilis longitudine; & proinde per def.6. Rationales ambæ. Inſuper per propoſ.31.li.1.ſi ducãtur rectæ GH,EI,parallelæ ipſi AB; occurrentes ipſi BC productæ in H, & I, reſultabunt per prop.20. rectangula AH, GI, contenta ſub duabus Rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationalia. Ad hæc, quoniam vtraque rectarum DF, FE, longitudine cõmenſurabilis eſt ipſi DE, & DE longitudine eſt incommenſurabilis Rationali AB, (eo quod ſi eſſet DE longitudine cõmenſurabilis ipſi AB Rationali, cùm AE ſit eidem AB longitudine commenſurabilis,eſſent iuxta prop.12. AE,DE, longitudine commenſurabiles, quæ ponuntur potentiâ ſolum commenſurabiles, quod abſurdum eſt.) erit per prop.14. vtraque rectarum DE, FE, ipſi AB longitudine incommenſurabilis. Tum quia vtraque rectarum DF,FE, Rationali DE commenſurabilis, eſt Rationalis per def.6.erunt tàm AB,DF,quàm AB, FE, Rationales potentiâ ſolum commenſurabiles. Igitur FK,ipſi AB parallela ducenda per prop.31. lib.1. efficiet rectangulum DK; & vtrumque rectangulum DK, FI, continebitur per prop.22.ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium. Porrò per prop.vltimam lib.2. fiat quadratum LM æquale ipſi rectangulo AH;& ipſi GI rectanguloquadratum NO æquale,& iſta quadrata communem angulum LPM obtineant; erunt per prop.26.lib.6. circa eandem diametrum PQ. Quare completa figura vti videre eſt, ſic progrediemur in apparatu iſto ad demonſtrationem. Quoniam ex conſtructione rectangulum ſub AG,GE,æquale eſt quadrato rectæ FE; erunt per prop.17. libr.6. tres rectæ lineæ AG,FE,GE,proportionales. Cumque per 1.prop.lib.6.rectangula AH,FI,GI,eandem cum illis lineis proportionalibus obtineant rationem, erit FI medium proportionale inter AH,GI, id eſt inter quadrata LM, NO, illis æqualia, per prop.7. libr.5. ſed eſt per lem.prop.54. eſt inter LM,NO,medium proportionale LO,ergo per 9.prop.lib.5.rectangula FI, LO, erunt æqualia. Verùm per prop.36. ipſi FI, æquale eſt DK, & ipſi LO æquale eſt MN;ergo totum DI,toti gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Sed eſt totum AI per cõſtructionem æquale quadratis LM, NO; ergo & reliquum AC, reliquo quadrato TR, æquale erit per 3.ax.libr. 1.Igitur recta TS poterit ſpatium AC.Dico igitur rectam TS eſſe Apotomen.

Demonſtratio. Cùm probata ſint Rationalia ſpatia AH, GI, erunt illis æqualia LM, NO, quadrata, etiam Rationalia per lem.4. ad prop.19. ideoque rectæ TO, SO, Rationales per 6.defin. Præterea cùm FI ſit probatum Medium, erit LO illi æquale, Medium, per prop.24.corollarium. Incommenſurabilia ergo erunt LO, NO, cùm vnum ſit Rationale,aliud verò Irrationale. Et quia rectæ TO, SO, eandem habent rationem cum LO, NO,ſpatiis, per 1.prop.lib.6.erunt per prop. 10.rectæ TO,SO,longitudine incommenſurabiles:& propterea iuxta prop.74. recta TS Apotoma erit. Ergo ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, &c. quod erat demonſtrandum.

Eadem figura vti poterimus in ſequentibus prop. vſque ad 97.incluſiuè.

## PROPOSITIO XCIII.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali & Apotoma ſecũda: Recta linea ſpatium potens, Mediæ & Apotome prima.

SVppoſitio. Datum ſit ſpatium AC comprehendi ſub AB Rationali & Apotoma ſecunda AD: Dico rectam potentem ſpatium AC,eſſe Mediæ Apotomen primam. *Fig.216.*

Conſtructio. Eſto rectæ AD, congruens recta DE:erunt per defin.2.tertiarum, rectæ AE,DE, Apotomæ ſecundæ, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; & congruens DE longitudine commenſurabilis Rationali AB;tùm AE plus poterit quàm DE,quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Iam verò per prop.10.libr.1. diuidatur bifariàm in F recta DE, & reliqua fiant vti in propoſ. præcedente 92. Erunt eodem modo vti probauimus in ipſa conſtructione præcedentis propoſitionis,rectæ AG,GE,longitudine commenſurabiles,per prop.18.& proinde per prop.16. vtraque illarum erit toti AE longitudine commenſurabilis. Eſt verò AE longitudine incommenſurabilis Rationali AB; (nam ſi eſſet commenſurabilis longitudine, cùm DE eidem AB detur longitudine commenſurabilis,eſſent iuxta prop.12. rectæ AE,DE, commenſurabiles longitudine, quæ ponuntur potentiâ tantum commenſurabiles, quod abſurdum eſt.) ergo vtraque rectarum AG,GE, erit longitudine incommenſurabilis eidem AB Rationali. Sed etiam vtraque rectarum AG,GE, Rationali AE commenſurabilis oſtenſa, ergo per def. 6. Rationales erunt. Rationales igitur ſunt rum AB, AG,quàm AB,GE, potẽtiâ ſolum commenſurabiles.

ſurabiles: quare iuxta prop. 22. rectangulum vtrumque AH, GI, comprehenſum ſub Rationalibus tantum potentia commenſurabilibus, Medium erit. Inſuper quoniam vtraque rectarum DF, FE, & ipſi DE longitudine commenſurabilis, & datur DE, Rationali AB longitudine commenſurabilis, erit per coroll. prop. 12. vtraque dictarum Rationali AB longitudine commenſurabilis, ideoque Rationales ambæ per def. 6. Igitur per prop. 20. vtrumque rectangulum DK, FI, ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus comprehenſum, erit Rationale. Denique vt in ſuperioris propoſitionis apparatu, demonſtrabitur recta TS potens eſſe ſpatij AC. Quare Dico rectam TS eſſe Mediæ Apotomen primam.

Demonſtratio. Cùm rectæ AG, GE, ſint longitudine commenſurabiles; & per prop. 1. libr. 6. rectangula AH, GI, eandem cum illis obtineant rationem; erunt AH, GI, commenſurabilia per prop. 10. ideoque quadrata LM, NO, illis æqualia, etiam commenſurabilia erunt, per 7. prop. libr. 5. quare latera illorum TO, SO, ſaltem potentiâ erunt commenſurabilia. Sunt vero ipſæ rectæ TO, SO, Mediæ, per coroll. noſtrum 3. ad propoſ. 22. eoquod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia ſint, & Media iuxta coroll. prop. 24. Et quia FI, vel ſibi æquale LO, Rationale eſt, ideoque incommenſurabile Medio NO, erunt per 10. prop. rectæ TO, SO, eandem cum illis habentes rationem iuxta prop. 1. lib. 6. longitudine incommenſurabiles. Cùm igitur eædem rectæ TO, SO, ſint Mediæ, & commenſurabiles, erunt ipſæ Mediæ potentiâ tãtum commenſurabiles: continent autem LO Rationale oſtenſum; ergo per propoſ. 75. rectæ TS erit Mediæ Apotoma prima. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, &c. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XCIV.

### Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia: Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome ſecunda.

Fig. 216. SVppoſitio. Datum ſit ſpatium AC, contentum ſub Rationali AB, & Apotoma tertia AD: Dico rectam potentem ſpatium AC, eſſe Apotoman ſecundam Mediæ.

Conſtructio. Sit DE congruens recta rectæ AD: erunt ex definitione 3. tertiarum, AE, DE, Rationales potentiâ ſolum commenſurabiles, neutraque ipſarum, longitudine commenſurabilis Rationali AB; & AE plus poterit quàm DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Et per prop. 10. lib. 1. diuidatur in F, bifariàm rectæ DE, & reliqua fiant, vti in conſtructione prop. 92. Eruntque vt ibi, AG, GE, longitudine inter ſe commenſurabiles; ideoque per prop. 16. vtraque toti AE erit longitudine commenſurabilis. Eſt verò AE data incommenſurabilis longitudine Rationali AB; ergo & vtraque AG, GE, per prop. 14. erit eidem AB longitudine incommenſurabilis. Cùm ergo vtraque AG, GE, per def. 6. ſit Rationalis, quia commenſurabilis Rationali AE; erunt tàm AB, AG, quàm AE, GE, Rationales, potentiâ ſolum commenſurabiles; ideoque per propoſit. 22. vtrumque rectangulorum AH, GI, Medium erit. Inſuper quoniam DE longitudine datur incommenſurabilis Rationali AB, erit etiam vtraque DF, FE, ipſi DE longitudine incommenſurabilis, ipſi AB per prop. 14. longitudine incommenſurabilis. Igitur quia vtraque DF, FE, Rationali DE commenſurabilis, ſit per defin. 6. Rationalis; erunt tam AB, DF, quàm AB, FE, Rationales potentiâ ſolum commenſurabiles; ideoque vtrumque rectangulorum DK, FI, erit per prop. 22. Medium. Eodem modo probabimus vt in prop. 92. rectam TS poſſe ſpatium AC. Quare aſſero rectam TS, eſſe Apotomam ſecundam Mediæ.

Demonſtratio. Cum ſint oſtenſa Media AH, GI, erunt quadrata LM, NO, illis æqualia, etiam Media, per coroll. prop. 24. Et quoniam AH, GI, eandem habentes rationem quam AG, GE, per prop. 1. libr. 6. quæ commenſurabiles ſunt probatæ; erunt ipſa AH, GI, per prop. 10. commenſurabilia; & quadrata LM, NO, illis æqualia, etiam commenſurabilia. Quare rectæ TO, SO, commenſurabiles erunt ſaltem potentia. Sed quia AE, DE, potentia ſunt ſolum commenſurabiles cùm ſint longitudine incommenſurabiles; eſtque ipſa GE probata commenſurabilis rectæ AE, & ipſi DE commenſurabilis longitudine eſt FE; erunt per coroll. propoſit. 14. rectæ GE, FE, longitudine incommenſurabiles: ſed per prop. 1. libr. 6. GI, FI, rectangula eandem obtinent cum illis rationem, vel æqualia prædictis NO, LO; ergo per propoſ. 10. erunt incommẽſurabilia NO, LO. Inſuper quia NO, LO, eãdem habent rationem quàm TO, SO, per cit. prop. 1. libr. 6. & illa ſunt incommenſurabilia, erunt rectæ TO, SO, erunt longitudine incommenſurabiles per prop. 10. Sed eædem rectæ TO, SO, ſunt oſtenſæ Mediæ & commenſurabiles; ergo rectæ TO, SO, Mediæ ſunt, & potentia ſolum commẽſurabiles.

Quia

Quia denique TO, SO, continent Medium LO, quia LO æquale eſt ipſi FI, Medio vti probauimus in prop.92.erit & LO Medium per coroll.prop.24. erit per propoſ.76. recta TS, Apotoma ſecunda Mediæ. Si ergo ſpatium, &c. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XCV.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta: Recta linea ſpatium potens, Minor eſt.

Fig.216. SVppoſitio. Spatium AC datum ſit contineri ſub AB Rationali, & AD Apotoma quarta: Dico rectam potentem ſpatium AC, eſſe Minorem.

Conſtructio. Sit rectæ AD congruens recta DE: erunt ex def.4.tertiarum, rectæ AE, DE, Rationales potentiâ ſolùm commenſurabiles; & AE longitudine commenſurabilis Rationali AB; & AE plus poterit quàm DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Tùm per propoſ.10.libr.1. Diuidatur in F biſariàm recta DE; & reliqua perficiantur vti in propoſ.92. Erunt per propoſ.19. AG, GE, incommenſurabiles longitudine, quia AE plus poteſt quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad AE applicatum eſt rectangulum ſub AG, GE, æquale parti quartæ ex DE, deficienſque figura quadrata. Et quoniam AE Rationalis eſt, & Rationali AB longitudine commenſurabilis; erit iuxta propoſ.20: rectãgulum AI, Rationale. Inſuper quia DE Rationalis eſt, & Rationali AB longitudine incommenſurabilis, erit per 22.propoſ. DI, ideoque eius dimidium FI, Medium. Præterea quia AG, GE, ſunt longitudine incommenſurabiles, incommenſurabilia erunt per propoſ.10. rectangula AH, GI, quia per propoſ.1. libr.6. eandem cum illis obtinent rationem. Simili ratione probabitur recta TS poſſe ſpatium AC. Quare pronuntio rectam TS eſſe Minorem.

Demonſtratio. Rectangulo AI eſt æquale compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, per conſtructionem; illud verò fuit oſtenſum Rationale; ergo per lemm.4. ad propoſ.19. & compoſitum illud erit Rationale. Præterea FI rectangulum eſt probatum Medium, erit ergo LO illi æquale contentum ſub TO, SO, Medium per corollarium propoſit.24. Medium. Ad hæc, AG, GI incommenſurabilia ſunt oſtenſa, ergo quadrata LM, NO, illis æqualia, erunt incommenſurabilia; ideoque rectæ TO, SO, potentia incommenſurabiles. Quare cùm rectæ TO, SO, ſint potentia incommenſurabiles, ſitque compoſitum ex quadratis ipſarum Rationale; rectangulum verò ſub ipſis Medium, erit per propoſ.77. reliqua TS, Minor. Si igitur ſpatium, &c. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XCVI.

Si ſpatium cõtineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens, eſt quæ cum Rationali Medium totum efficit.

SVppoſitio. Datum ſit ſpatium AC contineri ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD: Dico rectam potentem ſpatium AC, eſſe eam quæ cum Rationali Medium totum facit. Fig.216.

Conſtructio. Sit rectæ AD, congruens recta DE, erunt per defin. 5. tertiarum, rectæ AE, DE, Rationales potentiâ tantum commenſurabiles; & DE, Rationali AB commenſurabilis longitudine; tùm AE plus poterit quàm DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Præterea per propoſit.10. libr.1. ſecetur biſariàm in F, recta DE; & reliqua perficiantur vt in conſtructione propoſit. 92. Erunt ergo vti in præcedente propoſit. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quoniam AE Rationalis, longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB, prout oſtendimus in propoſ. 93. erit rectangulum AI Medium per propoſit. 22. Etiam quia DE Rationalis eſt, & Rationali AB longitudine commenſurabilis, erit per prop. 20. DI, ideoque eius dimidium FI, Rationale. Denique erunt vt in præced.propoſit.95. AH, GI, incommenſurabilia; poteritque vti probatum eſt in propoſit.92. recta TS ſpatium AC. Vnde dico rectam TS, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum conſtituit.

Demonſtratio. Oſtendimus AI eſſe Medium, ergo per corollar. propoſit. 24. illi æquale compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, erit Medium. Eodem modo FI Rationale oſtendimus eſſe, ergo per lemm. 4. ad propoſit. 19. illi æquale rectangulum ſub TO, SO, erit Rationale. Sunt autem in anteced. propoſ. oſtenſæ rectæ TO, SO, potentiâ incommenſurabiles, quod ap-

plicari debet huic prop. igitur cùm ita ſit, & compoſitum ex ipſarum quadratis ſit Medium; rectangulum verò ſub ipſis Rationale; erit per propoſit. 78. reliqua TS, illa, quæ cum Rationali Medium totum conſtituit. Igitur ſi ſpatium, &c. quod erat explicandum.

## PROPOSITIO XCVII.

### Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta: Recta linea ſpatium potens, eſt quæ cum Medio Medium totum facit.

*Fig. 216.* SVppoſitio. Datum ſit ſpatium AC contentum ſub AB Rationali, & AD Apotoma ſexta: Dico rectam potentem ſpatium AC, eſſe illam quæ cum Medio Medium totum conſtituit.

Conſtructio. Sit rectæ AD congruens recta DE: erunt per defin. 6. tertiarum, AE, DE, Rationales, potentiâ tantum commenſurabiles; & neutra ipſarum Rationali AB commenſurabilis longitudine; & AE plus poterit quàm DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Præterea per prop. 10. libr. 1. diuidatur in F bifariàm recta DE, & reliqua præſtentur vt in conſtructione propoſ. 92. Erunt vti in propoſ. 95. demonſtrauimus AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et cùm tàm AE quàm DE ſint Rationales, & Rationali AB incommenſurabiles longitudine; erit per prop. 22. tàm AI, quàm DI, ideoque huius dimidium FI, Medium. tàm vt in propoſ. 95. AH, GI, erunt incommenſurabilia. Cumque per propoſ. 1. libr. 6. ſit AI, DI, vt AE, DE potentia ſolum commenſurabiles, erunt per prop. 10. AI, DI, incommenſurabilia. Cumque DI, FI; commenſurabilia ſint, erit per propoſit. 14. FI, ipſi AI incommenſurabile. Demonſtrabitur etiam vt in propoſit. 92. recta TS, poſſe ſpatium AC. Quare dico rectam TS, eam eſſe quæ cum Medio Medium totum facit.

Demonſtratio. Cùm AI ſit Medium, erit illi æquale compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, Medium per corollar. propoſ. 24. Simili ratione FI Medium eſt, ergo rectangulum LO ſub TO, SO, illi æquale, erit etiam Medium. Præterea cùm FI, ipſi AI ſit incommenſurabile; erit LO, ſub TO, SO, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum TO, SO, ipſi AI æquale. Demùm TO, SO, erunt potentiâ commenſurabiles vti oſtendimus in propoſ. 95. Quia igitur TO, SO, ſunt potentiâ incommenſurabiles; & compoſitum ex quadratis ipſarum, Medium; & rectangulum ſub ipſis, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: erit reliqua TS per prop. 79. ea quæ cum Medio Medium totum facit. Si igitur ſpatium, &c. quod erat probandum.

## PROPOSITIO XCVIII.

### Quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum; latitudinem facit Apotomen primam.

SVppoſitio. Data ſit Apotome AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Rationales potentiâ ſolum commenſurabiles: & per lemma noſtrum 1. ad propoſ. 22. ad Rationalem DE, applicatum rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG: Dico DG eſſe Apotomen primam. *Fig. 217.*

Conſtructio. Ad eandem DE applicetur per cit. lemm. rectangulum DH æquale quadrato ex AC, & ad HI aliud IK rectangulum æquale quadrato ex BC; ita totum DK æquale erit compoſito ex quadratis rectarum AC, CB. Et quia per propoſ. 7. libr. 2. compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, CB, vnà cum quadrato rectæ AB; ſi ex illis auferantur æqualia, videlicet quadratum ex AB, & rectangulum DF; relinquentur per 3. axio. libr. 1. æqualia GK, & rectangulum bis ſub AC, CB. quare ſi per propoſ. 10. libr. 1. recta GL biſariàm in M ſecetur, ducaturque MN parallela ipſi DE per prop. 31. libr. 1. erit MK rectangulum æquale rectangulo ſub AC, CB. Dantur autem Rationales AC, CB, erunt quadrata earum Rationalia, ideoque commenſurabilia per defin. 9. ſed per prop. 16. compoſitum ex illis quadratis, vtrique illorum eſt commenſurabile; erit & illud compoſitum, hoc eſt illi æquale DK, Rationale per lemm. 4. ad propoſit. 4. Hoc verò DK applicatum eſt ad Rationalem DE, ergo per propoſ. 21. erit DL Rationalis, ipſi DE longitudine commenſurabilis. Inſuper cùm AC, BC, ſint Rationales potentiâ tantum commenſurabiles; erit rectangulum ſub ipſis, ideoque eius duplum GK, Medium,

per coroll. noſtrum 3.ad propoſ. 22. ſed hoc applicatum eſt ad Rationalem GF, ergo per propoſ.23.erit GL Rationalis ipſi GF, id eſt ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Cumque DK Rationale, & GK Medium id eſt Irrationale, ſint incommenſurabilia; erunt rectæ DL, GL, per 10.prop. eandem habentes cum DK, GK, iuxta 1.prop. lib.6. rationem, longitudine incommenſurabiles. Igitur cùm DL, GL, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles; erit reliqua DG, Apotome, per prop.74. Aſſero verò ipſam DG eſſe Apotomen primam.

Demonſtratio. Iuxta lemma prop.54. rectangulum ſub AC, BC, hoc eſt MK illi æquale, Medium eſt proportionale inter quadrata rectarum AC, BC, id eſt inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continuè proportionalia; ideoque rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis obtinentes rationem per 1.propoſ.lib.6. erunt continuè proportionales. Igitur per propoſ.17.libr.6. rectangulum ſub DI, IL, æquale quadrato ex ML erit, hoc eſt quartæ parti quadrati ex GL. Et quia quadrata ex AC, BC, hoc eſt illis æqualia DH, IK, ſunt commenſurabilia; erunt per propoſ.10. rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem iuxta prop.1.libr.6. longitudine commenſurabiles. Ergo cùm duæ rectæ DL, GL, inæquales ſint, & ad maiorem DL applicatum rectangulum ſub DI, IL, æquale parti quartæ quadrati ex GL minore, deficienſque figura quadrata; ſitque probata DI, longitudine commenſurabilis ipſi IL; poterit iuxta prop. 18. recta DL plus quàm GL, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Oſtendimus ergo eſſe Apotomen DG; & totam DL plus poſſe quàm GL congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; atque eandem totam commenſurabilem eſſe longitudine Rationali DE: ergo per def. 1. tertiarum, recta DG erit Apotome prima. Igitur quadratum Apotomæ, &c. quod erat probandum.

Eadem figura vti poterimus in ſeqq. prop. vſque ad 103. incluſiuè.

## PROPOSITIO XCIX.

Quadratum Mediæ Apotomæ primæ, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundam.

Fig.217. SVppoſitio. Sit AB Apotome prima Mediæ, ipſique congruens BC, ita vt AC,

CB, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, continentes Rationale: & ad Rationalem DE æquale quadrato ex AB applicatum ſit rectangulum DF, latitudinem efficiens DG: Dico DG eſſe Apotomen ſecundam.

Conſtructio fiat vt in antecedente propoſitione, ita vt iterum DH, IK, ſint æqualia quadratis rectarum AC, BC; & GK æquale illi quod ſub AC, BC, bis continetur; & MK ei quod ſub AC, BC. Quia ergo AC, BC, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles; erunt & earum quadrata, & illis æqualia DH, IK, Media, & commenſurabilia, per coroll. noſtrum 3. ad prop.22. & coroll. propoſ.24. quare & totum DK, vtrique illorum erit commẽſurabile per prop.16. & Medium per coroll. cit. prop.24. ſed DK applicatum eſt ad Rationalem DE, ergo per propoſ.23. DL erit Rationalis, ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Inſuper quia rectangulum ſub AC, CB, Rationale datur, erit etiã eius duplum Rationale per lemma 4. ad prop.19. quod cùm applicetur ad Rationalem DE, erit GL per 21.prop. Rationalis, longitudine ipſi DE commenſurabilis. Prætereà cùm DK, Medium, id eſt Irrationale ſit per corollarium noſtrum ad propoſ.23. & GK Rationale, incommenſurabilia erunt inter ſe. & per propoſ.10. rectæ DL, GL incommenſurabiles longitudine, quandoquidem ipſæ per 1.propoſit. libr.6. eandem habent rationem cum DK, GK incommenſurabilibus. Rationales igitur erunt DL, GL, potentia tantum commenſurabiles; vnde reliqua DG erit Apotome per propoſit.74. Aſſero autem eſſe Apotomen ſecundam.

Demonſtratio. Eodem enim modo vti in præcedente propoſitione probabimus totam DL plus poſſe quàm congruentem GL, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis: igitur quia congruens GL oſtenſa eſt longitudine commẽſurabilis Rationali DE; erit per defin.2. tertiarum recta DG, ſecunda Apotome. Igitur quadratum, &c. quod erat explicandum.

## PROPOSITIO C.

Quadratum Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SVppoſitio. Data ſit AB Apotome ſecunda, ipſique congruens BC; ita vt AC, Fig.217.

BC, ſint Mediæ potentia tantum commenſurabiles, continentes Medium: tùm ad Rationalem DE applicatum ſit DF æquale quadrato ex AB, latitudinem GD efficiens. Dico rectam DG eſſe Apotomen tertiam.

Conſtructio fiat vt in anteced. propoſ. & probabimus vt ibi, DK eſſe Medium, & ideò rectam DL eſſe Rationalem ipſi DE longitudine incommenſurabilem, per propoſit. 23. & quoniam rectangulum ſub AC, BC, eſt Medium, eiuſque duplum GK, erit per citat. propoſ. 23. Medium & recta GL Rationalis, ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Quoniam autem AC, BC, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtque per lemm. 3. propoſ. 19. vt AC ad BC, ita quadratum ex AC ad rectangulum ſub AC, CB; erit quadratum ex AC incommenſurabile rectangulo ſub AC, CB, per propoſ. 10. Sed per propoſ. 16. quadrato ex AC eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, eo quod quadrata ipſarum potentia commenſurabilium, commenſurabilia ſint; rectangulo autem ſub AC, BC, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub eiſdem; ergo per corollar. propoſ. 14. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, id eſt DK, erit incommenſurabile rectangulo bis ſub AC, BC, id eſt ipſi GK. quare cùm rectæ DL, GL, eandem obtineant rationem per 1. propoſit. lib. 6. cum DK, GK, erunt per prop. 10. ipſæ rectæ DL, GL, incommenſurabiles. Rationales ergo erunt, & potentia ſolum commenſurabiles; ideoque per propoſit. 74. reliqua DG erit Apotome. Dico verò ipſam eſſe tertiam.

Demonſtratio. Sicuti in propoſ. 98. oſtendemus rectam DL totam plus poſſe quàm GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quandoquidem igitur neutra ipſarum DL, GL, Rationali DE, longitudine ſit commenſurabilis, ex oſtenſis; erit per 3. definit. tertiarum ipſa DG Apotome tertia. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO CI.

Quadratum Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

Fig. 117. SVppoſitio. Data ſit Minor AB, ipſique congruens BC; ita vt AC, BC, ſint potentia incommenſurabiles, & efficiētes compoſitum ex quadratis ipſarum AC, BC, Rationale; rectangulum verò ſub AC, BC, Medium; applicatumque ſit ad Rationalem DE, rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, faciens latitudinem DG. Dico DG eſſe Apotomen quartam.

Conſtructio ſit eadem quæ in præcedentibus propoſitionibus. Iam verò quia compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt illi æquale DK, Rationale eſt; erit per propoſit. 21. recta DL Rationalis, ipſi DE longitudine commenſurabilis. Tùm quia rectangulum ſub AC, BC, ideoque eis duplum GK, Medium eſt; erit per propſit. 23. recta GL Rationalis, ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Præterea cùm DK ſit Rationale, & GK Medium idcoque Irrationale per corollar. noſtrum 2. ad prop. 23. incommenſurabilia erunt: & quia DL, GL, eandem cum illis habent rationem per 1. propoſ. libr. 6. ipſæ erunt per 10. propoſ. longitudine incommenſurabiles: Et quia oſtenſæ ſunt Rationales, ipſæ erunt Rationales potentiâ ſolum commenſurabiles: ideoque iuxta propoſit. 74. reliqua DG erit Apotome. Supereſt verò probandum quod ſit Apotome quarta.

Demonſtratio. AC, BC, ſunt potentiâ incommenſurabiles, ergo earum quadrata, & ipſis æqualia DH, IK, incommenſurabilia; ideoque rectæ DI, IL, longitudine incommenſurabiles per propoſ. 10. cùm ſint vt DH, IK, per 1. propoſ. libr. 6. Quoniam igitur rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex ML, id eſt quartæ parti quadrati ex GL, vti probauimus in propoſ. 98. poterit per 19. propoſ. recta DL plus quàm GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; cùm ad DL maiorem applicatum eſt rectangulum ſub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL minore, deficiens figura quadrata, diuidenſque maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommenſurabiles. Ergo quia tota DL plus poſſit quàm congruens GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, ſitque eadem tota DL, Rationali DE probata commenſurabilis longitudine; erit per definit. 4. tertiarum, recta DG, Apotome quarta. quod erat demonſtrandum.

PRO-

## PROPOSITIO CII.

### Quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, facit Apotomen quintam.

117. SVppoſitio. Data ſit recta AB cum Rationali Medium totum faciens, & ipſi congruens BC; ita vt AC, BC, ſint potentia tantum commenſurabiles, efficiantque compoſitum ex quadratis rectarum ipſarum AC, BC, Medium, rectangulum vero ſub eiſdem AC, BC, Rationale; & ad Rationalem DE applicatum ſit DF rectangulum æquale quadrato ex AB, latitudinem efficiens DG. Dico ipſam DG eſſe Apotomen quintam.

Conſtructio ſit eadem quæ in Superioribus. Iam quia compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ideoque & illi æquale DK, eſt Medium; erit per propoſit. 23. recta DL Rationalis ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Tùm quoniam rectangulum ſub AC, BC, ideoque eius duplum GK, eſt Rationale; erit per propoſ. 21. recta GL Rationalis, ipſi DE longitudine commenſurabilis. Denique cùm DK ſit Medium ſeu Irrationale, & GK Rationale, erunt ipſa incommenſurabilia; & propterea cùm ſint DL, GL, vt DK, GK, per 1. propoſit. libr. 6. erunt per propoſit. 10. ipſæ DL, GL, longitudine incommenſurabiles. Et quia ſunt Rationales oſtenſæ; ipſæ erunt Rationales potentia ſolum commenſurabiles: Reliqua ergo DG erit Apotome iuxta propoſ. 74. Dico autem eſſe Apotomen quintam.

Demonſtratio. Simili enim methodo vt in antecedente propoſitione probabimus totam DL plus poſſe quam GL congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Igitur quia congruens GL oſtenſa eſt longitudine commenſurabilis Rationali DE; erit per definit. 5. tertiarum ipſa DG, Apotome quinta. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO CIII.

### Quadratum eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.

SVppoſitio. Data ſit recta AB cum Medio Medium totum efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, efficiantque compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, rectangulum vero ſub AC, BC, Medium incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum; & ad Rationalem DE applicatum ſit rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem efficiens DG. Dico ipſam DG eſſe ſextam Apotomen. Fig. 117.

Conſtructio ſit eadem quæ in Superioribus. Iam quia tàm compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, vel illi æquale DK, quàm rectangulum ſub AC, BC, vel eius duplum GK, eſt Medium: erit per propoſ. 23. tàm DL, quàm GL, Rationalis, ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Tùm quoniam rectangulum ſub AC, BC, eſt incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum AC, BC; ſuntque rectangulum ſub AC, BC, eiuſque duplum GK, commenſurabilia: erit per 14. propoſit. & GK eidem compoſito, id eſt ipſi DK, incommenſurabile: ideoque per propoſit. 10. rectæ DL, GL, longitudine incommenſurabiles, eo quod per 1. propoſit. lib. 6. eodem modo referantur quo DK, GK. Oſtenſæ verò ſunt ipſæ DL, GL, Rationales; Rationales ergo erunt, & potentia ſolum commenſurabiles; ideoque per propoſ. 74. reliqua DG erit Apotome, quam probo eſſe ſextam Apotomen.

Demonſtratio. Probabimus enim vt propoſit. 101. totam DL plus poſſe quam GL congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Igitur quia neutra ipſarum DL, GL, commenſurabilis eſt longitudine Rationali DE; erit per defin. vltimam tertiarum, ipſa DG, Apotome ſexta. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO CIV.

### Recta lineæ Apotomæ longitudine commenſurabilis: Et ipſa Apotomæ eſt, atque ordine eadem.

Fig.118. SVppoſitio. Data ſit AB Apotome,& ipſi congruens BC,ita vt AC, BC, ſint Rationales potentiâ ſolum commenſurabiles: ſit verò ipſi AB longitudine commenſurabilis alia quælibet data DE. Dico & DE eſſe Apotomen, atque ordine eandem ipſi AB.

Demonſtratio. Fiat per propoſ.12. lib.6. vt AB ad DE,ita BC ad EF: erit per propoſ. 12. libr.5. vt tota AC ad totam DF, ita AB ad DE, vel vt BC ad EF. Quia verò AB, DE, longitudine ponuntur commenſurabiles, erunt per propoſit.10. AC,DF,tùm BC, EF, longitudine commenſurabiles. Cumque ponantur AC,BC, Rationales, erunt etiam DF, EF, illis commenſurabiles, Rationales. Inſuper cùm ſit vt AC ad DF,ita BC ad EF; erit per propoſit. 16. libr. 5. permutando vt AC ad BC,ita DF ad EF; ſed ſunt AC,BC, potentia ſolum commenſurabiles, ergo per propoſit.10.rectæ DF,EF, erunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ſed oſtenſæ ſunt Rationales,ergo per propoſ.74. reliqua DE erit Apotome. Iam verò probandum eſt quod ſit Apotome eodem ordine vt data AB. Si enim AC plus poſſit quàm BC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; poterit etiam per propoſ. 15. recta DF plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis: Si igitur AC ſit longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ, vt AB ſit Apotome prima; erit etiam per propoſit.12. DF longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ; quia tàm Rationalis expoſita, quàm DF, eidem AC longitudine commenſurabilis: ergo per defin. 1. tertiarum, recta DE erit Apotome prima, vt AB. Si autem BC ſit longitudine commenſurabilis Rationali, erit eodem EF, Rationali longitudine commenſurabilis; ideoque per definit.2. tertiarum, vtraque AB, DE, Apotome ſecunda. Si denique neutra ipſarum AC, BC, commenſurabilis ſit longitudine expoſitæ Rationali; erit per propoſit. 14. neutra rectarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commenſurabilis: ideoque per 3. definit. tertiarum, vtraque AB,DE, erit Apotome tertia. Quod ſi AC poſſit plus quàm BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit per propoſit. 15. & DF plùs quàm EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Vnde vti antea probabimus DE eſſe Apotomen quartam vel quintam vel ſextam, vti AB. Recta ergo linea Apotome longitudine commenſurabilis,&c. quod erat concludendum.

Eadem figura vti poterimus in ſequentibus propoſitionibus vſque ad 108 incluſiuè.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Recta linea Apotomæ potentiâ tantum commenſurabilis: Et ipſa Apotome eſt, ſed non eadem ordine.*

SVppoſitio. Sit enim AB Apotome data, prima vel ſecunda vel tertia vel quarta vel quinta vel ſexta;eique congruens BC: Data verò recta DE potentiâ tantum commenſurabilis ipſi AB datæ Apotomæ. Dico DE eſſe Apotomen, ſed non eandem ordine quo AB data. Fig.118.

Demonſtratio. Imprimis eodem artificio quo in propoſitione iſta 104. demonſtrabitur recta DE Apotoma. Supereſt demonſtrandum quod nõn eadem ordine Apotoma quo data AB. Eſto ſi fieri poſſit recta DE Apotoma eodem ordine quo data AB, v.g. prima: & EF ſit congruens ipſi DE. Hoc poſito, erit tàm AC tota, quàm DF tota, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expoſitæ commenſurabilis longitudine: ergo per propoſ.12. erunt AC, DF, inter ſe longitudine commenſurabiles. Igitur erit vt AC ad DF, ita AB ad DE; ergo per propoſ. 10. erunt AB & DE longitudine commenſurabiles, poſitæ potentiâ tantum commenſurabiles. Non igitur erunt AB,DE,ſingulæ Apotoma prima.

## PROPOSITIO CV.

### Recta linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis: & ipſa Mediæ Apotome eſt,atque ordine eadem.

SVppoſitio. Data ſit recta AB, Mediæ Apotomæ commenſurabilis, eique congruens BC; ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles: Data verò ſit recta DE, ſiue longitudine & potentiâ, ſiue potentiâ tantum commenſurabilis ipſi AB. Dico & rectam DE eſſe Apotomen Mediæ, & ipſi AB ordine eandem. Fig.118.

Conſtru-

Digitized by Google

Conſtructio. Per propoſ. 12. libr. 6. fiat vt AB ad DE, ita BC ad FE.

Demonſtratio. Per propoſit. 12. libr. 5. cùm ſit AB ad DE, ita BC ad FE; erit tota AC ad totam DF, vt AB ad DE, vel vt BC ad EF. Commenſurabiles verò ponuntur AB, DE, vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm, ergo per 10. propoſit. BC, EF, tùm AC, DF, erunt eodem modo commenſurabiles. Verùm AC, BC, Mediæ ſunt, ergo per propoſit. 24. DF, EF, illis commenſurabiles, erunt etiam Mediæ. Præterea quia eſt vt AC ad DF, ita BC ad EF; & iuxta propoſit. 16. libr. 5. permutando vt AC ad BC, ita DF ad EF; & ſunt AC, BC, potentiâ ſolum commenſurabiles, erunt per noſtrum corollarium propoſit. 10. DF, EF, potentiâ ſolum commenſurabiles. Cumque DF, EF, ſint probatæ Mediæ, erit per propoſit. 75. vel 76. reliqua DE, Mediæ Apotoma. Supereſt vt probemus eſſe eandem ordine quo AB. Cùm ſit vt AC ad BC, ita BF ad EF; & per lemm. 3. propoſit. 19. vt AC ad BC, ita quadratum rectæ AC ad rectangulum ſub AC, BC: & vt DF ad EF, ita quadratum rectæ DF ad rectangulum ſub DF, EF; erit per propoſit. 11. libr. 5. vt quadratum rectæ AC ad rectangulum ſub AC, BC, ita quadratum rectæ DF ad rectangulum ſub DF, EF; & permutando per propoſit. 16. lib. 5. vt quadratum rectæ AC ad quadratum rectæ DF, ita rectangulum ſub AC, BC, ad rectangulum ſub DF, EF. Cumque rectæ AC, DF, ſint probatæ commenſurabiles, erit quadratum rectæ AC, commenſurabile quadrato rectæ DF; & per propoſit. 10. rectangula ſub AC, BC, & ſub DF, EF, erunt commenſurabilia. Ergo ſi rectangulum ſub AC, BC, ſit Rationale, ita vt AB ſit Mediæ Apotoma prima; erit rectangulum ſub DF, EF, Rationale, cùm ſit commenſurabile illi prædicto Rationali: Recta igitur DE per prop. 75. erit Mediæ Apotoma prima. Quod ſi rectangulum ſub AC, BC, ſit Medium, ita vt AB ſit Mediæ Apotoma ſecunda; erit per corollar. propoſit. 24. rectangulum ſub DF, EF, ei commenſurabile, Medium: ideoque per propoſit. 76. recta DE erit Mediæ Apotoma ſecunda. Recta ergo linea, &c. quod erat demonſtrandum.

# PROPOSITIO CVI.

## Recta linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt.

SVppoſitio. Data ſit Minor AB, eique congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incommenſurabiles; efficientes compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulumque ſub AC, BC, Medium: Dataque ſit recta DE commenſurabilis ipſi AB, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia ſolùm. Dico rectam DE eſſe Minorem. Fig. 218.

Conſtructio ſit eadem quæ in antecedente propoſitione.

Demonſtratio. Probabimus vt in anteced. propoſ. rectas DF, EF, eſſe ipſis AC, BC, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia ſolum. Quoniam verò eſt vt AC ad DF, ita BC ad EF; & iuxta propoſit. 16. libr. 5. permutando vt AC ad BC, ita DF ad EF; erit per propoſ. 22. libr. 6. vt quadratum ex AC ad quadratum rectæ BC, ita quadratum rectæ DF ad quadratum rectæ EF; & iuxta corollar. propoſit. 18. libr. 5. componendo, vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum rectæ BC, ita compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum rectæ EF; & permutando, vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ EF. Cumque rectæ BC, EF, ſint probatæ commenſurabiles, erunt quadrata rectarum BC, EF, commenſurabilia: ergo per propoſ. 10. compoſita prædicta ex quadratis rectarum AC, BC, & rectarum DF, EF, erunt commenſurabilia. Sed ex hypotheſi compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, eſt Rationale; ergo per defin. 9. etiam compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, erit Rationale. Inſuper vt in præced. propoſit. oſtendemus rectangulum ſub AC, BC, eſſe commenſurabile rectangulo ſub DF, EF: Ponitur verò rectangulum ſub AC, BC, Medium; ergo per corollar. propoſit. 24. etiam rectangulum ſub DF, EF, erit Medium. Denique quia eſt vt AC ad BC, ita DF ad EF, ſuntque AC, BC, potentia incommenſurabiles, erunt per prop. 10. rectæ DF, EF, potentia incommenſurabiles. Igitur cùm DF, EF, ſint potentia incommenſurabiles, efficiantque compoſitum ex quadratis earum Rationale, rectangulumq; ſub ipſis Medium, erit per prop. 77. recta DE, Minor. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO CVII.

### Recta linea incommenſurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit;& ipſa cum Rationali Medium totum facit.

Fig.218. SVppoſitio. Data ſit recta AB, Medium totum efficiens cum Rationali;& ipſi AB ſit congruens recta BC; ita vt AC, BC, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, rectangulumque ſub eiſdem Rationale: Dataque ſit DE ipſi AB incommenſurabilis quocumque modo. Dico rectam DE eſſe quæ cum Rationali Medium totum efficiat.

Conſtructione eadem facta quæ in præced. propoſ. duabus. probabimus vt in præcedente, compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, eſſe commenſurabile compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Ponitur autem illud Medium, ergo etiam iſtud Medium erit per corollar. propoſ. 24. Præterea ſicuti in propoſ. 105. oſtendemus rectangulum ſub AC, BC, eſſe commenſurabile rectãgulo ſub DF, EF; verùm illud ponitur Rationale, ergo etiam iſtud erit Rationale per defin. 9. Denique vt in præcedente propoſ. oſtendemus rectas DF, EF, eſſe potentia incommenſurabiles; ergo cùm iſtæ efficiant compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, rectangulumque ſub ipſis Rationale; erit per propoſ. 78. recta DE, quæ cum Rationali Medium totum facit. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO CVIII.

### Recta linea commenſurabilis ei quæ cum Medio Medium totum efficit: & ipſa cum Medio Medium totum efficiens eſt.

Fig.218. SVppoſitio. Data ſit recta AB, cum Medio Medium totum efficiens, & ipſi cõgruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incommenſurabiles; faciantque quadratum ex ipſis AC, BC, Medium, rectangulumque ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis: Dataque ſit DE, ipſi AB quomodolibet commenſurabilis. Dico rectam DE, eſſe quæ cum Medio Medium totum efficiat.

Conſtructione facta eadem quæ ſupra in anteced. propoſit. ab 105. probabimus vt in propoſ. 106. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Sed ponitur illud Medium, ergo per corollar. prop. 24. iſtud etiam erit Medium. Propterea ſicuti in propoſ. 105. probabimus rectangulum ſub AC, BC, eſſe commenſurabile rectangulo ſub DF, EF; illud verò ponitur Medium, ergo per cit. corollar. iſtud erit etiam Medium. Tùm vt in propoſ. 106. demonſtrabimus rectas DF, EF, eſſe potentia incommenſurabiles. Denique quia compoſito ex quadratis rectarum AC, BC, eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF; & rectangulo ſub AC, BC, commenſurabile rectangulum ſub DF, EF: ſuntque per hypotheſim compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum ſub eiſdem AC, BC, incommenſurabilia; erunt per corollar. propoſ. 14. compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, & rectangulum ſub eiſdem, incommenſurabilia. Quoniam ergo DF, EF, potentiâ ſunt commenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, & incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis; erit per propoſit. 79. recta DE, quæ cum Medio Medium totum facit. quod erat explicandum.

## PROPOSITIO CIX.

### Medio à Rationali detracto; Recta linea quæ reliquum ſpatium poteſt, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

SVppoſitio. Ab Rationali ſpatio AD, detractum ſit ſpatium CD Medium vocata: Fig.219. Dico rectam potentem reliquum ſpatium reliquum AB, eſſe Apotomen, vel Minorem, vnam ex illis duabus Irrationalibus.

Conſtructio. Expoſitâ Rationali EF, per lemma noſtrum ad propoſ. 25. applicetur ad illam rectangulum EG æquale ipſi AB; & ad GH aliud HI, æquale ipſi CD; ita vt totum EI, ſit æquale toti AD.

Demonſtratio. Cùm EI ſit æquale ipſi AD Rationali, erit Rationale, & EK per propoſit. 21. Rationalis Rationali EF longitudine commenſurabilis. Cumque HI ſit

ſit Medio CD æquale, Medium erit, & per propoſ.23.recta HK Rationalis, ipſi EF Rationali longitudine incommenſurabilis. Ergo cum EK ſit ipſi EF longitudine commenſurabilis, & HK eidem longitudine incommenſurabilis; erunt per propoſit.13. rectæ EK, HK, longitudine incommenſurabiles: Rationales autem ſunt probatæ: Rationales ergo erunt potentiâ tantum commenſurabiles. Quare per propoſ. 74. reliqua EH Apotome eſt, eique congruens HK. Vel ergo EK plus poteſt quàm HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis aut incommenſurabilis: Si primum, cùm tota EK ſit probata longitudine commenſurabilis Rationali EF, erit per defin. 1. tertiarum, recta EH Apotome prima; vnde recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF & Apotoma prima EH, nimirum ſpatium AB ſibi æquale, Apotome eſt per propoſ.92. Si ſecundum, cùm tota EK probata ſit longitudine commenſurabilis ipſi EF Rationali, erit per defin.4.tertiarum, Apotome quarta: ac proinde recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, id eſt ſpatium AB illi æquale, erit per propoſit. 95. Minor. Igitur ſi à Rationali detrahatur Medium, &c. quod erat demonſtrandum.

Hæc eadem figura inſeruire poterit duabus ſeq. propoſit.

## PROPOSITIO CX.

Rationali, à Medio detracto; aliæ duę Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotoma prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

Fig.119. SVppoſitio. Ab Medio AD, detractum ſit Rationale CD: Dico rectam potentem ſpatium reliquum AB, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel illam quæ cum Rationali Medium totum efficiat.

Conſtructio eadem ſit quæ in ſuperiore propoſitione 109.

Demonſtratio. Cùm Medio AD ſit æquale EI ſpatium, erit per corollar.propoſit. 24.Medium; & recta EK Rationalis ipſi EF longitudine incommenſurabilis per prop. 3. Cumque HI ſit æquale Rationali CD, erit HI per lemm.4. ad propoſit. 19. Rationale; & per propoſit.21.recta HK Rationalis erit, ipſi EF longitudine commenſurabilis. Quare cum HK, ipſi EF ſit longitudine commenſurabilis, & EK eidem EF longitudine incommenſurabilis; erunt per propoſit. 13. rectæ EK, HK, longitudine incommenſurabiles. Et quia ſunt probatæ Rationales, erunt EK, HK, Rationales potentiâ ſolùm commenſurabiles: ideoque per propoſit.74.reliqua EH erit Apotome, eique congruens HK. Vel igitur EK plus poteſt quàm HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis vel incommenſurabilis. Si primum, cùm AK congruens probata ſit longitudine commenſurabilis ipſi EF Rationali, erit per defin.2. tertiarum, recta EH Apotome ſecunda: Recta ergo potens ſpatium EG contentum ſub Rationali EF, & Apotoma ſecunda EH, hoc eſt ſpatium æquale ipſi AB, eſt per propoſit.93. Mediæ Apotoma prima. Si ſecundum, quandoquidem HK congruens oſtenſa ſit commenſurabilis longitudine Rationali EF, erit per defin. 5. tertiarum, recta EH Apotoma quinta: ergo recta potens ſpatium EG contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quinta EH, videlicet ſpatium AB illi æquale, erit iuxta propoſit. 96. ea quæ cum Rationali Medium totum facit. Probauimus ergo intentum.

## PROPOSITIO CXI.

Medio à Medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti: reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotoma ſecunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

SVppoſitio. Ab Medio AD, detractum ſit Medium CD incõmenſurabile toti AD: Fig.119. Dico rectam potentem reliquum ſpatium AB, eſſe vel Mediæ Apotomen ſecundam, vel eam quæ cum Medio totum Medium efficit.

Conſtructio eadem fiat quæ in prop. 109.

Demonſtratio. Cùm ipſis EI, HI, Mediis, ſint æqualia AD, CD, iſta erunt per corollar. propoſit.24. Media; & per propoſit.23. rectæ EK, HK, Rationales ipſi EF longitudine incommenſurabiles. Verùm quoniam ponuntur incommenſurabilia AC, CD, hoc eſt EI, HI; erunt rectæ EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, per 1.propoſit.lib.6.longitudine incommenſurabiles per propoſ. 10. ſed Rationales cùm ſint, erunt Rationales potentia ſolum commenſurabiles: ideoque per

per propoſit. 74. reliqua EH erit Apotome, eique congruens HK. Vel ergo EK plus poteſt quàm HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si primum, cùm neutra Rationali EF longitudine ſit probata commenſurabilis, erit per definit. 3. tertiarum, recta EH Apotome tertia: vnde recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotome tertia EH, id eſt ſpatium AB illi æquale, eſt per propoſit. 94. Mediæ Apotoma ſecunda. Si verò ſecundum, cùm neutra ipſarum EK, HK, Rationali EF ſit longitudine commenſurabilis, erit per defin. 6. tertiarum, rectæ EH Apotome ſexta: ideoque recta potens ſpatium EG contentum ſub Rationali EF, & Apotoma ſexta EH, id eſt ſpatium AB illi æquale, eſt per propoſit. 97. ea quæ cum Medio Medium totum efficit. Demonſtrauimus igitur propoſitum.

## PROPOSITIO CXII.

### Apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

Fig. 220. SVppoſitio. Data ſit A linea quæcumque Apotome: Dico eſſe diuerſam lineam ab lineis quæ ex binis nominibus appellantur.

Conſtructio. Per lemma noſtrum 1. ad propoſit. 22. Applicetur ad expoſitam BC Rationalem lineam, rectangulum CD, æquale quadrato ex A.

Demonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit ſit A etiam ex binis nominibus: cùm A ſit Apotome, erit per propoſ. 23. latitudo BD, Apotome prima: cuius ſit congruens recta DE; erunt per defin. 1. tertiarum, rectæ BE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, poteritque BE plus quàm DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabiles; & ipſa BE, Rationali BC commenſurabilis longitudine. Tùm quia ponitur A etiam eſſe ex binis nominibus; erit per propoſ. 61. latitudo eadem BD, ex binis nominibus prima: cuius maius nomen ſit BF: tunc per definit. primæ ex binis nominibus, erunt BF, FD, Rationales potentiâ ſolum commenſurabiles, poterit BF, plus quàm FD, quadrato rectæ commenſurabilis ſibi longitudine, ipſaque BF, Rationali BC erit longitudine commenſurabilis. Cumque BE, BF, ſint eidem BC longitudine commenſurabiles, erunt per propoſit. 12, ipſæ BE, BF, inter ſe commenſurabiles longitudine. Quia igitur tota BE, parti BF ſit commenſurabilis longitudine, erit per corollar. propoſ. 16. eadem BE, reliquæ parti FE commenſurabilis longitudine: ideoque exiſtente BE Rationali, erit Rationalis FE. Cumque BE, DE, Rationales, ſint potentia ſolum commenſurabiles, & duarum linearum BE, FE, longitudine commenſurabilium, ipſa BE longitudine commenſurabilis ſit ipſi DE; erit per propoſ. 14. FE eidem DE longitudine incommenſurabilis. Verùm vtraque FE, DE, Rationalis cùm ſit probata; Rationales erunt FE, DE, potentia ſolum commenſurabiles. Igitur reliqua FD eſt Apotome per propoſ. 74. ideoque Irrationalis ex natura Apotomes. probata verò eſt & Rationalis. hæc pugnantia indicant poſitionem contradicentem huic propoſitioni eſſe contrariam rationi, & propoſitionem ipſam rationi conformem. oſtendimus ergo propoſitum.

### COROLLARIVM.

*Ex demonſtratis colligere licebit, Apotomen & cæteras ipſam conſequentes Irrationales lineas; neque Mediæ, neque inter ſe eſſe eaſdem.*

NAm quadratum Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, efficit per 23. prop. latitudinem Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem: At quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, facit per propoſ. 98. latitudinem Apotomen primam.

Tùm quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem reddit per propoſit. 99. Apotomen ſecundam: quadratum autem Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem creat per propoſit. 110. Apotomen quartam.

Deinde quadratum Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem parit Apotomen quartam, per propoſit. 101. Quadratum autem eius quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem dat Apotomen quintam, per propoſit. 102.

Quadratum denique eius quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam, iuxta prop. 103. huius libri.

Quare cùm hæ latitudines diuerſæ ſint ab latitudine Mediæ, & inter ſe; ab latitudine in quam Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ verò Irrationales: Inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem Apotomæ. notum eſt Apotomen, & reliquas Irrationales ipſam conſequentes, & ab Media, & inter ſe differre.

Et

Et quia demonſtrauimus in hac proportione Apotomen eandem non eſſe quæ ex binis nominibus. Et quadrata Apotomæ cæterarumque quinque Irrationalium eam conſequentium, ad Rationalem applicatam, latitudines faciunt Apotomen primam, ſecundam, tertiam, quintam, ſextam: Quadrata verò eius quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium ipſam conſequentium, ad Rationalem applicata, latitudines ereant ex binis nominibus primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, ſextam. manifeſtum eſt latitudines Apotomæ & aliarum Irrationalium pediſequarum, eſſe diuerſas ab latitudinibus eius quæ ex binis nominibus, & reliquarum ſe conſequentium Irrationalium: cùm nulla Apotome eadem ſit quæ aliqua ex binis nominibus. Ergo Apotome & quæ ipſam comitantur differunt ab ea quæ ex binis nominibus & quæ poſt ipſam enumerantur. Quare tàm illæ quàm hæ ab Media differunt, & efficitur vt Rationali quapiam recta expoſita, tredecim omninò eſſe lineas Irrationales inter ſe differentes, de quibus actum eſt. videlicet.

1 *Media*: 2 *Ex binis nominibus, cuius ſunt ſex ſpecies inuenta.* 3 *Ex binis Mediis prima*: 4 *Ex binis Mediis ſecunda*: 5 *Maior*: 6 *Rationale ac Medium potens*: 7 *Bina Media potens*: 8 *Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt reperta*: 9 *Media Apotome prima*: 10. *Media Apotome ſecunda*: 11 *Minor*: 12 *Cum Rationali Medium totum efficiens*: 13 *Cum Medio Medium totum efficiens.*

## PROPOSITIO CXIII.

Quadratum Rationalis ad eam quæ ex binis nominibus applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadẽ proportione: & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ ex binis nominibus.

Fig.221. SVppoſitio. Data ſit A Rationalis; & ex binis nominibus BC, cuius maius nomen BF: & ad BC applicatum rectangulum BE, æquale quadrato ex A, latitudinem efficiens BF. Dico rectam BF eſſe Apotomen, cujus nomina, hoc eſt tota linea & ipſi congruens, commenſurabilia ſunt nominibus BD, DC, ipſius BC ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotomen BF eſſe ordine eandem ipſi BC ex binis nominibus.

Conſtructio. Per lemma noſtrum 1. ad propoſ. 22. applicetur ad DC minus nomen, rectangulum CG æquale eidem quadrato rectæ A, atque adeo rectangulo BE, latitudinem efficiens DG æqualem ipſi BH.

Demonſtratio. Cùm æqualia ſint BE, CG, erit per propoſ. 24. vel 16. libr. 6. BC ad DC, vt DG vel BH ipſi æqualis ad BF; & iuxta corollar. propoſ. 17. diuidendo, vt BD ad DC, ita HF ad FB; ſed BD maior eſt quàm DC, ergo HF maior erit quàm FB. Iam vero ponatur FI æqualis ipſi FB; & per propoſ. 12. libr. 6. fiat vt HI ad IF, ita FB ad BK; ergo per corollar. propoſ. 18. libr. 5. erit componendo vt HF ad IF vel ad ſibi æqualem BF, ita FK ad BK: ſed oſtendimus eſſe vt HF ad BF, ita ED ad DC; ergo per prop. 11. libr. 5. erit vt BD ad DC, ita FK ad BK. Ergo BD, DC, ſint nomina ipſius BC ex binis nominibus, Rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles ex natura eius quæ eſt ex binis nominibus: quare per propoſ. 10. FK, BK, erunt potentia ſolum commenſurabiles. Præterea cùm ſit, vt HF ad BF, ita FK ad BK, erunt iuxta propoſ. 12. libr. 5. HF, FK antecedentes ſimul, videlicet totum HK, ad BF, BK, conſequentes ſimul, nimirum ad totam FK, vt FK ad BK. Igitur FK media proportionalis erit, inter HK, BK. Quapropter per corollar. propoſ. libr. 6. erit vt HK prima ad BK tertiam, ita quadratum rectæ HK primæ, ad quadratum rectæ FK ſecundæ: Cùm autem CG ſit Rationale, (eo quod quadrato Rationalis A ſit æquale,) ad Rationalem DC applicatum, efficiat per prop. 21. DG latitudinem Rationalem, ipſi DC longitudine commenſurabilem; erit etiam HB, ipſi DG æqnalis, Rationalis & longitudine commenſurabilis ipſi DC. Cumque oſtenderimus eſſe vt BD ad DC, ita FK ad BK; vt autem FK ad BK, ita HK ad FK; erit etiam per prop. 11. libr. 5. vt BD ad DC, ita HK ad FK. Ergo per propoſ. 22. libr. 6. erit vt quadratum rectæ BD ad quadratum rectæ DC, ita quadratum rectæ HK ad quadratum rectæ FK: ſed quadratum rectæ BD eſt quadrato rectæ DC commenſurabile, (quia rectæ BD, DC, ſunt Rationales potentia commenſurabiles, cùm ſint nomina ipſius BC ex binis nominibus,) ergo per prop. 10. quadratum rectæ HK erit commenſurabile quadrato rectæ FK. At oſtendimus eſſe quadratum

rectæ

rectæ HK ad quadratum rectæ FK, ita recta HK ad rectam BK; ergo per propoſ. 10. recta HK erit longitudine commenſurabilis rectæ BK; ideoque per coroll. propoſ. 16. reliquæ BH. Probauimus autem BH eſſe Rationalem, ergo & HK illi commenſurabilis, Rationalis etiam erit; ac proinde etiam BK ipſi HK, commenſurabilis, etiam Rationalis erit. Cùm igitur probauerimus eſſe FK ipſi BK potentiâ ſolum commenſurabilem, erit FK Rationalis. Igitur quia FK, BK, Rationales ſunt & potentiâ ſolum commenſurabiles, erit per propoſ. 74. reliqua BF Apotome, eique congruens BK, quod erat primum è propoſitis.

Quia verò probauimus eſſe rectam HK totam, parti BK longitudine commenſurabilem; erunt per propoſ. 16. BK, BH, longitudine commenſurabiles inter ſe. Sed BH probata eſt longitudine commenſurabilis ipſi DC; erit per noſtrum corollarium prop. 12. BK eidem DC longitudine commenſurabilis. Inſuper cùm ſit ex antedictis vt BD ad DC; ita FK ad BK; & iuxta propoſ. 16. permutando vt BD ad FK, ita DC ad BK; & ſint oſtenſæ DC, BK longitudine commenſurabiles; erunt per propoſ. 10. BD, FK etiam commenſurabiles longitudine. Quare cùm FK ipſi BD, & BK ipſi DC longitudine ſit commenſurabilis, erunt ipſius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipſius BC ex binis nominibus, longitudine commenſurabilia. quod erat ſecundum è propoſitis.

Inſuper cùm probauerimus eſſe vt BD ad DC, ita FK ad BK; erunt propterea Apotomæ nomina FK, BK, in eadem ratione cum BD, DC, nominibus ipſius BC quæ eſt binis nominibus. quod erat tertium è propoſitis.

Denique vel BD plus poteſt quàm DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis vel incommenſurabilis. Si primum, cumque ſit vt BD ad DC, ita FK ad BK, ex oſtenſis; poterit per prop. 15. etiam FK plùs quàm BK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Si ſecundum, poterit & FK, plus quàm BK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis per cit. propoſ. 15. Quod ſi BD, expoſitæ Rationali fuerit longitudine commenſurabilis, erit & FK oſtenſa longitudine cõmenſurabilis ipſi BD, commenſurabilis longitudine Rationali eidem per corollar. noſtrum ad prop. 12. Quod ſi DC ſit Rationali commenſurabilis longitudine, erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Quod ſi denique neutra ipſarum BD, DC, ſit Rationali longitudine commenſurabilis; erit per 14. propoſ. neutra ipſarum FK, BK, Rationali longitudine commenſurabilis. Quare eadem eſt eodem ordine Apotome BF, ipſi BC ex binis nominibus, iuxta definitiones ſecundas ac tertias. quod erat quartum & vltimum è propoſitis. Totam igitur propoſitionem, vt par erat demonſtrauimus.

## PROPOSITIO CXIV.

Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipſa Apotoma.

SVppoſitio. Data ſit Rationalis A, & Apotoma BC, cui congruat CD; & ad BC applicatum ſit rectangulum CE æquale quadrato rectæ A, latitudinem efficiẽs BE. Dico primò BE eſſe ex binis nominibus: ſecundò huius BE nomina commenſurabilia eſſe nominibus BD, CD, Apotomæ BC, & in eadem proportione: Tertiò adhuc ipſam BE ex binis nominibus, eſſe ipſi BC Apotomæ ordine eandem. Fig. 112.

Conſtructio. Per lem. noſtrum 1. ad prop. 22. applicetur ad BD totum rectãgulum BF, æquale quadrato ex A, id eſt ipſi CE, latitudinem efficiens BG. Tum iuxta prop. 10. lib. 6. ſecetur EG in H, ſecundùm proportionem BE ad GE.

Demonſtratio. Cùm BF, CE, ſint æqualia, erit per prop. 14. vel 16. libr. 6. vt BE ad BG, ita BD ad BC; & iuxta coroll. prop. 19. libr. 5. per conuerſionem rationis, vt BE ad GE, ita BD ad CD. Cumque ſit per conſtructionẽ EH ad HG, vt BE GE: ſitq; per prop. cit. 19. libr. 5. vt BE tota ad totam GE, ita EH ablata ex BE, ad HG ablatam ex GE; erit reliqua BH reliquæ ipſius BE, ad HE reliquã ipſius GE, vt tota BE ad totam GE: vnde fit vt HG ſit media proportionalis inter BG, GH. quare per coroll. prop. 20. libr. 6. erit vt BH prima ad GH tertiam, ita quadratum ex BH prima, ad quadratum rectæ HE ſecundæ. Sed fuit vt BD ad CD, ita BE ad GE, id eſt BH ad HE; ſuntque BD, CD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, eo quod

quod ſint nomina Apotomæ BC; ergo per propoſ. 10. rectæ BH, HE, erunt potentia ſolum commenſurabiles, ideoque & quadrata earum, etiam commenſurabilia: quare cùm eandem habeant rationem quadrata illa cum rectis BH, GH, per 1. propoſ. lib. 6. erunt per propoſ. 10. ipſæ rectæ BH, GH, longitudine commenſurabiles. Quare quia tota BH longitudine commenſurabilis exiſtẽs parti GH, commenſurabilis etiam erit per coroll. prop. 16. parti reliquæ BG. Sed BD Rationalis eſt, cùm ſit maius nomen Apotomæ BC, & rectangulum Rationale eſt BF, æquale quadrato rectæ A Rationalis; erit per prop. 21. latitudo BG Rationalis commenſurabilis longitudine ipſi BD. Quare iuxta coroll. noſtrum ad propoſ. 12. & BH eidem BD Rationali commenſurabilis erit longitudine; ideoque Rationalis erit, eo quod BH, BG, ſint probatæ longitudine commenſurabiles. Iam verò quoniam BH, HE, probatæ ſunt commenſurabiles potentiâ ſolum, & BH Rationalis; erit etiam HE illi commenſurabilis, Rationalis. Quandoquidem igitur rectæ BH, HE, Rationales, ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; erunt per prop. 37. ex binis nominibus, quod erat primò propoſitum.

Cùm autem ſit oſtenſum ita eſſe BH ad HE, vt BD ad CD; ideoque permutãdo iuxta prop. 16. lib. 5. BH ad BD vt HE ad CD; tùm eſſe BH ipſi BD longitudine commenſurabilem; erit per propoſ. 10. HE etiam commenſurabilis ipſi CD lõgitudine. Quare BH, HE, nomina ipſius BE rectæ ex binis nominibus commenſurabilia erunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC: imò in eadem proportione cùm probatum ſit eſſe BH ad HE, vt BD ad CD. quod erat ſecundo loco propoſitum.

Denique vel BD plus poteſt quàm CD, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si primum, poterit per prop. 15. BH plus quam HE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Et ſi ſecundum, poterit per cit. prop. 15. BH plus quam HE, quadrato rectæ ſibi incommenſurabilis longitudine. Quod ſi BD, Rationali expoſitæ ſit longitudine commenſurabilis, erit etiam per corollar. noſtrum ad prop. 12. BH commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi BD, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Quod ſi CD longitudine ſit commenſurabilis Rationali, erit per idem principium cit. HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si autem neutra ipſarum BD, CD, ſit commenſurabilis longitudine Rationali expoſitæ; erit per prop. 14. neutra ipſarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Quare iuxta ſecundas ac tertias definitiones, ipſa BE ex binis nominibus, eſt ordine eadem ipſi Apotomæ BC. quod erat tertiò propoſitum. Atque ita propoſitio demonſtrata erit.

## PROPOSITIO CXV.

Si ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione: Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis.

Svppoſitio. Spatium AB contineatur ſub Apotoma AC, & CB ex binis nominibus, cuius nomina CB, DB, commenſurabilia ſint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione, videlicet CD ad DB, vt CE ad AE: poſſit autem recta F, ſpatium AB. Dico rectam F, eſſe Rationalem. Fig. 228.

Conſtructio. Per lẽma noſtrum 1. ad prop. 22. applicetur CH rectangulum ad BC ex binis nominibus, æquale quadrato rectæ G expoſitæ Rationali.

Demonſtratio. Applicato dicto rectangulo ad BC, erit eius latitudo BH, Apotome, Iuxta prop. 113. cuius nomina HI, BI, longitudine ſunt commenſurabilia nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI ad BI, vt CD ad DB, idcoque vt CE ad AE; & iuxta prop. 16. libr. 5. permutando vt tota HI ad totam CE, ita ablata BI ad ablatam AE; vnde per prop. 19. reliqua BH ad reliquã AC, erit vt tota AI ad totam CE. Sed per prop. 12. eſt longitudine commẽſurabilis HI, ipſi CE, eo quod vtraque HI, CE commenſurabilis fuerit oſtenſa longitudine ipſi CD: ergo per prop. 10. BH, AC, erunt longitudine commenſurabiles; ideoque HC, ipſi BA commenſurabilis erit per cit. prop. 10. cùm ſit per 1. prop. libr. 6. vt HB ad AC, ita HC ad BA. Sed HC, cùm ſit commenſurabile quadrato Rationalis G, eſt Rationale, ergo & BA, illi commenſurabile erit Rationale. quare recta F, ipſum BA potens, erit Rationalis. Probauimus ergo intentum.

## COROLLARIVM.

*Fieri poteſt vt ſpatium Rationale, contineatur ſub duabus rectis Irrationalibus.*

SPatium enim AB ſub AC,CE, Apotoma & binis nominibus quę Irrationales ſunt, contentum, probatum eſt eſſe Rationale.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*In præcedentibus tribus propoſitionibus ſunt Apotomæ nomina intelligenda commenſurabilia longitudine, ficus quæ ex binis nominibus.*

Fig.223. NAm in propoſitionibus duabus 113. & 114. ſunt demonſtrata eſſe longitudine commenſurabilia, & in 115. nihil planè colligetur ſi nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia commenſurabilia ſtatuantur. vt patet ex illarum demonſtrationibus.

## PROPOSITIO CXVI.

A Media, infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium eſt eadem.

Fig.224. SVppoſitio. Sit AB data Media. Dico ex illa fieri infinitas Irrationales, differentes planè ab tredecim præcedentibus enumeratis in prop.112.

Conſtructio. Expoſita Rationali AC, contineatur ſub AB Media & ſub AC Rationali, rectangulum ſpatium AD, iuxta lemma noſtrum primum ad lib.2. Erit per lem. prop. 38. ſpatium AD, contentum ſub AC Rationali, & Media AB Irrationali, Irrationale. Poſſit verò BE recta hoc ſpatium, inuenienda per prop. vltimam lib.2. quæ BE recta per defin. 11. erit Irrationalis. Dico rectam BE eſſe diuerſam ab præcedentibus omnibus Irrationalibus.

Demonſtratio. Quadratum Mediæ ad Rationalem AC applicatū per lemma noſtrum 1. ad propoſ.19. latitudinem creat Rationalem ipſi AC longitudine incommenſurabilem, per prop.23. Quadrata verò Irrationalium 12, ad eandem AC Rationalem applicata, reddunt latitudines, vel ex binis nominibus, vel Apotomas, iuxta propoſitiones 61. 62.63.64.65.66.98.99.101.102.103. Quadratum autem huius BE Irrationalis ad eandem AC Rationalem applicatum, facit latitudinem Mediam AB: ergo hæc Irrationalis AB diuerſa ab omnibus præcedentibus 13. Irrationalibus.

At ſi compleatur rectangulum DE, erit per cit. lemma prop. 38. contentum ſub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale. Poſſit autem, vt antea, recta EF hoc ſpatium DE; erit eodem modo per cit. defin. 11. Irrationalis: Dico autem & iſtam EF, eſſe diuerſam ab illis tredecim prædictis Irrationalibus, & inuenta BE. Nam quadratum EF ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit BE: & quadrata illarum tredecim; & quadratum ipſius BE ad eandem Rationalem applicatum, latitudines pariunt differentes ab ipſa BE, vt conſtat ex dictis. Hac methodo infinitæ Irrationales reperientur differentes inter ſe ab prædictis, ſicuti fuit propoſitum.

## PROPOSITIO CXVII.

Propoſitum ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

HÆc propoſitio demonſtrata eſt à nobis diuerſis in locis. in corollario noſtro 2. ad prop.8. libr.8. tùm in corollario noſtro 2. ad prop.8. libri huius 10. tùm in coroll. noſtro 4. ad prop.9. huiuſdem libri 10.

COM-

# COMMENTARIVS IN LIBRVM VNDECIMVM ELEMENTORVM GEOMETRICORVM EVCLIDIS.

## DEFINITIONES.

### I.

*Solidum eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habet.*

SOLIDVM, quod alij Corpus, alij ſpatium ſolidum vocant, hoc loco definit Euclides, vt ſit illud in quantitate quod lõgitudinem, latitudinem, & craſſitudinem, quam alij vocant altitudinem, vel profunditatem reſpectu intuentis è ſublimi vel imo loco, habet. Alij ſic definiunt Corpus ſeu ſolidum, quod habet tres dimenſiones, hoc eſt ſecundum tres lineas menſuratur diuerſas, vnam quæ eſt eius longitudo; alteram quæ eſt eius latitudo; tertiam, quæ eſt eius altitudo, vel profunditas, vel craſſitudo. Per craſſitudinem, vel altitudinem aut profunditatem diuerſam ab longitudine ac latitudine eius, diſtinguitur ab ſuperficie definita in libro primo; tùm etiam ab linea ab qua etiam diſtinguitur per latitudinem qua caret linea.

Solidum Ariſtoteles ſeu corpus, in libris phyſicorum, alia ratione definit, dicendo eſſe, quod ſe ipſo plenum eſt. Exempli gratia, ſolida ſphæra ex ære ab centro ad ſuperficiem ſuam: vel Aqua incluſa in aqualis ſolida erit, non autem æqualis eam continens.

Pythagorici quos iſt multis definitionibus huius libri ſequitur Euclides, aliiq́; Geometræ antiqui, aiunt ſolidum ſeu corpus, eſſe veſtigium relictum imaginariũ, ab motu ſuperficiei alicuius finito. Quemadmodum definierunt lineam eſſe relictum veſtigium ab motu puncti: ſuperficiem verò, eſſe veſtigium relictum ab motu ſuperficiei.

### II.

*Solidi autem extremum, eſt ſuperficies.*

SIcuti extrema lineæ ſunt puncta; & ſuperficiei extrema ſunt lineæ: ita corporis extrema vel extremum, eſt ſuperficies. Vnica quidem ſi corpus veluti ſphæra ſit tanquam infinitum; multæ verò ſuperficies, ſi aliud ab ſphæra & ſphæroide.

### III.

*Linea recta, eſt ad planum recta; cùm ad omnes rectas lineas, à quibus illa tangitur, quæque in propoſito ſunt plano, rectos angulos efficit.*

VT linea recta ſit ad planum aliquod recta hoc eſt perpendicularis: oportet, vt ad omnes rectas lineas in plano ipſo exiſtentes à quibus illa tangitur, ſit perpendicularis: vel quod idem eſt, vt ad omnes rectas lineas in plano eductas ab illo in quo illud perforat puncto, ſit perpendicularis. Quod ſi probetur linea recta eſſe perpendicularis omnibus rectis lineis plani exeuntibus ab eo puncto in

quo illud pungit; illa erit perpẽdicularis plano. Verùm in prop. 4. oſtendetur ſufficere eſſe perpendicularem rectam lineam duabus rectis lineis ſe mutuò decuſſantibus in puncto ſectionis communis, ad probandum quod ſit etiam orthogonia plano ſuſtentanti duas illas rectas lineas ſe mutuò decuſſantes.

## IV.

*Planum ad planum rectum eſt; cùm recta linea quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.*

Certum eſt plana ſe mutuò ſecare poſſe atque ideò communem habere illam ſectionem. Si ergo in vno iſtorum planorum rectæ lineæ ductæ omnes ad hanc communem ſectionem perpendiculares, fuerint perpendiculares alteri plano ex datis duobus: plana iſta erunt ſibi inuicem perpendicularia ſeu recta. Quod ſi vnum planum fuerit rectum ad aliud planum, ſeu perpendiculare illi; etiam rectæ omnes lineæ ductæ in vno ex illis ad angulos communi eorum ſectioni, erunt etiam perpendiculares alteri plano. nam definitum ac definitio conuertuntur. Docebit autem propoſit. 3. communem ſectionem planorum eſſe rectam lineam.

## V.

*Recta linea ad planum inclinatio eſt; cùm à ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque à puncto quod perpendicularis in ipſo plano fecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta: eſt, inquam, angulus acutus, inſiſtente linea, & adiũcta comprehenſus.*

Definitione ſecunda tradita eſt natura rectæ lineæ perpendicularis ad planum; nunc proditur natura rectæ lineæ inclinatæ plano, quæ eſt huiuſmodi: nimirum augulus acutus factus ab duabus rectis lineis; quarum vna deducitur perpendicularis plano ab vno punctorum ſublimium rectæ datæ inclinatæ, extra planum ſito ad quod recta linea eſt inclinata; altera verò connectens puncta duo plani, in quibus perforatur ſeu pungitur, ab recta inclinata data, & perpendiculari demiſſa.

Cur Euclides inclinationem lineæ rectæ ad planum, penes angulum acutum ſtatuerit, non autem penes angulum maiorem recto ſeu obtuſum quem efficit cum recta prædicta in plano ducta: Videtur eſſe cauſa iſta, nimirum quia natura per breuiores lineas operando, ſequitur vt inclinatio huiuſmodi rectæ ad planum ſit deſumenda per breuiorem ſeu minorem angulum acutum, reſpectu obtuſi.

An etiam inclinatio dici debeat ad planum, rectæ lineæ ad illud perpendicularis. Negabunt Euclidiani, nam ſumi non poterit huiuſmodi inclinatio per eius definitionem allatam iſtam quintam. Affirmabunt alij latius nomine ſumpto inclinationis, quæ diuidetur in duas, nimirum inclinationem vndequaque æqualem rectæ lineæ ad planum; & inclinationem inæqualem, quæ ſumenda erit modo prædicto per minorem angulum acutum quem efficit cum plano.

Hæ duæ animaduerſiones conuenient etiam ſequenti definitioni ſextæ.

## VI.

*Plani ad planum inclinatio; eſt angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroque planorum ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.*

Hoc eſt aſſumendo punctum aliquod in communi ſectione planorum inclinatorum ad inuicem, quam docebit in prop. 3. eſſe rectam lineam; & per prop. 11. lib. 1. excitando ad iſtam, rectam aliam lineam in vno planorum perpendicularem; & aliam rectam educendo ab eodem puncto prędicto perpendicularem eidem ſectioni, in altero plano; Angulus, inquam, acutus comprehenſus ab prædictis lineis duabus. Quod ſi quædam plana ita ſint inclinata ad inuicem, vt produci commodè non poſſint, & aſſumi eorum inclinatio per angulum acutum: ſumenda erit per angulum obtuſum, effectum ab prædictis duabus rectis perpẽdicularibus ſectioni communi dictorum planorum ad inuicem inclinatorum; dicique poterit angulus obtuſus. Verumtamen illo cognito angulo obtuſo, complementum eius ad duos rectos, erit angulus acutus, inclinatio eorundem planorum iuxta mentem Euclidis.

## VII.

*Planum ad planum ſimiliter inclinatum eſſe dicitur, atque alterum ad alterum; cùm dicti inclinationum anguli, inter ſe fuerint æquales.*

Si prædicti in ſuperiore propoſitione anguli inclinationum, fuerint æquales: ſimiliter planum vnum ad aliud planum dicetur inclinatum, vt aliud planum ad aliud planum. Atque ideo omnia plana habentia æquales

quales angulos inclinationum de quibus definitione quinta egimus; ſimiliter inclinatæ eidem plano, vel planis propriis dicentur, & æſtimabuntur.

VIII.

*Parallela plana ſunt, quæ inter ſe non conueniunt.*

SIcuti libro primo Author noſter, def. 34. Parallelas rectas lineas definiuit, quę cùm in eodem ſint plano, productæque ſint in infinitum ad vtraſque partes, nunquam conueniunt: Sic etiam in hac definitione planorum parallelorum, intelligere oportet, productionem planorum ad vtraſque partes in infinitum, vt non conueniant, ſintq; parallela. Nam duo plana inclinata ad inuicem, & nō ſe mutuò attingentia, ſi producantur ex vna parte, ex illa videlicet à qua recedunt ad inuicem, nunquam conuenient, ad illas partes; & non erunt propterea parallela. Quare intelligere oportet prædictam productionem ad vtraſque partes; tunc enim producta ad alteram partem, cōuenient, & ſic non erunt parallela.

IX.

*Similes ſolida figura ſunt, quæ ſimilibus planis continentur, multitudine æqualibus*

HÆc definitio facilis quidem eſt. Sed aduertendum eſt non ſolas eſſe figuras ſolidas quæ ſimilibus planis & multitudine æqualibus continentur: nam ſi ſphæræ ſimiles ſunt, inter ſe, & ſphæroides; licet non contineantur ſimilibus planis & numero æqualibus. Quare videtur Euclides ſolum hoc loco definire figuras ſolidas planis comprehenſas.

Potuiſſent ſimiles figuræ deſcribi per angulos æquales, & proportionalia latera circa illos angulos, ſicuti definitæ ſunt planæ figuræ rectilineæ ſimiles in libr. 6. defin. 1. ſed neque huiuſmodi definitio conueniret ſimilibus ſphæris.

X.

*Æquales & ſimiles ſolida figura ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine & magnitudine æqualibus, continentur.*

IN hac definitione, intelligendæ ſunt figuræ ſolidæ definitæ ſolummodò, planis comprehenſæ, vt in definitione præcedente. Itaque vt ſimiles & æquales ſint figuræ planis contentæ, oportet primò vt ſimilia ſint plana; ſecundò multitudine ſeu numero æqualia; tertiò vltimoque, magnitudine etiam æqualia.

XI.

*Solidus angulus eſt, plurium, quàm duarum linearum, quæ ſe mutuò contingant, nec in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio.*

ANgulus in communi diuiditur in angulum planum, & angulum ſolidum, prima diuiſione. Planus definitus eſt, def. 8. libr. 1. per inclinationem duarum linearum ſe mutuò tangentium, & non in directum iacentium. Solidus verò nunc præſenti definitione, ita vt eius natura conſiſtat in inclinatione plurium quam duarum linearum ſe mutuò contingentium in vno puncto communi, & non ſuſtentatarum in eadem ſuperficie. Si enim omnes illæ lineæ exiſterent in eadem vna ſuperficie non conficeretur ſolidus angulus, ſed multi plani.

Diuiditur hic angulus ſolidus definitus, in rectilineum, curuilineum, & mixtilineum; rectilineus eſt quando lineæ omnes illum conſtituentes ſunt rectæ; curuilineus quando ſunt curuæ; mixtilineus, quando partim ſunt rectæ, partim curuæ. Euclides non agit in hoc libro & ſequentibus niſi de rectilineis, & pauci Geometræ agunt de curuilineis & mixtilineis.

Alij Geometræ aliam definitionem anguli ſolidi tradunt ſub his terminis.

*Solidus angulus eſt, qui pluribus quàm duobus planis angulis, in eodem plano minimè conſiſtentibus, ſed ad vnum punctum conſtitutis, continetur.*

Quæ definitio facilè intelligitur ex alia declarata. Sicut enim in præcedente plures quàm duæ lineæ in eodem plano minimè ſuſtentatæ requirebantur ad conſtitutionem anguli ſolidi: ſic etiam in iſta plures quam duo plani anguli in eodem plano minimè conſiſtentes requiruntur; ſi enim duo plani anguli tantum in diuerſis planis ſuſtentati, ita componerētur vt circa idem commune punctum apices angulorum illorum duorum eſſent, vel potius illi duo apices in vnum confluerent punctum, lineęque ſimiles eſſent duæ, per intellectum ſuperpoſitæ, vna alteri, ex illis quæ angulos illos duos efficiunt, ita vt plana illorum angulorum non ſint in directum, adhuc ex vna parte vacuum quid ſupereſſent, non enim aliæ duæ lineæ quæ ſunt dictorum angulorum, ſuperponuntur inuicem, alioquin illa duo plana angulorum planorum in vnum coirent, contra ſuppoſitionem;

nem: ſupereſt igitur illud vacuum ad comprehenſionem anguli ſolidi, quod poteſt concipi exiſtere inter illas duas lineas ſeu latera duo prædicta: quare ſi concipiantur illa duo latera exiſtere in eodẽ ſuperficie diuerſa ab duobus iam aſſumptis, concludetur angulus ſolidus tribus ſuperficiebus diuerſis, minimè ſuſtentatis in eadem vna: Atque ita minimùm requiruntur ſuperficies plana tria diuerſæ ad anguli ſolidi comprehenſionem, minimè confluentis in vnam eandem.

Angulos ſolidos nobis repreſentant pyramides terminatæ in vnum punctum, comprehenſos; tùm menſæ, tùm cubicula communia, in quibus, ad vnum punctum confluunt tres lineæ, vel tres ſuperficies diuerſæ, minimè ſuſtentatæ in eodem vno plano.

Aduertendũm eſt angulum ſolidum poſſe comprehendi vnica ſuperficie deſinente in vnum punctum, quales ſunt ſuperficies turbinatæ, ſeu conicæ, ſeu pyramidum rotundas habentium baſes. Quare hæ duæ definitiones allatæ non erunt vniuerſaliſſimæ, ſed ſolum anguli ſolidi ex multis angulis compoſiti.

Accipe igitur vniuerſalem anguli ſolidi definitionem.

*Angulus ſolidus eſt, vnius ſuperficiei curuæ, vel plurium ſuperficierum, deſinentium in vnum punctum commune, circa quod ſpatium ſit concluſum ab illa vel illis ſuperficiebus.*

Dixi vnius ſuperficies curuæ propter angulum ſolidum pyramidum rotundarum ſeu turbinum, ſeu conorum deſinentium in vnum punctum, ſuprà commemoratum. Reliquæ particulæ, plurium ſuperficierum deſinentium, &c. indicant angulum ſolidum comprehenſum ab vna ſuperficie curua, & plana, vel duabus curuis, vel pluribus quàm duabus: nam ſi quis pyramidem ſecaret per verticem plano aliquo, reſultaret angulus ſolidus contentus vna ſuperficie curua & plana: Et ſi conſtitueretur vna pyramis ex duabus ſuperficiebus curuis inæqualibus deſinens in vnum punctum, reſultaret angulus ſolidus ſub duabus ſuperficiebus curuis: Et ſi concipiatur pyramis conſtans multis ſuperficiebus pluribuſque quàm tribus, ſiue planis omnibus, ſiue tantùm planis; & curuis; ſiue planis & curuis; eodem modo comprehenderetur angulus ſub illis.

Ex his omnibus colligitur angulum ſolidum conſtitui poſſe ex vna ſuperficie clauſa circa vnum punctum; tùm ex plana & curua; tùm ex duabus curuis; tùm ex pluribus quàm duabus, ſiue curuis, ſiue planis, ſiue mixtis: nunquam tamen poſſe conſtitui ex duabus planis.

Hoc loco videtur nobis apponere definitionem angulorum ſolidorum æqualium.

*Angulus ſolidus æqualis alteri angulo ſolido, ſeu anguli ſolidi æquales ſunt; qui continentur ſuperficiebus, multitudine & magnitudine æqualibus & ſimilibus.*

Nam huiuſmodi anguli congruent propter æqualitatẽ & ſimilitudinem ſuperficierum, vnius vel plurium, iuxta axioma 9. li. 1.

## XII.

*Pyramis, eſt figura ſolida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum conſtituta.*

HÆc definitio pertinet ad pyramides planis comprehenſas; nam ſi rotundas ſpectemus terminatas ad vnum punctum, cùm vocentur ab Geometris Coni, & alia definitione deſcribantur, non ſpectant ad hanc definitionem.

Pyramidum hoc loco definitarum, aliæ ſunt quæ triangulares habent baſes, aliæ quadrilateras, aliæ quinq; lateras, & ſic in infinitum. Notandumque eſt primò Euclidem vocare pyramides baſium plurium laterum quàm trium, multilateras habentes baſes. Tùm pyramides tot numero obtinere plana conſtituentium angulum ſolidum in vertice, quot ſunt latera baſeos, quam in hac definitione planum vocat Euclides, ex quo aſſurgunt alia plana ad vnum punctum terminata.

Pyramidum figuras conſule in propoſ. 6. libr. 12. Triangularis baſeos, HGIK: quadrilateræ HGLKI: quinque lateræ ABCDEF.

## XIII.

*Priſma, eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum aduerſa duo, ſunt æqualia & ſimilia & parallela; alia verò parallelogramma.*

MVltæ ſunt ſpecies priſmatum. nam quædam ſunt quæ aduerſa duo plana, æqualia & ſimilia & parallela, obtinet triangularia; cuius figuram conſule in propoſ. 7. libr. 12. Alia quæ illa duo plana habet quadrilatera, cuius figuram conſule in propoſit. 28. libr. huius vndecimi. Alia quæ plurium laterum quam quatuor, obtinent plana prædicta duo, veluti quinque, ſex, &c. Porrò omnia priſmata debent obtinere omnia alia ſua plana diuerſa ab prædictis duobus, parallelogram-

lelogramma. Aduerte nonnullos Euclidis Commentatores, exiſtimaſſe ſola ſolida, triangularia duo plana æqualia, ſimilia, & parallela, prædicta, obtinentia eſſe priſmata; non autem reliqua: ſed quis non videat etiam reliquis commemoratis conuenire allatam definitionem.

## X I V.

*Sphæra, eſt quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſeipſum rurſus reuertitur, vnde moueri cœperat; circumaſſumpta figura.*

HÆc definitio eſt per cauſam efficientem. Nimirum ſphæra, circumaſſumpta figura vndequaque terminata, ideoque ſolida ſeu corpus; effecta ab circumducta ſemicirculi circa ſuam diametrum immobilem, quando reuerſus fuerit ad locum vnde moueri cœperat: veſtigium enim illius ſolidum, erit ſphæra.

Aliter ſphæram definiuit Theodoſius libro 1. ſuorum ſphæricorum hac ratione per cauſam formalem.

*Sphæra, eſt figura ſolida, vna ſuperficie comprehenſa, ad quam ab vno puncto eorum quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.*

Sunt & aliæ figuræ ſolidæ vna ſuperficie comprehenſæ, nimirum ſphæroides, ſed ab ſphæra diſtinguuntur, quia nullum punctum intra ſe continent, ex quo ad ſuperficiem propriam, rectæ omnes lineæ applicatæ, ſint æquales inter ſe, vt in ſphæra.

Cicero in libro de vniuerſitate, de mundo loquens tanquam de ſphæra, hanc definitionem his verbis tradit. Globoſus eſt fabricatus, cuius omnis extremitas paribus à medio radiis attingitur.

Globus eſt Synonymum cum ſphæra; & radius ſynomymum cum rectis lineis ab puncto medio ad ſuperficiem ductis æqualibus inter ſe.

## X V.

*Axis autem ſphæra, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus conuertitur.*

## X V I.

*Centrum ſphæra, eſt idem quod ſemicirculi.*

INtellige reuoluti iuxta definitionem Euclidianam, efficientis ipſam ſphæram.

Aduerte ſemicirculum propriè non obtinere centrum proprium, ſed circulum totum iuxta definitionem lib. 1. 15. & 16. poteſt autem dici centrum ſemicirculi impropriè, eo quod ſit centrum circuli totalis.

Centrum autem ſphæræ, iuxta Theodoſium defin. 2. libr. 1. eſt illud punctum quod in definitione ſua prima, ſphæræ videlicet, intra ipſam eſt, ex quo omnes rectæ lineæ ductæ ad eius ſuperficiem ſunt inter ſe æquales.

## X V I I.

*Diameter autem ſphæra, eſt recta linea per centrum ducta, & vtrimque à ſuperficie ſphæra terminata.*

CVm natura diametri ſit biſariàm diuidere figuram cuius dicitur diameter; quis non aduertat impropriè dici diametrum ſphæræ, rectam lineam per centrum eius ductam, & vtrimque ab eius ſuperficie terminatam; nam ipſam ſphæram non diuidere poteſt biſariàm, neque corpus vllum aliud, ſed ſolum ſuperficies planas: Verùm quia eſt diameter propriè dicta circuli ſphæræ tranſeuntis per eius centrum, eamque biſariàm diſpeſcentis, dici poteſt recta illa linea diameter ſphæræ impropriè, & mediatè, hoc eſt circuli maximi ſphæræ tranſeuntis per centrum eius; quare circulus iſte eſt propria diameter & immediata ſphæræ ſeu globi. Quod intelligendum eſt in omnibus corporibus dùm dicuntur rectæ lineæ eſſe eorum diametri; ſunt enim propriè diametri planorum illa corpora diuidentium in duo ſolida æqualia; & plana illa ſunt diametri propriè dictæ illorum corporum diuiſorum ab illis biſariàm.

## X V I I I.

*Conus, eſt quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cœperat; circum aſſumpta figura.*

*Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur; orthogonius erit Conus: Si verò minor amblygonius: Si verò maior Oxygonius.*

HAc definitione Coni in genere, tùm coni recti, amblygonij ſeu obtuſanguli, & oxygonij ſeu acutanguli primùm explicabimus, vt ſonant; tùm iudicium feremus de illis,

lis, & alias ex Apollonio Pergæo proferemus poſt definitionem 20. noſtri Authoris.

Itaque ſi rectangulum triangulum concipiatur moueri circa immotum vnum latus eorum quæ angulum rectum comprehendunt, reliqua duo in ſuis perfectis reuolutionibus, hoc eſt dum redeunt ad ſitum quem ante motum obtinebant, deſcribent diuerſas ſuperficies; illud quidem quod circa rectum angulum, circulum perfectum ex dictis in definitione cauſali circuli tradita definit. libr. 5. aliud verò ſubtenſum angulo recto, ſuperficiem curuam quæ conica dicitur terminatam in vno puncto quod eſt extremum immoti prædicti lateris: atque ita ſuperficies iſta curua terminata in vno puncto; & ſuperficies circuli prædicti, ſpatium comprehendent ſolidum, quod Conus appellatur.

Quod ſi latus mobile deſcribens circulum, ſit æquale immobili, quæ duo circa rectum ſunt angulum: ſpatium ſolidum deſcriptum ab hoc mobili latere, & altero ſubtenſo angulo recto; erit Conus rectus. Quod ſi prædictum latus immobile ſit minus altero immobili, ambo angulum rectum continentia; ſpatium ſolidum ab duobus motis lateribus, effectum, erit conus oxygonius ſeu acutangulus. Quod ſi latus prædictum mobile circa rectum angulum ſit maius immoto; ſpatium ſolidum factum ex duobus prædictis lateribus motis, vocabitur conus obtuſangulus ſeu amblygonius.

Quare autem ſic vocentur iſtæ tres ſpecies conorum, recti, obtuſanguli, & acutanguli. Sic explicamus, Quando duo latera circa angulum rectum trianguli rectanguli ſunt æqualia, certum eſt per propoſit. 5. libr. 1. angulos ad latus recto angulo ſubſtratum eſſe æquales; & quia per propoſit. 32. libr. eiuſdem, tres anguli cuiuſcumque trianguli ſunt æquales duobus rectis; reliqui duo prædicti anguli ab recto in hoc caſu erunt ſemirecti: ergo dum reuoluitur prædictum triangulum, & latus circa rectum angulum peruenit ad rectam lineam infinitam ſupra quam in principio motus ſitum erat illud latus, in parte altera ab dicto angulo recto; ſi concipiatur triangulum hoc permanere & in ſuo primo ſitu ante motum, & in hoc ſupra prædictam lineam infinitam; concipietur triangulum vnum rectangulum, cuius angulus in puncto ſuperiore immobilis lateris compoſitus erit, ex duobus ſemirectis, ideoque rectus comprehenſus ab lateribus duobus ſubtenſis angulis rectis circa imum punctum eiuſdem immobilis lateris; qui angulus rectus cùm ſit in vertice coni effecti, denominabit illum rectum. Quod ſi trianguli rectanguli latus immobile fuerit maius altero mobili, atque ambo circa rectum angulum, angulus in extremo immobili erit minor quàm alius ad baſim oppoſitam angulo recto, per propoſit. 18. libr. 1. quare cùm duo illi ad baſim ex dictis ſint æquales vni recto; ille dictus ad extremum lateris immobilis erit minor quàm ſemirectus; duo igitur tales anguli rectum angulum non efficient, ſed minorem recto: quare angulus in vertice prædictus erit minor recto, ideoque acutus, ac denominans conum acutãgulum ſeu oxygonium. Quod ſi trianguli rectanguli latus immobile fuerit minus altero mobili, amboque angulum rectum comprehendentes, erit angulus in extremo immobilis maior altero ad baſim oppoſitam angulo recto, per citat. propoſit. 18. libr. 1. ideoque maior ſemirecto; ergo duo huiuſmodi anguli ad verticem coni efficient angulum obtuſum denominantem conum obtuſangulum, ſeu amblygonium.

Ex hac definitione coni per cauſam efficientem deducimus iſta corollaria.

## COROLLARIVM NOSTRVM
## I.

*Rectæ omnes lineæ deductæ ab vertice coni huiuſmodi facti ab reuolutione tradita trianguli rectanguli, ad puncta circumferentiæ circularis baſeos eius, exiſtunt in ſuperficie conica illius.*

SI enim intra ſuperficiem coni, vel extra illam eſſent, vel partim in ipſa ſuperficie, partim extra; cùm tota ſuperficies cauſetur ab recta ſubtenſa angulo recto trianguli rectanguli, concipere poterimus rectam illam, eoſdem terminos habentem cum iſta, videlicet verticem coni & punctum circumferentiæ circularis illius; Ergo ſi ducta prædicta recta congruat cùm iſta ſubtenſa recto angulo, quemadmodum iſta eſt in ſuperficie conica, ita etiam illa, quod volumus: ſi non congruat, ſpatium comprehendent duæ rectæ lineę eoſdem punctos extremos obtinentes, contra 14. ax. libr. 1. ſi verò partim congruant, & non congruant, duæ rectæ ſegmentum habebunt commune contra 10. axio. lib. eiuſdem; & nihilominus duæ illarum partes non congruentes, ſpatium continebunt contra cit. axio. 14. libr. 1. hæc abſurda indicant effugia contra hoc coroll. eſſe falſa, & propoſitionem corollarij huius veram.

COROL-

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I I.

*Rectè Archimedes libro de Sphæra & cylindro, vocat huiuſmodi conos definitos, iſoſceles.*

QVia cùm rectè omnes lineæ in vnius illorum ſuperficie ductæ ab vertice illius ad puncta circumferentiæ baſeos illius, ſint æquales, ductiſque chordis in hoc circulo extrema duo puncta duarum illarum nectentibus; reſultare neceſſe eſt triangula iſoſcelia omnia, denominantia conum iſoſcelem. Ne quis verò dixerit ideo vocare iſtos conos iſoſceles quia fiunt ab rectangulo triangulo iſoſceli; nam aſſumit conos habentes altitudines inæquales ſemidiametro arcularium baſium illorum.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I I I.

*Axis coni iſoſcelis eſt perpendicularis circulari baſi illius in centro.*

SEmper enim eſt ad angulos rectos lateri efficienti circularem baſim, quare erit perpendicularis omnibus lineis rectis ab centro ad circumferentiam circuli, quas repræſentat cauſa efficiẽs videlicet latus prædictum mobile, in quolibet inſtanti quietis; ergo per def. 3. libri huius, erit perpendicularis plano circuli prædicti, in centro eius.

## X I X.

*Axis Coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam vertitur.*

## X X.

*Baſis verò Coni, eſt Circulus qui à circumducta linea recta deſcribitur.*

HOc eſt ab latere trianguli rectanguli mota, angulum rectum vnà cum immobili continente.

Hæ definitiones conorum Euclidis ſunt conorum axem habentium hoc eſt latus immobile circa rectum angulum, ad angulos rectos baſi in centro eius.

Et quia ſunt alij Coni axem habentes, id eſt rectam lineam ab angulo verticis ad centrum circularis baſeos inclinatam, qui non poſſunt effici ab reuolutione prædicta trianguli rectãguli Euclidiana; ideo definitionem vniuerſaliorem coni, & ſpecierum eius reſeremus ex Apollonio Pergæo libr. 1. conicorum, quas explicabimus ſuo loco noſtris in illum Authorem commentariis. Sit igitur vniuerſalis definitio cauſalis, & conicarum ſuperficierũ, & Conorum, verticis & axeos.

*Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: ſuperficiem à recta linea deſcriptã, conſtantemque ex duabus ſuperficiebus ad verticem inter ſe aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, qua eam deſcribit, in infinitum producta, voco ſuperficiem Conicam.*

*Verticem ipſius, manens punctum.*
*Axem, rectam lineam, qua per punctum & centrum circuli ducitur.*
*Conum autem voco figuram contentam circulo & conica ſuperficie, qua inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.*
*Verticem Coni, punctum, quod & ſuperficiei Conica vertex eſt.*
*Axem, rectam lineam, qua à vertice ad circuli centrum producitur.*
*Baſim, circulum ipſum.*
*Conorum, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos rectos ipſis baſibus.*
*Scalenos verò, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.*

Has definitiones ideo protuli quia omnia quæ demonſtrat Euclides de ſuis conis in libro 12. etiam oſtendemus conuenire conis ſcalenis, hoc eſt Conis quorum axes ſunt inclinati ad baſes ſuas circulares. Figuras autem huiuſmodi conorum conſule in propoſitionibus 14. & 15. lib. 12.

## X X I.

*Cylindrus eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum qua circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde cœperat moueri; circumaſſumpta figura.*

HÆc aſſumpta figura ſolida cylindri ab Euclide definita per cauſam efficientem, tribus ſuperficiebus continetur, duabus circularibus æqualibus effectis ab reuolutione duorum laterũ rectanguli parallelogrammi inſiſtentium ad angulos rectos immobili lateri, quæ cùm ſint æqualia per prop. 34. li. 1. efficient

efficient duos circulos æquales iuxta def. 15. libr.1.& 1.libr.3. Tertia verò ſuperficies eſt conuexa tota effecta ab reuolutione lateris paralleli immobili. Cylindrum verò nonnulli vocant columnam; à qua tamen diſtinguitur iuxta Architecturæ præcepta, nam imum Columnę ſtrictius eſt partibus circa medium, & ſummitas adhuc ſtrictior imo: cylindrus verò æqualis continuo vbique.

## XXII.

*Axis autem Cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.*

## XXIII.

*Baſes verò cylindri ſunt circuli à duobus aduerſis lateribus, quæ circumaguntur deſcripti.*

EVclides definiuit ſolum cylindrum cuius axis inſiſtit ad angulos rectos baſibus,iuxta def.3.huius libri. Verùm quia ſunt etiam alij cylindri quorum axes ſunt inclinati ſuis baſibus, de quibus etiam in libro 12 eadem probabimus quæ Euclides de rectis; ideo hoc loco proferam originem vniuerſalem ſuperficierum cylindricarum, & ſpecierum eius definitiones ex ſereno Antinſenſi libro 1. de ſectione cylindri, quas noſtris in eum commentariis illuſtrabimus.

Sequitur ex his definitionibus 31. 32. 33. Rectas omnes lineas eductas ex quibuſcumque punctis circumferentiæ circularis baſeos cylindri ſuperioris definiti, perpendiculares ad planum baſeos alterius, cylindri eiuſdem, incidere in circumferentiam circularem huius baſeos,& eſſe in ſuperficie rotunda cylindri, & eſſe æquales inter ſe, & parallelas axi cylindri; & ſi duæ illarum rectis vniantur lineis receptis in baſibus, efficere cū iſtis chordis baſium,parallelogrammum rectangulum.

Primum ſic explicatur. Eſto exempli gratia vna earum ſi fieri poſſit non incidens in punctum circumferentiæ baſeos, concipere poterimus adductum latus mobile rectanguli parallelogrammi efficientis cylindrum prædictum ad punctum illud è quo educta eſt perpendicularis, quod latus erit in ſuperficie cylindri facti quam effecit,incidetque in punctum alterius circularis baſeos quàm etiam effecit extremo ſuo puncto communi cum altero latere mobili circa rectum angulum; hoc vero adductum latus eſt perpendiculare plano baſeos ex eiſdem rationibus quibus oſtenſus eſt axis cylindri rectus baſibus ſuis;itaque erunt ex eodem puncto in ſublimi dato, duæ rectæ lineæ perpendiculares demiſſæ ad planum baſeos ſeu ad planam ſuſtentantem illam, quæque per 3.def. libr. huius erunt ad angulos rectos rectæ lineæ vnienti puncta duo diuerſa plani in quæ incidunt illæ duæ rectæ perpendiculares; & ſic contra prop.17.lib.1. in triangulo rectilineo reſultante ab tribus dictis rectis lineis,erūt duo anguli recti,quod eſt abſurdum; ergo recta illa linea perpendicularis ab vno puncto circumferentiam circularis baſeos cylindri demiſſa ad planum alterius baſeos illius non incidet extra circumferentiam alterius baſeos, ſed in punctum illius, quod erat primo propoſitum.

Quod quælibet illarum perpēdicularium exiſtat in ſuperficie cylindri rotunda, ſic probatur: Adductum latus mobile quod effecit ſuperficiem cylindri rotundam ad punctum circumferentiæ baſeos è quo demiſſa eſt illa perpendicularis, vel congruit cum dicta recta perpendiculari, vel non;ſi non congruit, cùm habeant alia extrema ſua in circumferentia alterius baſeos, vt ante oſtenſum eſt, vel illa conuenient in eodem puncto vel non; ſi primum, duæ rectæ lineæ ſpatium concludent contra 14.axio.libr.1. ſi ſecundum,cùm ſint ambæ rectæ lineæ ad angulos rectos baſi circulari in quam incidunt, erunt etiam per definit.3.libr.huius, ad angulos rectos chordæ nectenti hæc duo puncta diuerſa; quare contra cit.prop.17.libr.1.in triangulo rectilineo erunt duo anguli recti,igitur poſitio iſta falſa erit: congruet ergo quælibet dicta linea perpendicularis cum latere prædicto mobili,vnde vt iſtud recipitur in ſuperficie rotunda cylindri, ita etiam quælibet dicta recta linea perpendicularis. Et quia quælibet illarum oſtenſa eſt congruere cum eodem latere mobili prædicto,erunt per 9.ax.& 1.libr.1.omnes inter ſe æquales. Et quia ſemper eſt parallelum hoc latus axi cylindri effecti, & illæ prædictæ perpendiculares rectæ repræſentantur in illo, ideo illæ erunt omnes perpendiculares dictæ lineæ, parallelæ axi cylindri. Denique quia duæ quælibet iſtarum perpendicularium baſi ad quam demiſſæ ſunt,eſt etiam per def.3.huius libri,perpendicularis rectæ chordæ vnienti earum extrema in hac baſi, duæ huiuſmodi perpendiculares erunt per prop.28.lib.1.parallelæ inter ſe: ergo etiam per propoſ.33.libr.eiuſdem 1. recta alia chorda vniens puncta iſtarum perpendicularium in altera baſi, erunt æquales & parallelæ, vnde reſultabit parallelogrammum rectangulum ex duabus huiuſmodi perpendicularibus, & duabus chordis earum extrema contingentibus. & ſic erit oſtenſum propoſitum conſequens.

Si

*Si duorum circulorum æqualium & æquidiſtantium diametri ſemper inter ſeſe æquidiſtent, & ipſa in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & ſimul circumferantur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cœpit: ſuperficies quæ à circumlata recta linea deſcribitur, cylindrica ſuperficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, linea ipſa deſcribente in infinitum producta.*

*Cylindrus, eſt figura quæ circulis æquidiſtantibus, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur.*

*Cylindri baſes, ſunt circuli ipſi.*

*Axis, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.*

*Latus autem, cylindri linea, quæ cùm recta ſit, & in ſuperficie ipſius cylindri, baſes vtraſque contingit; quam & circumlatam, cylindri ſuperficiem deſcribere antea diximus.*

*Cylindrorum, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus.*

*Scaleni autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent.*

Huiuſmodi Cylindrorum figuras conſule in libro 12. prop. 12. 13. 14. & 15.

XXIV.

*Similes Coni & Cylindri ſunt; quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.*

XXV.

*Cubus ſiue Hexaedrum, eſt figura ſolida, ſub ſex quadratis æqualibus contenta.*

XXVI.

*Tetraedrum, eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.*

XXVII.

*Octaedrum, eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.*

XXVIII.

*Dodecaedrum, eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus & æquilateris & æquiangulis contenta.*

XXIX.

*Icoſaedrum, eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus & æquilateris contenta.*

HOrum quinque corporum poſtremorum figuras in plano explicatas quoad eorum ſuperficies, conſule in propoſitionibus libri 13. 14. 15. 16. 17. quas ſi iuxta corollaria noſtra illarum propoſitionum in materia plicatili deſcripſeris, & complicaueris, propoſita prædicta corpora obtinebis ſpectabilia.

XXX.

*Parallelepipedum, eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum quæ ex aduerſo parallela ſunt, contenta.*

ADuerte quod omne parallelepipedum eſt priſma ex defin. 13. ſed non omne priſma eſt parallelepipedum, nam priſma oppoſita baſes habens triangulares non poteſt eſſe parallelepipedum, per hanc definitionem.

XXXI.

*Solida figura in ſolida figura dicitur inſcribi, quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ cui inſcribitur.*

XXXII.

*Solida figura ſolidæ figuræ viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptæ tangunt omnes angulos vel ſuperficiē figuræ, circum quam deſcribitur.*

HÆ ſunt definitiones Euclidis, ſequentes addo conducentes iis quæ in libris ſolidorum Authores noſtri tractant, & Geometræ ſpeculari poſſunt, ſit ergo definitio.

XXXIII.

*Solida figura Regularis, vel Corpus regulare planis contentum, eſt ſolida figura quæ planis æqualibus, æquilateris, & æquiangulis continetur.*

XXXIV.

*Solida figura Regularis planis comprehēſa Centrum, eſt punctum ex interioribus figuræ, è quo ad omnes angulos ſolidos figuræ, rectæ lineæ ductæ ſunt æquales inter ſe.*

XXXV.

Digitized by Google

Digitized by Google

## PROPOSITIO III.

### Si duo plana ſe mutuò ſecent, communis eorum ſectio erit linea recta.

Fig. 127. SVppoſitio. Duo plana AB, CD, ſe mutuò ſecent; Dico communem illorum ſectionem eſſe vnicam ſolum rectam lineam, puta EF.

Demonſtratio. Imprimis cùm eorum communis ſectio recipiatur in vtroque plano, & ipſa plana non ſint infinita ex natura obiecti Mathematici, ſectio iſta communis terminata erit, & diuiſibilis; diuiſibilis quidem, quia planum ſecans aliud, ſecat illud ſecundũ longitudinem vel latitudinem ſuam diuiſibilem, vnde reſultat ſectio cõmunis diuiſibilis. Sed iſta ſectio communis non poteſt eſſe ſuperficies vt EGF; cùm enim recipiatur in vtroque plano, & vnum ſit ſublime reſpectu alterius, ſequeretur & ſuperficiem EGF eſſe in plano CD, & ſupra eius planum in alio plano AB ſuperiore, quæ ſe mutuò deſtruunt; quare ſectio communis planorum non poteſt eſſe ſuperficies. Sed neque poterit eſſe linea curua v. g. EGF: nam ſumendo in hac curua linea EGF duo puncta E, F, diuerſa, poterimus ea nectere vna linea recta EF, quæ in vtroque plano recipietur, ob eius extrema duo E, F, in eis recepta: quare ſuperficies EGF, clauſa terminis illis duobus EF recta linea, & EGF curua, exiſtentibus in illis duobus planis, exiſteret in eiſdem duobus planis, cõtra id quod anteà demõſtrauimus. Sed neque ſectio communis huiuſmodi, erunt duæ rectæ lineæ, vel mixtæ vt EG, GF, angulum efficientes in G; cùm enim recipiantur in vtroque plano, poſſemus extrema E & F coniungere recta linea EF, quæ ſuſtentaretur in vtroque plano vti ſuperius oſtendimus: & ſic reſultaret ſuperficies EGF, communis ſectio planorum, ſuſtentata in vtroque plano, contra demonſtrata. Denique non poteſt eſſe ſectio illa communis, in duabus rectis lineis aut curuis, HI, EF, ſeparatis, aut pluribus; nam cùm puncta H, E, F, I, ſint in vtroque plano, ducendo rectas HE, IF, ſuperficiem claudent cum aliis HI, EF, quæ exiſtet in vtroque plano, contra demonſtrata. Cùm igitur ſectio communis planorum non poſſit eſſe punctum indiuiſibile, nec linea curua, nec ſuperficies, nec plures lineæ, ſupereſt vt ſit vnica recta linea. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO IV.

### Si recta linea rectis duabus lineis ſe mutuò ſecantibus, in cõmuni ſectione, ad angulos rectos inſiſtat: Illa etiã ducto per ipſas plano ad angulos rectos erit.

SVppoſitio. Recta linea AB, inſiſtat ad angulos rectos in puncto B, communis ſectionis duarum rectarum CD, EF, ſe mutuò ſecantium: Dico quod iſta recta AB linea ſit perpendicularis plano IK ſuſtentanti datas rectas CD, EF, iuxta prop. 2. Fig. 128.

Conſtructio. Centro B, interuallo BC, deſcripta ſit circuli circũferentia in plano GH, quæ ſecet datas rectas CD, EF, in punctis C, E, D, F; & ab vertice A tectæ AB datæ exiſtente in ſublimi ſeu extra planũ GH, ſurſum verſus, concipiantur ductæ rectæ lineæ AC, AE, AD, AF, quæ efficient rectangula triangula ABC, ABD, ABE, ABF, ob rectos angulos datos in B. Præterea ex omnibus aliis poſſibilibus punctis circũferentiæ circuli deſcripti, nos vnũ eligimus inſtar omniũ, puta I, ex quo ad centrũ B ducatur recta IB producendam vſque ad K punctum circumferẽtiæ dictæ & alias cõcipimus ductas IK IA, rectas quidquid enim inferemus de iſta diametro IBK, inferendum erit de aliis omnibus diametris tranſmittendis per quæcumque alia puncta circumferentiæ prædictæ.

Conſtructio. Per 3. prop. lib. 1. ſumãtur rectæ BC, BD, BE, BF æquales; & puncta C, E, iungantur recta linea CE, tùm puncta D, F, alia recta DF; & ex puncto G rectæ CE, per B punctum, agatur recta GB, ſecans in H rectam FD; & ex puncto A quod in ſublimi eſt, reſpectu plani IK, concipiantur tranſmiſſæ rectæ lineæ AC, AG, AE, AD, AH, AF.

Demonſtratio. Quia datur recta AB perpendicularis in B, rectis CD, EF, erunt triangula ABC, ABE, ABD, ABF, rectãgula; ideoque per 47. prop. li. 1. quadrata rectarũ ex angulo B recto exeuntium, erunt æqualia quadrato rectæ ſubtendentis angulum rectum in B; ſunt autem ex cõſtructione rectæ BC, BD, BE, BF, æquales, & communis recta AB; ergo quadrata rectæ AB, & cuiuſlibet ex aliis quatuor dictis, erũt ęqualia quadratis rectæ eiuſdem AB, & cuiuſlibet alterius ex dictis quatuor rectis; quare quadrata rectarũ AC, AE, AD, AF, erunt æqualia inter ſe per 1. ax. li. 1. & ipſæ rectæ dictæ æquales. Sunt autẽ triangula CBE, DBF, iſoſcelia per conſtructionẽ, ergo per prop. 5. li. 1. habebũt angulos ad baſes

ſuas CE, FD, æquales ſingula; & quia anguli eorũ EBC,FBD,ad vertices ſunt ęquales per prop.15.libr.1.& latera cõprehendentia illos ſunt æqualia per cõſtructionem, erunt anguli BCE, BEC, BFD, BDF, ad baſes æquales CE,FD,ęquales inuicem per 4.prop.& 1.ax. lib.1. Cùm igitur in triãgulis GBE,HBF,anguli in B ſint æquales per 15.libr.1. & anguli alij in E & F, probati æquales, & latera BE, BF,æqualia per conſtructionem,per prop.26. lib.1.latera habebunt æqualia GE, HF, tùm GB,HB. Præterea quia oſtẽdimus rectas AE, AF,AC,AD, eſſe æquales,& rectas CE,FD, æquales;erunt in triangulis CAE,FAD,iſoſcelibus,anguli CEA,DFA,ęquales per prop. 8.lib.1. His poſitis quia in triangulis duobus GEA,HFA,probauimus duo latera æqualia eſſe, HF, FA,GE;EA, vtrumque vtrique, & angulos GEA,HFA,ineſſe æquales,comprehenſos ab his lateribus;erunt per 4.prop.lib.1. baſes eorũ rectę AG,AH,ęquales: Deniq; quia in triangulis GBA,HBA,ſunt oſtẽſa duo latera BG,BH, æqualia, quibus cõmune eſt latus AB,& baſes eorũ AG,AH, vltimò ſunt probatæ æquales; angulos in B habebunt rectos ſupra rectam ductam GH in plano IK ſuſtentante datas alias rectas duas CD,EF. Hoc autem artificio vtemur ad demonſtrandam rectam AB perpendicularem eſſe omnibus aliis rectis ducendis in plano IK, diuerſis ab datis CD,EF. Ergo per def.3.recta AB erit ad angulos rectos plano ſuſtentanti duas datas rectas CD,EF,quibus orthogonia erat in puncto B ſectionis earum mutuæ. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si recta linea multis rectis lineis ad angulos rectos inſiſtat in communi puncto ſectionis illarum: illa ducto per eas plano ad angulos rectos erit.*

NAm ſi duę ex illis aſſumantur,recta illis inſiſtens in communis ſectionis earum puncto ad angulos rectos, erit per hanc prop. ad angulos rectos plano per eas ducto: ergo cùm reliquæ dentur in eodem plano, eadem recta prædicta erit ad angulos rectos ipſi plano recipiente omnes.

## PROPOSITIO V.

Si recta linea rectis tribus lineis ſe mutuò tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illæ tres rectæ in vno ſunt plano.

SVppoſitio. Recta linea EA inſiſtat tribus rectis lineis AB,AC,AD, ad angulos rectos in A puncto communis ſectionis illarum. Dico illas tres rectas AB, AC, AD, in vno GH exiſtere plano. Fig.229.

Demonſtratio. Per prop.2.duæ rectæ AC, AD,in vno exiſtent plano,puta GH. Quod ſi recta tertia AB non exiſtat in eodem plano GH,ſed in ſublimi reſpectu plani GH,exiſtat ſi fieri poſſit in alio EF plano, cum recta AE quæ per cit. prop.2. exiſtere debet in eodem plano in quo recipitur recta EA. Iã vero quia duo plano EF,GH, ſibi mutuò occurrunt in communi puncto A,ſi cõcipiantur producta, ſe mutuò ſecabunt,eorumq́ue ſectio communis erit recta linea per 3.propoſ. quæ ſit v.g. AF: Datur autẽ recta EA orthogonia duabus rectis lineis AC,AD,ſe mutuò ſecãtibus in A,receptis in plano GH, ergo per prop.4. præced.eadem recta EA erit perpendicularis plano GH,& per def.3.ad angulos rectos ipſi AF rectæ: ſed & eadẽ recta EA datur ad angulos rectos ipſi rectæ AB: ergo cùm recta EA ſit ad angulos rectos duabus rectis AB, AF,in eodem plano EF exiſtentibus cum recta EA, & anguli omnes recti rectilinei ſint æquales per ax.12.lib.1.erunt duo anguli recti EAB,EAF, æquales,pars & totum, contra 8.ax.lib.1.hoc abſurdum indicat poſitionem tertiæ rectæ lineæ AB, non exiſtere in eodem plano cum aliis duabus AC,AD, eſſe falſam, & propoſitionem veram.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si recta pluribus quàm tribus rectis lineis ſe mutuò ſecantibus in communi puncto, ad angulos rectos inſiſtat: illæ omnes in eodem exiſtent plano.*

DE tribus cèrtum eſt per iſtam propoſitionẽ,& ſi fieri poſſit qualibet reliquarum exiſtat in alio plano: Quia verò comparata cum eadem recta inſiſtente ipſi ad angulos rectos,& duabus ex receptis, in eodẽ plano trium receptarum exiſtere debet per præſentem propoſitionem: pugnantia ſequuntur ex poſitione aduerſarij, quæ ideo falſa erit, & aſſertio corollarij huius vera.

## PROPOSITIO VI.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SVppoſitio. Duæ rectæ AB, CD, eidem plano EF, ad rectos ſint angulos: Dico illas eſſe inter ſe parallelas. Fig.230.

Conſtructio. In plano EF, ponatur per 11.prop.libr.1.recta GD, ad angulos rectos rectæ BD ducendæ, fiatque per 3.prop.lib.1. recta

recta GD, æqualis ipſi AB: & concipiantur duæ rectæ lineæ AD, AG, BG.

Demonſtratio. Per defin. 3. recta AB, erit ad angulos rectos ipſi rectæ BD, & recta CD ipſi rectæ DG, & rectæ DB. Porrò in triangulis ABD, BDG, quia duo latera AB, BD, ſunt æqualia duobus lateribus BD, DG, reſpectiuè, continentque angulos æquales rectos, baſes eorum AD, BG, erunt æquales per 4. propoſ. lib. 1. Inſuper quia duo triangula ABG, ADG, duo latera habent æqualia reſpectiuè, AB, BG, & GD, DA, baſimque AG communem obtinent, erunt per 8. prop. libr. 1. anguli eorum ADG, ABG, æquales; oſtendimus autem hunc ABG eſſe rectum, ergo alter angulus ADG erit etiam rectus. Cùm igitur probauerimus rectam GD eſſe ad angulos rectos tribus rectis AD, BD, CD, ſe mutuò in D ſecantibus, illæ tres rectæ AD, BD, CD, in vno exiſtent plano per præced. prop. 5. ſed per 2. prop. recta AB, recipitur in eodem plano in quo ſunt duæ rectæ DB, DA; & recta CD oſtenſa eſt recipi in eodem plano in quo ſunt duæ rectæ DB, DA, eædem prædictæ; ergo duæ rectæ AB, CD, recipientur in eodem plano rectarum DA, DB: Ad hæc oſtendimus angulos ABD, CDB, rectos eſſe; ergo per prop. 28. libr. 1. erunt duæ rectæ AB, CD, parallelæ. quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si plures quàm duæ rectæ lineæ eidem plano ſint ad angulos rectos: ipſæ omnes erunt parallelæ.*

De duabus certum eſt per hanc prop. 6. quælibet autem reliquarum comparata cum vna ex prædictis, erit etiam parallela ipſi per iſtam propoſ. Igitur ſi tantùm duæ eſſent parallelæ, nulla reliquarum ab duabus prædictis, eſſet parallela cuilibet ex illis, contra id quod modo oſtendimus. Ergo cùm demonſtrentur omnes parallelæ vni cuilibet, erunt inter ſe parallelæ omnes.

## PROPOSITIO VII.

Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta: illa linea recta quæ ad puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano.

Fig. 231. Suppoſitio. Duæ rectæ lineæ AB, CD, parallelæ ſint iuxta definitionem 34. lib. 1. in eodē plano EF exiſtentes, & accepta quælibet duo puncta in illis, punctum quidem G in recta AB, punctum verò H in alia recta CD: Dico rectam GH nectentem iſta duo puncta exiſtere in eodem plano EF, parallelarum rectarum datarum AB, CD.

Demonſtratio. Si recta linea GH nectens puncta G, H, non exiſtat per conſtructionem in plano EF parallelarum datarum rectarum AB, CD, planum non adæquabitur rectæ lineæ applicatæ illi ſecundum ſua extrema; contra def. planæ ſuperficiei allatam ab Herone Geometra, in def. 7. lib. 1. ergo vti propoſitum, recta linea Connectens puncta duo aſſumpta in parallelis rectis lineis, vnum in vna, alterum in alia, exiſtet in eodem plano ipſarum parallelarum datarum. quod erat probandum.

### COROLLARIVM NOSTRVM

### I.

*Recta linea coniungens puncta duo accepta in duabus rectis non parallelis in eodem plano ductis, vnum in vna, alterum in alia; recipietur in eodem plano datarum.*

Eodem artificio ac diſcurſu demonſtrabitur, quo propoſitio iſta 7.

### COROLLARIVM NOSTRVM

### I I.

*Recta linea reuinciens puncta duo in aliquo plano exiſtentia, ſuſtentatur tota etiam producta in ipſo plano punctorum ipſorum.*

Applicando enim latus plani alicuius ipſum terminantis quod eſt linea recta, ipſis pūctis datis, productum hoc planum ſecabit ſuſtentans puncta data, & quidem in recta linea exiſtēte in ipſo plano punctorum, ergo recta linea reuinciens ipſi puncta exiſtet in plano ipſorum, etiam producta, alioqui contra 1. propoſ. pars eius aliqua exiſteret in ſublimi.

## PROPOSITIO VIII.

Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Suppoſitio. Conſulatur figura prop. 6. Plano EF, incidant duæ rectæ lineæ AB, CD, Fig. 230.

 CD,

CD, parallelæ, vnaque illarum puta CD, ad rectos angulos ſit plano ipſi EF: Dico quod altera AB eidem plano EF erit perpendicularis.

Conſtructio. Puncta B & C, exiſtentia in plano EF, in quibus datæ rectæ perforant ipſum planum, reuinciantur recta linea BD, quæ exiſtet in plano EF per 2. corollar. noſtrum præced. propoſ. tùm in plano parallelarum AB, CD datarum per præced. prop. 7. Præterea in plano EF, ducatur per 11. prop. libr. 1. recta DG perpendicularis rectæ BD, fiatque DG æqualis ipſi AB per 3. prop. libr. 1. & concipiantur ductæ rectæ AD, AG, BG.

Demonſtratio. In triangulis DBG, ABD, quia duo latera AB, BD, ſunt reſpectiuè æqualia lateribus BD, DG; angulusque ABD per def. 3. eſt rectus, & alter BDG, etiam rectus eſt, ideoque æquales per 12. axio. libr. 1. baſes habebunt æquales AD, GB, per 4. propoſ. libr. 1. Inſuper per 3. defin. augulus ABG rectus erit; & in triangulis ABG, ADG, quia duo latera AB, BG, ſunt reſpectiuè æqualia lateribus GD, DA, baſiſque AG eſt communis, erunt per 8. propoſ. libr. 1. anguli ABG, ADG, æquales; & quia vnus ABG oſtenſus eſt rectus, alter etiam ADG rectus erit: eſt autem per 29. libr. 1. angulus BDC rectus, exiſtente alio angulo ABD recto vti probauimus per 3. defin. Ergo GD, erit ad angulos rectos in puncto D, rectis duabus lineis DB, DA; ideoque per 4. propoſ. plano ſuſtentanti ipſas BD, DA: ſed duæ rectæ BD, DA, exiſtunt in plano rectæ AB, illa quidem vti probatum eſt, hæc verò per 2. prop. & recta CD eſt etiam oſtenſa exiſtere in plano rectarum AB, BD; ergo tres rectæ lineæ CD, AD, BD, exiſtent in eodem plano, cui eſt ad angulos rectos oſtenſa recta GD, quæ ideo per 3. def. etiam ad angulos rectos erit ipſi rectæ DC. Denique quia recta CD eſt ad angulos rectos oſtenſa duabus rectis BD, DG, erit per 4. propoſ. orthogonia plano EF ſuſtentanti rectas BD, DG. Si ergo duæ rectæ lineæ ſint parallelæ, & vna illarum ad angulos rectos alicui plano ſit, altera etiam eidem plano perpendicularis erit.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Rectarum omnium parallelarum ſi vna fuerit alicui plano perpendicularis, reliquæ omnes eidem plano erunt perpendiculares.*

De duabus demonſtratio proceſſit. Iam verò per inductionem quælibet reliquarum cum quauis ex iſtis iam demonſtratis perpendicularibus eidem plano, oſtendetur etiam perpendicularis ipſi eidem plano; ergo omnes erunt perpendiculares eidem plano. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO IX.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

Suppoſitio. Rectæ lineæ AB, CD, ſint parallelæ vni tertiæ EF, verum tertia hæc exiſtat in diuerſo plano recipiente datas alias rectas, v.g. AB, CD; Dico ipſas AB & CD eſſe etiam parallelas inter ſe. Fig. 232.

Conſtructio. Parallelæ datæ duæ rectæ lineæ AB, EF, exiſtent in eodem plano per 34. def. libr. 1. ergo per prop. 12. lib. eiuſdem, poterimus emittere ex G puncto rectæ EF, rectam GH perpendicularem rectæ AB: ſimili modò aliam rectam GI perpendicularem rectæ CD parallelæ datæ ipſi EF; quod punctum cùm ſit extra planum rectarum recipientium datas AB, CD, ex datis, angulum efficient in G, ſeque mutuo ſecabunt: quare per 2. prop. ipſæ GH, GI, rectæ exiſtent in eodem plano; Porrò cum rectæ GH, GI, ſint ad angulos rectos ipſis AB, CD, parallelis datis tertiæ EF, etiam per coroll. noſtrum ad propoſ. 29. libr. 1. erunt eædem rectæ GH, GI, perpendiculares ipſi EF; vnde recta EF viciſſim erit ad angulos rectos ipſis GH, GI, in communi puncto G ſectionis illarum, vnde etiam per 4. propoſ. eadem recta FG erit ad angulos rectos plano ſuſtentanti ipſas rectas GH, GI: Et quia FGE, & AB, dantur parallelæ, & oſtenſa eſt vna earum FGE ad angulos rectos plano recipienti rectas GH, GI, erit per prop. præced. 8. etiam altera AB ad angulos rectos eidem plano ſuſtentanti rectas GH, GI: Eodem modo probabimus rectam CD eſſe ad angulos rectos plano recipienti dictas rectas GH, GI.

Demõſtratio. Rectæ lineæ AB, CD, oſtenſæ ſunt in conſtructione, ad angulos rectos eidem plano ſuſtentanti rectas GH, GI, ergo per prop. 6. erunt ipſæ parallelæ. Eodem artificio demonſtrabuntur reliquæ omnes aliæ rectæ lineæ datæ parallelæ tertiæ cuidam EF, eſſe parallelæ inuicem. quare demonſtrata erit propoſitio.

## PROPOSITIO X.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò tangentes ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

Fig. 233. Svppoſitio. Duæ rectæ lineæ AB, AC ad ſe inuicem inclinatæ & angulum facientes in A, ſint parallelæ aliis duabus rectis DE, DF, ad ſe inuicem inclinatis & angulum efficientibus in D; itaque ſint parallelæ vna vni, altera alteri, v.g. AB ipſi DE, & AC ipſi DF, vt duæ primæ exiſtant in vno plano iuxta 2. propoſ. & aliæ duæ in alio plano: Dico angulos BAC, EDF, ab ipſis factos eſſe æquales inter ſe.

Conſtructio. Per 3. prop. lib. fiant AB, DE, parallelæ, æquales; & aliæ duæ parallelæ AC, DF, fiant etiam æquales: tùm ducantur rectæ BE, AD, CF, BC, EF.

Demonſtratio. Quia parallelas æquales rectas AB, DE, coniungunt rectæ BE, AD, ipſæ erunt per 33. prop. libr. 1. æquales & parallelæ: Ita etiam rectæ AD, CF, erunt parallelæ inuicem & æquales. Cùm igitur duæ rectæ BE, CF, ſint parallelæ tertiæ AD oſtenſæ, erunt per præced. propoſ. 9. parallelæ inuicem; & quia etiam oſtenſæ ſunt æquales tertiæ eidem AD, erunt per 1. ax. libr. æquales inter ſe. Ergo per cit. propoſ. 33. libr. duæ rectæ BC, EF, nectentes æquales & parallelas rectas BE, CF, erunt etiam æquales inter ſe. Denique cùm in triangulis BAC, EDF, ſint latera BA, CA, æqualia facta reſpectiuè lateribus ED, FD, & baſes BC, EF, æquales, erunt anguli BAC, EDF, æquales per 8. propoſ. libr. 1. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XI.

A puncto dato in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Fig. 234. Svppoſitio. Ad ſubiectum planum BC, demittenda ſit recta AI perpendicularis ab A puncto in ſublimi dato.

Conſtructio. Ducatur quælibet recta DE in dato plano BC: & applicando lineam rectam lateralem alicuius plani, huic rectæ D, tùm planum datum dato puncto A, demittatur per 12. prop. libr. 1. in iſto plano applicato ſic, recta linea AF perpendicularis ductæ DE, quæ recta AF concipiatur permanere ſublato dicto plano applicato: Tùm in plano BC, per 11. propoſ. libr. 1. ex puncto F, rectæ DE, educatur recta perpendicularis GFH. Præterea huic rectæ GFH, applicetur planum, & puncto dato A, vti antea præcepimus, in quo plano ducatur per 12. prop. lib. 1. recta AI perpendicularis ipſi rectæ GFH, ſublatoque plano iſto applicato concipiatur remanere recta AI. Vltimò per punctum I, ducatur per 31. propoſ. libr. 1. recta KI parallela ipſi DE rectæ. Dico rectam AI, eſſe perpendicularem ductam plano dato BC ſubiecto.

Demonſtratio. Recta DF per conſtructionem eſt perpendicularis duabus rectis FA, FH, ſe mutuò ſecãtibus in F, ergo per 4. propoſ. erit perpendicularis plano recipienti dictas FA, FH: ſed ſunt per conſtructionem parallelæ rectæ KI, DFE, ergo per prop. 8. recta KI erit perpendicularis eidem plano ſuſtentanti rectas FA, FH; ſed per coroll. noſtrum. 1. ad propoſ. 7. recta AI, eſt in eodem plano cum rectis FA, FH, ergo per def. 3. recta KI, erit ad angulos rectos ipſi rectæ AI. Cùm igitur recta AI, ſit oſtenſa perpendicularis duabus rectis KI, FH, exiſtentibus ſeu ductis in plano dato BC, erit per 4. prop. recta AI perpẽdicularis plano BC, quod erat probandum. Fecimus ergo imperatum. Notandum porrò eſt, quod ſi recta AI ad GH rectam perpendicularis cadat in punctum F; erit ipſa AF quæſita perpendicularis ad planum ſubiectum BC: quia tunc eſt perpendicularis duabus rectis DE, GFH; quare per 4. prop. erit perpendicularis plano ipſarum, dato BE.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Ex puncto in ſublimi ad ſubiectum planum non poſſunt plures vna linea recta perpendiculares demitti.*

Si enim demitterentur plures vnà, quæ ſint AI, AF, ad planum BC, ex puncto A in ſublimi: Ducta recta FI, quæ per coroll. noſtrum 2. ad propoſ. 7. recipietur in vno plano BC; erunt per 3. def. anguli AFI, AIF, ſinguli recti in triangulo FAI, contra prop. 17. libr. 1. quod abſurdum indicat poſitionem contradicentem huic corollario eſſe falſam, & ipſum corollarium verum. Fig. 234.

## PROPOSITIO XII.

### Dato plano, à puncto quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

Fig. 235. SVppoſitio, ex puncto C dato in plano AB, excitare oporteat rectam lineam CD perpendicularem ipſi plano AB dato.

Conſtructio. Ex puncto quouis puta F in ſublimi electo reſpectu plani AB, demittatur recta linea FE perpendicularis plano AB, per prop. præcedentem 11. & puncta E, C, in plano AB ſita, recta linea EC connectantur, quæ per corollar. 2. noſtrum ad prop. 7. recipietur in ipſo plano AB. Recta FE erit per 3. def. perpendicularis rectæ EC; & per 2. prop. duæ iſtæ rectæ exiſtent in aliquo plano vno puta GH, diuerſo ab AB, nam tota recta FE in ſublimi eſt reſpectu plani AB, excepto puncto E. Deinde in hoc plano GH, ducatur per prop. 31. libr. 1. recta CD parallela alteri rectæ EF. Dico rectam CD eſſe perpendicularem quæſitam ipſi plano AB, in puncto eius C dato.

Demonſtratio. Rectarum FE, CD, parallelarum, vna FE demonſtrata eſt perpendicularis plano AB, ergo per prop. 8. altera CD, erit eidem plano AB perpendicularis, quod erat probandum; fecimus igitur imperatum.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Ex duobus vel pluribus punctis in ſublimi datis ad eaſdem partes plani alicuius non poſſunt rectæ lineæ demitti perpendiculares plano illi ad idem punctum illius.*

Fig. 235. SI enim C punctum plani AB, duæ demitterentur perpendiculares rectæ CD, CI, ad planum AB, eſſent per defin. 3. ſingulæ perpendiculares rectæ CH ducendæ in plano ex eodem eius puncto C: vnde anguli HCI, HCD, eſſent recti ſinguli, & æquales per 12. axio. libr. 1. totum & pars, quod repugnat. 8. axio. libr. eiuſdem. igitur falſa erit poſitio vnde procedit contradicens huic corollar. quod ideo demonſtratum relinquetur.

## PROPOSITIO XIII.

### Dato plano, à puncto quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad eaſdem partes.

SVppoſitio. Conſulatur figura præcedentis propoſitionis. Ex puncto C dato in plano aliquo AB: Dico non poſſe duas rectas lineas excitari perpendiculares, veluti CD, CI, ad planum AB prædictum, ad eaſdem eius partes, puta ſuperiores, vel inferiores. Fig. 235.

Demonſtratio. Si enim duæ aut plures huiuſmodi rectæ lineæ excitari poſſent rectæ lineæ verſus eaſdem partes puta ſuperiores plani AB; quales ſunt rectæ CD, CI, & aliæ huiuſmodi perpendiculares ipſi plano AB: Conſiderari poſſent demiſſæ ex diuerſis punctis in ſublimi ad planum ſubiectum AB, perpendiculares ipſi, in eodem eius puncto C; contra demonſtrationem allatam in corollario noſtro præced. propoſitionis 12. hoc abſurdum manifeſtam reddit poſitionem contradicentem huic propoſitioni, quæ ideo demonſtrata remanebit.

## PROPOSITIO XIV.

### Ad quæ plana, eadem recta linea recta eſt, illa ſunt parallela.

SVppoſitio. Ad plana AB, CD, ſit eadem recta linea EF perpendicularis: Dico plana illa AB, CD, eſſe inter ſe parallela. Fig. 236.

Conſtructio. Si non ſint parallela data plana AB, CD, concurrent ex defin. 8. productaque vltra concurſum ſe mutuò ſecabunt in recta linea GH iuxta prop. 3. ex cuius aliquo puncto I, tranſmitti poterunt diuerſæ rectæ lineæ ad puncta E, F, diuerſa planorum datorum AB, CD, quæ triangulum IEF conſtituent.

Demonſtratio. Datur recta EF, perpendicularis ambobus planis AB, CD; ergo per defin. 3. erit perpendicularis duabus rectis IE, IF: ergo in triangulo IEF, erunt duo anguli E, F, recti, contra prop. 17. libr. 1. abſurdum hoc arguit falſitatis poſitionem inuectam contradicentem huic propoſitioni, quæ ideo probata relinquitur.

## PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò tangentes ad duas rectas lineas ſe mutuò tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano: parallela ſunt plana, quæ ducuntur per illas.

Fig.257. Suppoſitio. Duæ rectæ lineæ AB, AC, ſe mutuò tangentes, angulúmque conſtituentes, ſint parallelę duabus aliis rectis lineis DE, DF, in alio plano exiſtentibus diuerſo ab ſuſtentante alias duas prædictas, angulumque efficientibus; ſitque recta AB parallela rectæ DE, & alia AC alteri DF: Dico planum CA recipiens duas primas rectas AB, AC, eſſe parallelum plano EF ſuſtentanti alias duas rectas DE, DF.

Conſtructio. Per prop.11.ex puncto A in ſublimi reſpectu plani EF, demittatur recta linea AG perpendicularis plano EF, in puncto G; ex quo per 31.prop.lib.1.ducantur rectæ GI, GH, in plano EF, illa quidem parallela rectæ DF, hæc vero parallela rectæ DE: His duabus rectis GI, GH, perpendicularis erit recta AG per def.3.

Demonſtratio. Per conſtructionem, recta GI poſita eſt parallela rectæ DF, & data eſt recta AC parallela rectæ DF, ergo per 9.propoſ.rectæ AC, GI, erunt parallelæ; ergo quia oſtendimus rectam AG eſſe ad angulos rectos ipſi rectæ GI, erit etiam per 29.prop.lib.1. angulus rectus GAC. Similiter quia recta GH poſita eſt parallela rectæ DE, & data eſt recta AB parallela eidem rectæ DE, erunt per 9.prop.rectæ GH, AB, parallelæ; & quia probauimus angulum AGH eſſe rectum, rectus etiam erit angulus GAB per 29. propoſ. lib.1. Cùm igitur probauerimus rectam GA, eſſe ad angulos rectos tàm duabus rectis AB, AC, quàm aliis duabus rectis GI, GH, erit per 4.prop. ad angulos rectos planis CB, EF, ipſas recipientibus: vnde per propoſ. præced. 14. parallela erunt ipſa plana BC, EF, quæ ducuntur per datas rectas ſe mutuò tangentes AB, AC, DE, DF. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XVI.

Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur; communes illorum ſectiones erunt parallelæ.

Suppoſitio. Plana duo AB, CD, plano alio EF, GH ſecentur: Dico ſectiones communes EH, FG, eſſe rectas lineas parallelas. Fig.238.

Demonſtratio. Quod illæ ſectiones communes EH, FG, ſint rectæ lineæ, patet per 3. prop. Quod ſi non ſint parallelæ, conuenient in I aliquo puncto ipſæ rectæ EH, FG; ſed quia ex natura ſectionis communis, tota recta HEI, recipitur in plano AB, & alia recta GFI, in alio plano CD, ſi conueniant illæ rectæ in I, etiam plana AB, CD, conuenient in I; ideoque non erunt parallela: hæc conſecutio deſtruit datum & receptum, ergo poſitio contradicens huic propoſitioni falſa erit, & ipſa propoſitio vera.

### COROLLARIUM NOSTRUM

### I.

*Si fuerint duo plana parallela; recta linea quæ ad vnum eorum fuerit perpendicularis, ad reliquum quoque perpendicularis erit.*

Eadem plana AB, CD, ſecta in figura huius propoſitionis plano EG, duas ſectiones lineares rectas EH, FG, habent parallelas per iſtam propoſitionem: Ad punctum verò K rectæ EH exiſtentis in plano AB, ſit recta perpendicularis KL, ipſi plano AB, incidens in aliud planum CD in puncto L alterius rectæ FG receptæ in ipſo plano CD. Dico hanc rectam KL eſſe etiam perpendicularem ad planum CD. Fig.238.

Conſtructio. Planum MN applicatum rectæ KL ſecet iterum duo plana AB, CD data, & ſectiones ſint rectæ MK, LN, illa in plano AB, iſta in plano CD: ipſæ erunt parallelæ rectæ MK, LN, per iſtam propoſ.16.

Demonſtratio. Datur recta KL perpendicularis plano AB, ergo per def.3. erit ad angulos rectos ipſis EK, MK rectis. Et quia parallelæ ſunt rectæ EK, FL, erit recta KL ad angulos rectos ipſi rectæ FL per 29.prop. libr.1. Simili modo, quia parallelæ ſunt rectæ MK, LN, erit per cit.propoſit.29.libr.1. eadem KL ad rectos angulos ipſi LN. Cùm igitur recta KL ſit oſtenſa ad angulos rectos

duabus rectis FL,LN, erit per 4.propoſ.perpendicularis plano CD, ipſas recipienti. quod erat concludendum.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Plana parallela plano cuipiam, ſunt inter ſe parallela.*

SI enim recta linea concipiatur perpendicularis plano tertio ad quod reliqua dantur parallela, & intellectu producatur ad alia plana data parallela huic tertio plano, erit perpendicularis ad illa per præcedens coroll. noſtrum: Cùm ergo eadem hæc recta linea ſit perpendicularis ad iſta plana reliqua; ipſa erunt parallela per 14.propoſit. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Si fuerint duo plana parallela, & ab vno ex illis ad aliud deducta fuerint rectæ lineæ multæ perpendiculares, ipſæ omnes erunt æquales inter ſe, & parallelæ ad inuicem.*

NAm per coroll. noſtrum II. ad hanc propoſ. erunt perpendiculares etiam plano è quo deductæ ſunt: quare ſi duæ ſumantur, & earum extrema rectis lineis nectantur, ipſis etiam erunt perpendiculares per defin. 3. vnde per propoſ. 28. lib. 1. erunt parallelæ rectæ iſtæ duæ lineæ ductæ in planis parallelis, vna in vno, altera in altero; & per propoſ. 6. erunt etiam parallelæ aliæ duæ perpendiculares: vnde erit parallelogrammum planum ex his quatuor rectis, iuxta propoſ. 7. Quod ſi alias omnes rectas perpendiculares huiuſmodi deductas ab vno plano ad aliud è datis parallelis coniugentur rectis lineis cum vna ex prædictis perpendicularibus, ſemper eodem modo oſtendentur parallelæ eidem, ideoque parallelæ ad inuicem, ideoque parallelæ omnes inter ſe per propoſ. 9. & quia ſemper efficientur parallelogrammata ab eis perpendicularibus rectis, & aliis earum extrema nectentibus: ideo per propoſit. 34. libr. 1. dictæ perpendiculares erunt æquales vni tertiæ; ideoque per 1. ax. libr. 1. æquales inter ſe.

## PROPOSITIO XVII.

Si duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur: In eaſdem rationes ſecabuntur.

SVppoſitio. Duæ rectæ AB, CD, ſiue parallelæ, vel non parallelæ, in eodem plano exiſtentes, vel in diuerſis ſi in tranſuerſum ſint poſitæ non parallelæ; ſecentur planis EF, GH, IK, parallelis, prima quidem AB in punctis L, M, N, altera verò CD in punctis O, P, Q: Dico illas ſic ſecari proportionaliter, vt ſit LM ad MN, ſicut OP ad PQ. *Fig.239.*

Constructio. Ex puncto L ad punctum Q, extendatur recta LQ, quæ etiam ſecabitur in R ab intermedio plano GH. Tùm puncta O,L, in plano EF, nectantur recta linea OL: & alia duo puncta N, Q, plani IK, alia recta linea reuinciâtur: denique ex puncto R ad puncta M, & P, plani GH, tranſmittantur rectæ lineæ RM, RP. Reſultabunt triangula rectilinea LNQ, LOQ, quæ ſingula per 2. propoſit. in planis propriis erunt. Et quia plana parallela GH, IK, ſecantur plano LNQ trianguli, ſectiones lineares communes MR, NQ, erunt parallelæ, per prop. præced. 16. Simili ratione quia planum trianguli LOQ, ſecat parallela plana EF, GH, ſectiones communes erunt rectæ parallelæ LO, RP, per cit. propoſ. 16.

Demonſtratio. Quoniam in triangulo LNQ, recta MR parallela eſt lateri NQ, erit per 2. prop. libr. 6. vt LR ad RQ, ſic LM ad MN. Sic etiam quia recta RP parallela eſt lateri LO, trianguli LOQ, erit per cit. propoſ. libr. 6. vt LR ad RQ, ſic OP, ad PQ: ergo per 11. prop. lib. 5. erit vt LM ad MN, ſic OP ad PQ. & ſic de aliis. quod erat propoſitum & comprobandum.

## PROPOSITIO XVIII.

Si recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos: Et omnia, quæ per ipſam plana, eidem plano ad rectos angulos erunt.

SVppoſitio. Plano AB, recta CD ſit ad angulos rectos ſiue perpendicularis: & aliquod planum GH applicatũ huic rectæ CD, ita vt ſuſtẽtetur hæc recta CD in plano GH, ipſi applicato. Dico hoc planum GH eſſe rectum *Fig.240.*

Digitized by Google

ctum plano AB; & omnia alia plana ſic applicata ad hanc rectam CD, eſſe perpendicularia plano eidem AB.

Conſtructio. Cùm hoc planum GH, applicatum perpendiculariter inſiſtenti rectæ CD ſupra planum AB, inſiſtat plano AB, ſecabit ipſum ſi concipiatur productum, in recta linea IDH, iuxta 3.prop. Itaque per 31. propoſit.poterimus educere ex punctis rectæ IDH, parallelas rectas ipſi rectæ CD, exempli gratia,rectam EF,ex puncto E rectæ IDH exiſtentis in planis GH,& AB.

Demonſtratio. Rectæ FE, CD, ſunt parallelæ per conſtructionem, & ex datis recta CD eſt ad angulos rectos plano AB, ergo per 8.propoſ. altera FE, erit etiam plano AB ad angulos rectos; & ſic de omnibus aliis parallelis ipſi CD, eductis ex punctis aliis rectæ IEDH, oſtendemus ipſas eſſe perpendiculares plano AB. Porrò per prop.29. libr.1. anguli quos efficient iſtæ rectæ parallelæ cum recta IH, erunt recti, quæ recta IH eſt communis ſectio plani GH, & plani AB. Igitur cùm rectæ omnes vt CD, FE, perpendiculares ad communem ſectionem IH planorum GH, AB, ſint in vno plano GH ex dictis, & ad angulos rectos alteri AB plano; per 4.def. erit planum GH applicatum rectæ CD perpendiculari ad planum AB, perpendiculare plano AB. Et ſic de aliis planis applicatis ad eandem CD probabuntur eſſe perpendicularia plano AB. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I.

*Per rectam in plano ductam, erigere planum perpendiculare illi plano.*

Fig.240. PLano AB erigendum ſit planum perpendiculare, per rectam IH in ipſo plano AB ductam.

Conſtructio. Per propoſ.12.ex puncto aliquo E rectæ IH, excitetur recta EF ad angulos rectos plano AB;& applicetur GH planum huic rectæ EF perpendiculari: Dico hoc planum GH eſſe perpendiculare plano AB.

Demonſtratio. nam planum GH, per rectam EF perpendicularem plano AB, ductum eſt, ſeu applicatum ipſi; ergo per hanc prop.18.erit perpendiculare plano AB: Fecimus ergo imperatum.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I I.

*Plana perpendicularia plano tertio, efficientia ſectiones communes rectas lineas parallelas; ipſa ſunt parallela.*

PLano AB, ſint exempli gratia duo plana KL, GH, perpendicularia, & facientia ſectiones communes lineas rectas parallelas AL, IH, in plano AB, in quo ſi ducatur ad rectam AL perpendicularis NM ex puncto N alterius rectæ IH, per 12.prop.libr.1. erit etiam per 29.libr.eiuſdem ad angulos rectos eidem rectæ IH: quare per defin.4. cùm ſint plana KL, GH, perpendicularia plano AB, erit recta MN, ad angulos rectos ipſis planis KL,GH: ergo per propoſ.14.plana ipſa KL, GH,erunt parallela, ſicuti propoſitum fuit. Fig.240.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I I I.

*Parallelorum planorum ſi vnum fuerit perpendiculare alicui plano, alia erunt perpendicularia eidem plano.*

EXempli gratia, Parallelorum planorum KL,GH,alterum KL ſit perpendiculare plano AB: Dico quod aliud CH ſit eidem plano AB perpendiculare. Fig.240.

Demonſtratio. Imprimis per propoſ.16. ſectiones communes lineæ rectæ AL, IH,dictorum planorum cum plano AB, erunt parallelæ. Ergo ſi per propoſit. 12. libr. 1. ex puncto aliquo N, rectæ IH, ducatur recta NM ad angulos rectos ipſi rectæ AL, erit recta NM ad angulos rectos plano KL, & per corollarium noſtrum 1. propoſit. 16. eadem recta NM erit ad angulos rectos plano GH. Quia igitur planum AB ductum eſt per rectam MN perpendicularem plano GH, erit planum AB ad rectos angulos ipſi plano GH, per iſtam propoſit. 18. quare viceuerſa planum GH erit rectum plano AB: & ſic aliis planis pluribus parallelis. quod erat demonſtrandum.

PRO-

## PROPOSITIO XIX.

Si duo plana ſe mutuò ſecantia, plano cuidam ad rectos ſint angulos; communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit.

Fig. 241. SVppoſitio. Ad planum AB ſint perpendicularia plana EF,CD,ſe mutuò in recta linea GH ſecantia iuxta 3. propoſ. Dico hanc communem illorum ſectionem GH eſſe ad rectos angulos eidem plano AB.

Conſtructio. Vel recta GH, eſt ad angulos rectos rectis lineis LD,MF, communibus ſectionibus planorum CD,EF, cum plano AB ad quod recta dantur: vel neutri illarum. Vel vni ſolũ, puta LHD, & non alteri MHF. Si ſecundum, excitabimus in plano CD, rectam lineam HI ad angulos rectos ipſi rectæ LHD, per 11. prop. libr. 1. tùm etiam in plano EF, aliam rectam HK ad angulos rectos lineæ rectæ MHF. Si te[illegible]um, per cit. prop. 11. erigemus in plano EF rectam lineam HK ad angulos rectos ipſi rectæ MHF.

Demonſtratio primi membri diuiſionis. Quia recta GH, eſt angulos rectos duabus rectis lineis MHF,LHD, receptis in plano AB; ipſa GH per 4. propoſ. erit ad angulos rectos plano AB.

Demonſtratio ſecundi menbri. Quoniam in plano CD ad rectam LD ſectionem communem plani CD, recti ad planum AB, educta eſt HI perpendicularis, ipſa per 4. def. erit perpendicularis plano AB: Ita etiam quia in plano EF recto ad planum AB, poſita eſt recta HK perpendicularis rectæ MHF communi ſectioni ipſius plani EF cum plano AB, ipſa HK erit per cit. defin. 4. perpendicularis plano AB: ergo contra prop. 13. erunt ex eodem H puncto plani AB, eductæ ad eaſdem partes duæ rectæ lineæ ad angulos rectos ipſi plano AB. Hæc conſecutio abſurda indicat falſitatem poſitionis quod recta linea AG neutri rectarum MHF, LHD, ſit perpendicularis.

Demonſtratio tertij membri. Per conſtructionem, recta HK in plano EF ducta recto ad planum AB eſt ad angulos rectos rectæ MHF, ergo per def. 4. erit etiam eadem KH ad angulos rectos plano AB; Datur autem recta GH ad angulos rectos ipſi LHD rectæ communique ſectioni planorum AB, CD, planumque CD datur rectum ad planũ AB, ergo per def. 4. etiam recta GH erit ad angulos rectos plano AB: Igitur contra prop. 13. duæ rectæ HG,HK, ex eodem puncto H plani AB, & ad eaſdem partes, erunt ipſi plano AB ad angulos rectos: quod eſt abſurdum, ideoque poſitio vnde ſequitur falſa erit; videlicet rectam GH ſoli rectæ LHD, & non alteri MHF, perpendicularem eſſe. Relinquitur igitur primum membrum diuiſionis allatæ in conſtructione demonſtratum.

## PROPOSITIO XX.

Si ſolidus angulus, tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vt aſſumpti, tertio ſunt maiores.

SVppoſitio. Solidus angulus in A, iuxta definit. 11. contineatur ſub tribus angulis planis BAC,DAD,CAB: Dico duos ex his quoſlibet angulos, eſſe ſimul maiores reliquo. Fig. 242.

Conſtructio. Vel omnes iſti anguli plani erunt æquales: vel duo æquales, & tertius minor vtrouis: vel vnus ex illis tribus maximus eſt reſpectu aliorum duorum æqualium vel inæqualium inter ſe. In vltimo hoc caſu demonſtrandũ erit, etiã illos duos minores eſſe maiores maximo; hoc eſt angulo BAC maximo eſſe ſimul maiores duos BAD, CAD: In quo caſu in plano anguli BAC maximi, ad punctũ A, rectæ BA, fiat per 23. prop. li. 1. angulus rectilineus BAE æqualis angulo minori BAD; ductaque BEC quam ſecet in E recta AE, ſumatur per 3. propoſ. libr. 1. recta AD æqualis ipſi AE; ducanturque rectæ BD,CD: reſultabitque triangulum BDC.

Demonſtratio primi caſus. Cùm dentur anguli tres BAC,BAD,CAD, æquales inter ſe: clarum eſt duos ex illis quomodocumque ſumptos maiores eſſe ſimul reliquo tertio.

Demonſtratio ſecundi caſus: certum eſt duos æquales angulos è datis tribus eſſe maiores tertio minore dato vtrolibet ex aliis duobus: tùm etiam certum eſt minorem hunc adiunctum cuicumque ex aliis duobus æqualibus & maioribus illo diſiunctiuè, eſſe ſimul maiores tertio.

Demonſtratio primæ partis tertij caſus. manifeſtum eſt maximum & quemlibet ex aliis, eſſe ſimul maiores tertio.

Demonſtratio ſecundæ partis tertij caſus. Quia triangula BAE, BAD, habent latera BA, AE, reſpectiuè æqualia lateribus BA, AD, anguloſque in A æquales habent, baſes obtinebũt BE,BD, æquales per 4. prop. lib. 1.

ſed

ſed & per prop. 20. eiuſdem libri, duo latera BD, DC, ſunt maiora reliquo BC; ergo ſi de inæqualibus BD, DC, & BC, æqualia demantur BD, BE, relinquetur per 5. ax. lib. 1. recta DC maior quàm EC. Denique quia in triangulis EAC, DAC, duo latera EA, AC, ſunt æqualia reſpectiuè duobus lateribus DA, AC, & baſis DC maior eſt quàm baſis EC, erit angulus CAD maior angulo CAE per propoſ. 25. libr. 1. Igitur ſi angulis BAD, BAE æqualibus, inæquales anguli addantur CAD, CAE, fient per cit. axio. 5. libr. 1. duo anguli BAD, CAD, ſimul maiores toto angulo BAC, æquali duobus BAE, CAE. Atque ita abundè demonſtrata erit propoſitio.

## PROPOSITIO XXI.

### Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

Fig. 243. SVppoſitio. Datus ſit angulus ſolidus in A, quotcumque planis angulis pluribus quàm duobus contentis, videlicet quinque, BAC, CAD, DAE, EAF: Dico illos angulos efficientes ſolidum angulum A, eſſe minores quatuor rectis planis angulis. Et ſic de omnibus angulis planis conſtituentes ſolidum angulum, dico eos omnes eſſe minores quatuor planis angulis.

Conſtructio. Concipiatur ille angulus ſolidus alicuius pyramidis habentis planam baſim rectilineam tot laterum, quot ſunt anguli conſtituentes datum ſolidum angulum A, vt in exemplo allato quinquelateram.

Demonſtratio. Baſis rectilinea BCDEF, quinquelatera, angulos ſuos habet, æquales ſex rectis angulis planis, ex coroll. noſtro 6. vel 7. ad prop. 32. libr. 1. & rectangula quinque BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, angulos ſuos obtinebunt omnes decem rectis angulis planis, quandoquidem ſingula per cit. prop. 32. obtinent ſuos angulos tres rectilineos duobus rectis æquales. Sunt autem per propoſ. præcedentem 20. duo anguli CAB, FAB, ſimul maiores angulo FBC, qui tres anguli conſtituunt angulum ſolidum in B; igitur hoc modo in ſingulis angulis ſolidis baſeos, ſemper duo angulorum prædictorum erunt maiores angulo altero tertio baſeos, ergo ſimul ſumpti illi omnes anguli triangulorum prædictorum ad baſes illorum quæ ſunt latera baſeos planæ pyramidis, erunt maiores quàm anguli baſeos planæ. Applicando autem in exemplo allato, omnes anguli ad baſes quinque, quinque triangulorum prædictorum, ſimul ſumpti, erunt maiores quàm quinque anguli plani baſeos BCDEF quinquelateræ: ſed hi quinque anguli baſeos quinquelateræ ſunt oſtenſi æquales ſex rectis; igitur decem anguli triãgulorum quinque prædictorum ad baſes ſuas proprias, erunt maiores quàm ſex anguli recti. Quod ſi ex decem angulis planis omnium quinque triangulorum prædictorum, demantur plus quàm ſex anguli recti, relinquentur minus quàm quatuor anguli recti pro valore angulorũ planorum conſtituentium angulũ ſolidum A quod erat in hoc exẽplo declarandũ. Et ſic de omnibus aliis ſolidis angulis diſcurrendum erit proportione ſeruata, determinando ex prop. 32. libr. 1. & noſtris corollariis valorem omnium angulorum planorum, triangulorum reſultantium ex conſtitutione baſeos pyramidis deſinẽtis in angulum datum ſolidum, tùm ipſius baſeos planæ, demendo enim ex numero angulorum rectorum æquiualentium omnibus angulis triãgulorum illorum, numerum maiorem numero angulorum rectorum quibus anguli omnes baſis æquipollet iuxta prop. præced. 20. ſemper relinquetur numerus minor, angulorum rectorum, quàm quatuor recti, indicans valorem angulorum planorum conſtituentium ſolidum datum.

## PROPOSITIO XXII.

### Si fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores; cõprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales: fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus, triangulum cõſtituatur.

SVppoſitio. Sint tres anguli plani rectilinei, A, B, C, contenti ſub rectis lineis æqualibus AD, AE, BF, BG; CH, CI; ita tamen vt omnes inter ſe ſint æquales illæ rectæ lineæ, non ſolum illæ quæ vnum ex illis datis angulum comprehendunt: tùm etiam duo quilibet ex illis angulis ſint tertio maiores. Dico ex lineis rectis tribus DE, FG, HI, connectentibus latera prædicta æqualia, triangulum rectilineum poſſe conſtitui; ſeu ex tribus baſibus illis triangulorum reſultantium. Fig. 244.

Demonſtratio. Si tres anguli dati A, B, C, ſint æquales; certum eſt primo quoſlibet duos

ex

ex illis angulis ſimul ſumptos, eſſe reliquo maiores: & per propoſ.4. libr.1. baſes dictas DE,FG,HI, ſubtéſas illis angulis eſſe æquales, ideoque quaſlibet duas ex illis tribus, ſimul ſumptas eſſe reliqua maiores: quare per propoſ.22.libr.1.poſſe conſtitui trianguli ex illis tribus rectis ſeu baſibus. Quod ſi duo anguli ſint æquales inter ſe, & tertius minor vtrolibet; manifeſtum eſt etiam duos quoſlibet ex illis angulis eſſe reliquo maiores; tùm per prop.24.libr.1. baſim oppoſitam minori angulo eſſe minorem qualibet baſium æqualium per 4.prop.libr.1. oppoſitarum angulis illis æqualibus maioribus ſingulis dato minore: & ſic duas quaſlibet ex his baſibus ſeu rectis lineis maiores eſſe tertia, & ex illis poſſe triangulum rectilineum fieri iuxta prop. 22.libr.1. Quod ſi vnus angulorum, puta A ſit maximus, & reliqui B,C, æquales aut inæquales; certum eſt maximi quantitatem adiunctam quantitati cuiuſlibet B, C, efficere quantitatem maiorem reliquo tertio angulo; & per propoſ.24.libr.1. maximam baſium eſſe DE oppoſitam angulo maximo DAE, vnitatem cuilibet baſi reliquarũ FG, HI, efficere quantitatem maiorem reliqua; vnde per citat.prop.22.poterit ex illis tribus baſibus conſtitui triangulum rectilineum. Nunc ſupereſt demonſtrandum quod poſito maximo aliquo angulo, v.g.A, è datis tribus, exiſtentibus aliis duobus B & C, ſimul maioribus reliquo A maximo, baſes FG,HI, ſimul eſſe maiores reliqua DE oppoſita maximo angulo A, vt ex illis tribus baſibus poſſit triangulum effici iuxta propoſ. cit.22. libr.1. Per prop.23. libr.1. ex puncto A maximi anguli A, rectæ DA extremo, fiat angulus DAK æqualis angulo B; & per 3. prop. libr.1. ponatur AK æqualis rectæ AD; Imprimis hæc recta AK tranſiliet baſim DE ipſam ſecando in L; ſi enim terminaretur in L puncto baſeos DE, eſſent per 5.prop. libr.1. anguli ALE, AEL æquales, ob æqualia latera AE, AL; ſed & anguli AED, ADE ſunt æquales per eandem 5.prop. cit. igitur per 1. ax.libr.1. angulus ALE externus eſſet æqualis interno ADE & oppoſito, contra propoſ. 16. libr.1. quare recta AK, tranſiliet baſim DE, ipſam ſecabit in L: Ductis autem rectis DK, EK, reſultabit triangulum rectilineum DKE. Iam verò quia in triangulis DAK, FBG, duo anguli DAK, & B, comprehenſi ſunt ab æqualibus lateribus DA, AK, BF, BG, baſes eorum DK,FG, æquales erunt per 4.prop. libr.1. Et quia ex datis ſunt duo anguli B,C, ſimul maiores angulo DAE, & detraximus ab hoc maximo DAE, angulum DAK, angulo B æqualem, remanebit angulus KAE minor angulo C. Porrò quia triangulum KAE habet æqualia latera KA, AE, æqualia lateribus HC,IC, trianguli HCI, ſed angulum KAE obtinet minorem angulo C, baſes eius KE minor erit baſe HI per 24. prop. libr. 1. Sed per prop.20. libr. eiuſdem primi, duo latera DK,KE, ſeu FG, KE, ſunt maiora reliquo DE; multò magis duo latera FG,HI, erunt maiora reliquo DE. Quare ex tribus lateribus DE,FG,HI, poterit fieri triangulum iuxta prop. 22.libr.1. atque ita demonſtrata erit propoſitio in omni caſu.

## PROPOSITIO XXIII.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocumque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos, quatuor rectis minores eſſe.

SVppoſitio. Ex tribus angulis A, B, C, planis rectilineis, quorum duo quomodocumque ſumpti ſimul, ſint reliquo maiores, & tres ſimul ſumpti ſint minores quatuor rectis planis rectilineis, propter propoſitiones præcedentes 20.& 21. oporteat angulum ſolidum in D conſtituere. Fig.145.

Conſtructio. Per prop.3.libr.1. fiant rectæ AE, BF, BG, CG, CF, æquales ipſi AF; tunc per 1.axio.libr.1. erunt omnes æquales inter ſe, & rectæ lineæ æquales comprehẽdent datos angulos AB, C, tres; vnde per prop. præcedentem rectæ tres FE, EG, GF, ſubtenſæ illis angulis, triangula efficient, & ex illis poterit fieri triangulum planum rectilineum EGF. Si ergo mente accipiamus tria triangula illa prædicta FAE, FBG, GCF, & ſuper ponamus eorum baſes FE, EG, GF, ſupra rectas ipſis æquales FE, EG, GF, eiſdem characteribus terminatas, quæ triangulum EGF conſtituerunt; hoc eſt baſim FE, ſupra rectam EF; & baſim EG ſupra rectam EG, inclinando plana ipſorum triangulorum FAE, EBG, ad planum trianguli EGF, & ad inuicem, ita vt baſibus prædictis conſiſtentibus ſupra ſuas rectas proprias æquales in triangulo EGF, & immotis; tandem congruent duo latera EA, EB, æqualia facta, iuxta axioma 9. libr. 1. à nobis explicatum: & puncta A & B, concipiantur mutata in punctum D. In hac inclinatione duorum triangulorum FAE, EBG, conuerſis A & B in D; reſultabit triangulum GDF quod vocabimus vt ita loquar

loquar aëreum ex vna parte tertia ſupra triangulum EGF, inclinatum ad ipſum. hoc verò triangulum aëreum ſic vocatum GDF, oſtendemus eſſe æquale triangulo reliquo GCF; nam latera DG, DF, hoc eſt AF, BG, æqualia ſunt lateribus CG, CF; & baſis GF, eſt æqualis baſi GF; ergo per coroll. 8. prop. libr. 1. triangulum illud GDF, erit æquale triangulo GCF, & anguli in D & C, æquale, & reliqui etiam anguli, & latera ipſa, ſingula ſingulis; vnde etiam erunt ſimilia illa duo triangulà: quare per 9. axio. lib. 1. congruent ſuperimpoſita. Claudet igitur triangulum hoc GCF, angulum ſolidum in D; & tres dicti anguli A, B, C, ſolidum angulum conſtituent. Igitur ex tribus angulis planis, &c. conſtituimus angulum ſolidum, ſicuti fuit imperatum.

## PROPOSITIO XXIV.

Si ſolidum parallelepipedum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt, ſimilia, & æqualia.

Fig. 246. Svppoſitio. Solidum parallelepipedum ſit contentum ſex parallelis planis, ABDC, EFHG; & ACGE, BDHF; & ABFE, CDHG, iuxta definitionem 30. Dico plana aduerſa commemorata & reuincta particula &, eſſe parallelogramma æqualia & ſimilia.

Demonſtratio. Quia plana AD, EH, ſecantur plano CH, erunt per prop. 16. ſectiones eorum communes rectæ lineæ CD, GH, parallelæ: Et quia etiam plana AG, BH, plano CH ſecantur, erunt per citat. propoſ. 16. ſectiones eorum communes CG, DH, parallelæ rectæ lineæ. Quare cùm oſtenderimus planum CH contineri parallelis rectis lineis aduerſis CD, GH, & CG, DH; parallelogrammum erit planum CH: Eodem artificio demonſtrabuntur reliqua alia plana parallelepipedi dati eſſe parallelogrammata, quod erat primò oſtendendum. Cùm vero per propoſ. 34. libr. 1. in omnibus parallelogrammis aduerſa latera ſint æqualia, erunt latera BA, AE, æqualia lateribus DC, CG, reſpectiuè; cumque ſint parallela etiam reſpectiuè per 16. propoſ. cit. propter ſectiones communes planorum duorum AF, CH, parallelorum ab alio plano ſectorum parallelas, quæ in diuerſis planis exiſtunt, erunt anguli BAE, DCG, ab illis lateribus prædictis comprehenſi æquales, per propoſ. 10. cùmque etiam ſint anguli oppoſiti in parallelogrammo quolibet, æquales per cit. prop. libr. 1. 34. erunt in duobus aduerſis parallelogrammis AF, CH, latera proportionalia, hoc eſt AB ad AE, ſicut DC ad CG, hoc eſt æquales rectæ ad æquales rectas, iuxta coroll. noſtrum ad prop. 7. lib. 5. quare aduerſa plana parallelogramma erunt ſimilia iuxta def. 1. lib. 6. quod erat ſecundò propoſitum. Denique quia oſtendimus latera duo BA, AE, comprehendentia parallelogrammum AF, eſſe æqualia reſpectiuè duobus lateribus DC, CG, ſub quibus continetur oppoſitum parallelogrammum CH; & angulos æquales continent; erunt per lemma noſtrum 1. ad libr. 2. ipſa parallelogramma oppoſita AF, CH, æqualia. Et cùm eodem modo demonſtrentur alia aduerſa parallelogramma parallelepipedi eſſe ſimilia & æqualia inter ſe, manifeſta erit hæc propoſitio.

## PROPOSITIO XXV.

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

Svppoſitio. Solidum parallelepipedum ACH, plano IL ſecetur parallelo aduerſis planis AC, EG: Dico eſſe ſolidum EMK, ad ſolidum IDB, vt eſt baſis EM ad baſim ID: & contrà. Fig. 247.

Conſtructio. Concipiantur iuxta quamcumque multiplicationem ſumptæ multiplices baſeos EM, quæ ſint NO, & ſuper illas ſingulas ſolida æqualia & ſimilia ipſi ſolido EMK, quorum ſumma ſit PQ; erunt NO, PQ, æquemultiplicia primæ EM magnitudinis, & tertiæ EMK; ſunt enim tot numero ſolida æqualia ſolido illi, quot ſunt baſes æquales baſi EM, quia ſunt illa concepta conſtructa ſupra acceptas baſes prędictas. Pręterea iuxta quamcumque aliam multiplicationem, concipiatur RS multiplices baſeos ID, & ſuper eas alia ſolida ſimilia & æqualia ſolido IDB; quorum ſumma ſit TV; erunt vti modò explicauimus RS, TV, æquemultiplicia baſeos ID, & ſolidi IDB, ſecũdæ & quartæ magnitudinum. Iam verò ſi concipiantur NO, RS, multiplices baſium EM, ID, ſuperpoſitæ inuicem, certum eſt quod earum latitudines æquales ipſis EH, AD, æqualibus oſtenſis rectis congruent per 8. axio. lib. 1. ſed

 earum

earum lõgitudines vel inter ſe ęquales erunt, vel inæquales: Præterea ſi concipiatur altitudines multiplicium PQ, TV, quia æquales ſunt altitudinibus HG, DC æqualibus oſtenſis ſolidorum EMK, IDB, & ipſa hæc ſolida conſtituta ſupra baſes ſuas NO, RS, prędictas, ſe inuicem diuinitus penetrare, certum eſt quod ſi baſis ſolidi PQ, ſit æqualis baſi ſolidi TV, æqualia etiam eſſe ipſa ſolida PQ, TV: quod ſi baſis ſolidi PQ excedat baſim ſolidi TV, excedere etiam ſolidum PQ, ſolidum TV: ſi verò deficiat baſis illius ab baſi huius, etiam ſolidum PQ deficere ab ſolido TV. Ex quibus ſequitur euidens.

Demonſtratio. Si NO baſis totalis ſolidi PQ, eſt æqualis baſi RS, ſolidi TV, vel maior aut minor; erit etiam ſolidum PQ æquale vel maius aut minus ſolido TV: ſunt autem per conſtructionem NO, PQ æquemultiplicia primæ EM, & tertiæ EMK magnitudinum; & RS, TV, æquemultiplicia ſecundæ ID, & quartæ IDB magnitudinum: ergo per def. 6. libr. 5. erit vt baſis EM ad baſim ID, ſic ſolidum parallelepipedum EMK ad ſolidum parallelepipedum IDB, quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Si parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: ſectio reſultans ſuſtentata in plano ſecante, erit ſuperficies plana parallela cuilibet plano ex aduerſis parallelo plano ſecanti.*

Fig. 147. VT in exemplo, ſectio IL ſuſtentata in plano IL ſecante, erit parallela, cuilibet plano AC, EG, parallelo ipſi plano IL ſecanti. Nam planum IL ſecans, ponitur parallelum cuilibet plano AC, EG, ergo ſectio reſultans erit ſuperficies plana IL ſuſtentata ex naturâ ſua in plano ſecante IL, erit per 2. coroll. noſtrum ad prop. 16. parallela cuilibet è planis AC, EG, quod erat concludendum.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Si priſma plano ſecetur aduerſis planis eius parallelo: ſectio reſultans in plano ſecante ſuſtentata, erit cuilibet ex illis planis aduerſis parallela.*

DEclaratio huius corollarij eſt eadem quæ ſuperioris in ſectione parallelepipedi, plano aduerſis eius duobus planis parallelo.

## COROLLARIVM NOSTRVM. III.

*Si priſma plano ſecetur aduerſis planis parallelo: erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.*

DEmonſtratio allata in hac pręſenti propoſitione, applicanda eſt in huiuſmodi ſectione priſmatis: idem enim concludet quod oſtenſum eſt in ſectione huiuſmodi parallelepipedi.

## COROLLARIVM NOSTRVM IV.

*Si parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: reſultabit in plano ſecante figura plana ſimilis & æqualis, ipſis planis oppoſitis ſeu aduerſis.*

NAm per ſectionem illam reſultant duo parallelepipeda; quia oſtendimus in corollario primo ad hanc propoſ. figuram planam reſultantem ex ſectione data, eſſe parallelam cuilibet plano ex aduerſis; reliqua autem plana aduerſa remanent parallela quadrilatera; igitur reſultabunt ex def. 30. duo parallelepipeda: ſed per prop. 24. aduerſa huiuſmodi plana ſunt ſimilia & ęqualia; ergo figura plana, vtpotè IL in plano ſecante IL, parallela ipſi aduerſæ EG, vel AC, erit ſimilis & æqualis cuilibet aduerſorum planorum EG, AC, quod erat declarandum. Fig. 147.

## COROLLARIVM NOSTRVM V.

*Si priſma plano ſecetur aduerſis planis parallelo; reſultabit in plano ſecante figura ſimilis & æqualis oppoſitis planis illius priſmatis.*

SImiliter enim vt parallelepipedo, reſultabunt, duo priſmata per huiuſmodi ſectionem priſmatis, ergo per 13. defin. figura reſultans in plano ſecante cùm ſit parallela cuilibet oppoſitorum planorum aduerſorum, per corollarium noſtrum 2. erit ſimilis & æqualis cuilibet ex illis.

PRO-

## PROPOSITIO XXVI.

### Ad datam rectam lineam, eiuſque punctum, angulum ſolidum conſtituere, ſolido dato angulo æqualem.

Fig.248. SVppoſitio. Ad punctum A, rectæ datæ AB lineæ, ſit conſtituendus angulus ſolidus, ſolido angulo in C dato, æqualis.

Constructio. Rectæ lineæ omnes angulum C conſtituentes, quæ debent eſſe plures quàm duæ, ad ſe inuicem inclinatæ & non in directum iacentes, & non in eadem ſuperficie, iuxta def.11. ſint exempli gratia, tres DC, EC, FC, plano aliquo ſecentur IK; Quia ſingulæ duæ rectæ lineæ ex his, vtpote duæ DC, EC, angulum conſtituunt, DCE, ipſæ erunt in vno plano per 2.propoſ. ſimili modo rectæ aliæ duæ lineæ DC, FC, angulũ DCF conſtituentes, in vno erunt plano: tùm etiam aliæ duæ EC, FC, angulum ECF comprehendentes in vno erunt plano; & ſic de pluribus aliis rectis ſi adſint angulum ſolidum efficientibus: quæ omnes non poterunt exiſtere in eodem plano: Vnde fit vt diuerſi plani anguli rectilinei efficiant angulum ſolidum iuxta definitionem ſecundam anguli ſolidi allatam in defin.11.citata. Ex quibus etiam conſequitur vt planum ſecans IK, omnes prædictas lineas angulum C conficientes datum ſolidum, ſecet etiam plana angulorum conſtituentium eundem datum angulum ſolidum in C; quare in hoc plano IK ſecante, ſectiones communes illius & dictorum planorum diuerſorum, ſint rectæ lineæ per 3. prop. tot numero quot sũt plana angulorum planorum prædictorum: Et quia plana huiuſmodi planorum angulorum communes habet rectas duas lineas angulum C ſolidum partialiter efficientes, etiam in ſectione dicta communi rectæ lineæ quæ ſunt ſectiones communes prædictæ, angulos efficient planos, tot numero quot ſunt plana partialiter efficientia ſolidum datum angulum, propter tot lineas rectas quæ ſunt ſectiones communes tot planorum ſectorum ab plano ſecante, conſtituentes in plano ſecante planam figuram multilateram; quæ erit triangulum ſi tria plana ſint triangulorum efficientium ſolidum datum angulum, vel tres lineæ rectæ eundem ſolidum angulũ conſtituentes; quadrilateram verò ſi quatuor; quinquelateram ſi quinque, & ſic de aliis. Quare in caſu & exemplo noſtro, ſectio communis plani IK ſecantis & planorum conſtituentium angulum ſolidum C datum, erit triangulum DEF rectilineum. His poſitis, per coroll. noſtrum ad prop.22.lib.1.confici poterit triangulum BGH, æquilaterum & æquiangulum alteri triangulo DEF; tùm aliud triãgulum BAH, æquilaterum & æquiangulũ triangulo DCF: tùm aliud triangulum HAG, æquilaterum & æquiangulum triangulo FCE: tùm aliud triangulum GAB æquilaterum & æquiangulum triangulo ECD; & ſic de aliis ſi adeſſent, efficientibus partialiter angulũ datum C ſolidum. Denique applicando BAC trianguli latus BH, ſupra latus BH triãguli BGH; & trianguli GAB, latus, ſupra latus GB, trianguli BGH; & trianguli HAG latus, ſupra latus HG, trianguli BGH; & ſic de aliis ſi adeſſent; & inclinando pana horum triangulorum ad inuicem, vti fecimus in propoſitione 23. Dico quod conſtituunt in A puncto rectæ lineæ datæ BA, dato, angulum in A ſolidum, æqualem dato angulo C ſolido.

Demonſtratio. Cùm enim per cõſtructionem ſint rectæ BH, DF, æquales, ipſæ congruent per 8.ax. libr.1. Eodem modo congruent rectæ lineæ EF, GH, æquales: tùm ED, GB, æquales: tùm CD, AB, æquales: tùm CF, AH, æquales: tùm EC, GH, æquales: & ſic de aliis ſi adeſſent; in illa inclinatione triangulorum planorum ad inuicem: punctumque C, puncto A, congruit quandoquidem terminant in ſublimi prædictas rectas lineas congruentes: & clauditur ſpatium circa A ſolidum. Et quia tot numero ſunt anguli circa angulum A ſolidum, quot ſunt circa angulum C ſolidum, ſuntque æquales per conſtructionem; erit ex dictis in definitione 11. ſolidus angulus A æquais ſolido dato angulo C. Fecimus ergo imperatum.

## PROPOSITIO XXVII.

### In data recta linea, dato ſolido parallelepipedo, ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

SVppoſitio. In data recta linea AB, deſcribendum ſit ſolidum parallelepipedum ſimile ſimiliterque poſitum dato parallelepipedo CDG. Fig.249.

Conſtructio. Per prop. præced. 26. ad punctum B, rectæ datæ AB, fiat angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, parallelepipedi dati CDG,

CDG. Deinde per propoſ.12. libr.6. fiat vt FC ad CG, ita AB ad AI: tùm vt GC ad CE, ita IA, ad AH: eritque per prop.22. libr. 5. ex ęqualitate, vt FC ad CE, ita BA ad AH. Prætereà per lemm. noſtrum 1. ad lib.2. perficiantur parallelogrãmata BI, BH, HI, BK, IK, HK. Iam verò quia per prop.33. libr.1. ſunt parallelæ rectæ lineæ HA, LB; tùm rectæ IA, MB; erunt per prop.15. parallela parallelogramma HI, BK aduerſa: Eodemque artificio demonſtrabuntur parallela parallelogramma aduerſa IK, AL; tùm parallelogramma aduerſa HK, AM, parallela: quare per defin.30. erit parallelepipedum AMN, in data AB recta poſitum; quod aſſero eſſe ſimile ſimiliterq́; poſitũ, dato parallelepipedo CDG.

Demonſtratio. Per conſtructionem, Anguli BAH, FCE, ſunt æquales, & circa ipſos latera proportionalia, erũt per def.1. lib.6. parallelogrãma HB, FE, ſimilia ſimiliterque poſita, cùm ſint anguli prædicti ad eaſdem partes, & reliqui anguli, & reliqua latera dictorum parallelogrammorum ſe mutuò conſequentia, proportionalia circa æquales angulos ſe mutuò etiam conſequentes: Eodem artificio probabuntur parallelogramma HI, EG, tùm IB, GB, ſimilia ſimiliterq́; poſita. Quare tria plana BH, HI, IB, parallelepipedi facti, erunt ſimilia ſimiliterque poſita, tribus planis FE, EG, GF, parallelepipedi dati: & sũt per prop. 24. tria reliqua parallelepipedi ſacti æqualia oppoſitis tribus prędictis planis illius, & ſimilia; ſimiliter etiam in parallelepipedo dato. Igitur cùm ſint ſex plana parallelepipedi facti ſimilia ſimiliterque poſita, ſex parallelepipedi dati planis, erunt per defin.9. ſimilia ſimiliterque poſita facta in data AB. Atque ita fecerimus imperatum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Eodem artificio fiet priſma, & quodcumque aliud corpus planis terminatum, ad datam rectam lineam, ſimile ſimiliterq́; poſitum dato priſmati, vel ſolido dato planis terminato.*

## PROPOSITIO XXVIII.

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonales aduerſorum planorum: bifariàm ſecabitur ſolidum ipſum ab ipſo plano.

Fig.250. SVppoſitio. Parallelepipedum ACF, plano ſectum ſit actum per diagonales FD, GC, planorum aduerſorum EB, AH & incedentes per angulos æquales EFB, AGH, & eis propoſitos: Dico ſectum eſſe in duas partes æquales ſolidas.

Demonſtratio. Imprimis quia per def.30. ſunt ſex quadrilateræ figuræ planæ AF, CB; AH, EB; AD, GB; quarum duæ aduerſæ ſunt parallelæ; ipſæmet aduerſæ erunt per propoſ. 24. parallelogrãmæ ſimiles & æquales. Quare per prop.34. lib.1. rectæ lineæ EA, FG, erunt æquales & parallelæ, itēque rectæ EA, DC; vnde per 1. axio. libr.1. erunt rectæ CD, GF, æquales inter ſe, & per prop.9. parallelæ inter ſe; & per propoſ.7. rectæ FD, GC, exiſtent in eodem plano parallelarum oſtenſarum FG, DC: quare planum erit vnum GD ſecans datum parallelepipedum per diagonales FD, GC, aduerſorum planorum EB, AH, ſed & quia oſtenſæ ſunt rectæ FG, DC, parallelæ & æquales, & per prop.33. lib.1. ſunt æquales & parallelæ rectæ lineæ FD, GC, planum ipſum GD, erit parallelogrammum. Iam verò quia conſtat ex prop.24. cit. parallelogramma eſſe æqualia EB, AH, quæ per 34. libr.1. diuidunt biſariàm diagonales FD, GC, erunt triangula FED, FBD, GAC, GHC, æqualia inter ſe: & quia etiam per eandem 24. eadem parallelogramma EB, AH, ſunt etiam ſimilia, erit per def.1. libr.6, FB ad BD, ſicut GH ad HC; quare per propoſ.6. libr.6. erunt ſimilia triangula FBD, GHC: Et quia per 34. libr.1. latera FB, DE ſunt æqualia, tùm etiam æqualia latera BD, EF; erit per 7. prop. libr.5. coroll. noſtrum, FB ad BD, vt DE ad EF: ſimili modo erit GH ad HC, vt CA ad AG, circa angulos æquales per cit.34. libr.1. Sed & per cit. prop.24. quia ſimilia ſunt parallelogramma EB, AH, erit FB ad BD, ſicut GH ad HC: quare per 11. prop. libr.5. erit vt FB ad BD, ſic GB ad HC, & ſic DE ad EF, & ſic CA ad AG; vnde per 6. propoſit. libr.6. erunt ſimilia triangula FBD, FED, GHC, CAG, oſtenſa prius æqualia. Porrò conſtat per cit.24. eſſe æqualia & ſimilia plana CB, AF, tùm AD, GB eſſe ſimilia æqualia. Ergo ſolidum comprehensũ planis GD, CB, GB, parallelogrammis tribus, & duobus triangulis FBD, CAG; erit æquale ſolido comprehenſo planis GD, AF, AD, parallelogrammis, & duobus triangulis DEF, CAG, æqualibus & ſimilibus reſpectiuè oſtenſis, iuxta def.10. quare parallelepipedum plano ſectum per diametros aduerſorum planorum, bifariàm ſecabitur ab ipſo plano, in duo illa prædicta ſolida.

COROL-

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Omne parallelogrammum rectilineum eſt in eodem plano vno.*

HOc probatum eſt in parallelogrammo GD, & manifeſtum eſt ex definitione 35. libr. 1. exiſtente parallelogrammo vna è figuris planis.

COROLLARIVM NOSTRVM

II.

*Sectio parallelepipedi per planum prædictum, eſt ſectio in duo priſmata æqualia, & ſimilia.*

NAm quod æqualia ſint conſtat ex dictis; & quod priſmata ſint, patet ex dictis & defin. 13. tùm etiam quod ſimilia ſint oſtenſum eſt.

COROLLARIVM NOSTRVM

III.

*Si duo priſmata æqualia & ſimilia coniungantur, habentia triangularia plana oppoſita duo; ita vt ſint ſimul duo parallelogrammata illorum æqualia & ſimilia, & alia ſimilia parallelogrammata æqualia oppoſita, conficient parallelepipedum.*

HOc etiam manifeſtum ex dictis & def. 30. parallelepipedi.

## PROPOSITIO XXIX.

Solida parallelepipeda ſuper eandem baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in eiſdem collocantur lineis rectis: ſunt inter ſe æqualia.

Fig. 251. SVppoſitio. Super eandem baſim AB, conſtituta ſint parallelepipeda duo ABC, AGF, & in eadem altitudine, quorumque inſiſtentes rectæ lineæ ex quatuor angulis A, E, B, H, videlicet AI, AK; EL, EM; HC, HF; BD, BG; in eiſdem terminentur rectis lineis CD, IL, protractis: Dico illa parallelepipeda eſſe æqualia inter ſe.

Demonſtratio. Parallelepipedi ABC, plana AL, HD, aduerſa, cùm ſint parallela per defin. 30. & parallelepipedi AGF plana oppoſita AM, HG, ſint parallela: & plana AL, AM, ſint parallelogramma per prop. 24; tùm etiam plana HD, HG: & ex datis rectæ lineæ HC, HF, BD, BG in eiſdem terminentur rectis lineis HB, CG, parallelis, rectæ ipſæ lineæ HC, HF, BD, BG, in eodem exiſtent plano ipſarum parallelarum HB, CG, per 7. propoſ. quare plana parallelogramma HD, HG, in eodẽ exiſtent plano. Eodem artificio probabũtur rectæ aliæ lineæ AI, AK, EL, EM, terminatæ in eiſdẽ duabus rectis parallelis IM, AE, exiſtere in eodem plano parallelarum ipſarum IM, AE, & plana ipſa AL, AM in eodem ſuſtineri plano: vnde quia plana aduerſa parallelepipedi ſunt parallela ex natura ipſius per defin. 30. ipſa duo parallelepipeda ABC, AGF, continebuntur inter eadem duo plana aduerſa parallela. Iam verò cùm planum AF ſit parallelogrammum per prop. 24; tùm etiam planum HC ſit etiam parallelogrãmum, erunt rectæ CI, FK, parallelæ tertiæ rectæ HA, quare per 9. prop. erunt parallelæ inter ſe rectæ CI, FK: & quia rectæ HA, CI, ſunt æquales inter ſe, per prop. 34. libr. 1. tùm etiam rectæ HA, FK; erunt per 1. axio. libr. 1. rectæ CI, FK, æquales inter ſe: ſed & CF, IK, rectæ, quia partes ſunt parallelarum CD, IL, (nam per propoſ. 24, parallelogrammum eſt CL) erunt ipſæ rectæ CF, IK, parallelæ: vnde parallelograrhmum erit CK; & per prop. 34. libr. 1. æquales erunt rectæ CF, IK; tùm etiam HC, AI; tùm etiam HF, AK: quare triãgulorum HCF, AIK, latera omnia erunt reſpectiuè æqualia, & ipſa æquiangula per coroll. prop. 8. libr. 1. ideoque per propoſ. 4. libr. 6. latera obtinebunt circa æquales angulos proportionalia, ac propterea per defin. 1. libr. 6. erunt ſimilia ipſa triangula ACF, AIK. Simili modo probabimus duo triangula BDG, ELM, habere latera æqualia reſpectiuè, & eſſe æquiangula, & ſimilia. Cùm autem per prop. 35. libr. 1. parallelogrammata AL, AM, ſint æqualia, ſi dematur ab illis commune trapezium AKLE, relinquentur per 3. ax. libr. 1. triangula AIK, ELM, æqualia: Verùm per 34. libr. 1. rectæ IL, KM, ſunt æquales ipſi AE, ergo ab illis ſi dematur communis KL, relinquentur rectæ IK, LM, æquales: ſed & per propoſ. cit. 34. rectæ AI, EL, ſunt æquales; tùm etiam rectæ AK, EM: ergo cùm triangulorum AIK, ELM, æqualium oſtenſorum, latera omnia ſint reſpectiuè æqualia, erunt per coroll. prop. 8. lib. 1. æquiangula, & per 4. prop. libr. 6. obtinebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &

 per

per defin. 1. libr. eiuſdem ſimilia erunt: Sed cùm parallelogrammata IF, LG, ſint inter parallelas rectas CG, IM, & ſuper æquales baſes IK, LM, erunt per propoſ. 36. libr. 1. æqualia: Præterea cùm per 29. propoſ. libr. 1. anguli CIK, DLM, ſint æquales; tùm etiam anguli FKI, GML æquales; & iis æquales anguli oppoſiti in dictis parallelogrammatibus IF, LG, per 34. prop. libr. 1. tùm latera oppoſita æqualia, erunt proportionalia latera ipſorum circa angulos æquales, per coroll. noſtrum ad 7. prop. libr. 1. ergo per def. 1. lib. 6. erunt ſimilia ipſa parallelogrãmata IF, LG. Triangula igitur quatuor AIK, ELM, HCF, BDG, cùm ſint oſteſa ſimilia & æqualia; tùm etiam per 24. prop. plana AF, EG, ſint ſimilia & æqualia; tùm etiam plana AC, ED; erunt per definit. 10. priſmata duo AIKFCH, ELMGDB, æqualia & ſimilia: quibus ſi addatur ſolidum commune AHFKDBE, fient duo parallelepipeda ABC, AGF, ſuper eadem baſi AB conſtituta, & in eadem altitudine, & quorum inſiſtentes lineæ in eiſdem collocatæ ſunt rectis lineis, æqualia inter ſe per 2. ax. libr. 1. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I.

*Solida parallelepipeda ſuper eandem baſim poſita, quorum inſiſtentes lineæ in eiſdem collocata ſint rectis lineis; ſunt inter eadem duo plana parallela in quibus ſuſtentantur inſiſtentes eorum rectæ lineæ.*

HOc oſtenſum eſt initio demonſtrationis.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I I.

Fig. 251. *Eiſdem datis quæ in propoſitione, & conſtructione præcedenti facta: priſmata AIKFCH, ELMGDB, erunt æqualia & ſimilia. Sicuti demonſtratum eſt.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I I I.

*Parallelepipeda ſuper planam eandem baſi ſita, & in eadem altitudine ad eaſdemq; partes; ſunt inter duo eadem plana parallela oppoſita, quorum vnum eſt baſis communis.*

SI enim eſſent inter duo plana diuerſa parallela, vnum eſſet altius altero reſpectu baſeos communis, & ſic perpendiculares rectæ demiſſæ ab his ad baſim eſſent inæquales, ideoque diuerſa altitudo, contra datum. Præterea ſi non eſſent parallela illa duo plana, vnum conueniret cum baſi communi, & ſic contra def. 30. parallelepipedum haberet duas oppoſitas ſuperficies non parallelas. hæc abſurda indicant poſitiones aduerſantes huic corollario eſſe falſas, & ipſum verum.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I V.

*Parallelepipeda ſita intra eadem plana parallela oppoſitas baſes ſuas habentia in dictis planis parallelis, ſunt in eadem altitudine.*

NAm per coroll. noſtrum 3. ad prop. 16. rectæ omnes lineæ perpendiculares deductæ ab vno plano è datis parallelis ad aliud, ſunt æquales inter ſe; ergo per def. vltimam, erunt dicta parallelepipeda in eadem altitudine.

## PROPOSITIO XXX.

### Solida parallelepipeda ſuper eandem baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in eiſdem collocantur rectis lineis; inter ſe ſunt æqualia.

SVppoſitio. Supra baſim eandem AB ſita ſint parallelepipeda AIK, AML, in eadem altitudine, ideoque iuxta corollar. noſtrum 3. ad propoſ. præced. inter eadem duo plana oppoſita parallela IML, AB, quorum vnum eſt baſis data communis AB; & horum parallelepipedorum rectæ lineæ ex quatuor angulis A, K, B, H, baſeos AB, inſiſtentes, AC, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, non ſint terminatæ ſeu collocatæ in eiſdem rectis lineis; hoc eſt neque CI, GD, productæ tranſeant per puncta E, L, M, F; neque CG, ID, protractæ incedant per eadem puncta E, L, M, F, terminantia rectas AE, KL, HM, BF: Dico ipſa parallelepipeda AIK, AML, eſſe inter ſe æqualia. Fig. 251.

Conſtructio. Quandoquidem ex datis, plana IG; ML, exiſtunt in eodem plano IML oppoſito & parallelo baſi planæ AB communi; producendo rectas ID, CG, vltra D & G, illa ſecabit rectam FL in Q, & iſta eandem rectam

rectam FL in D: ſed & recta ME, ſecabit obuiam rectam ID, in puncto P, & rectam CG in puncto N, ſi recta ME producatur vltra E. Denique ducantur rectæ AN, KO, HP, BQ.

Demonſtratio. Quia parallelogrãmi HD, latus ID eſt parallelum lateri oppoſito HB; & parallelogrammi HF, latus MF eſt parallelum lateri HB, erunt parallelæ rectæ lineæ MF, PQ, per 9. prop. Sed & parallelogrammi EF, latera oppoſita ME, LF, ſunt parallela; igitur rectæ MP, FQ, partes illorum erunt parallelæ: vnde reſultabit parallelogrammum PF. Verùm per prop. 34. libr. 1. recta MF eſt æqualis ipſi HB, & PQ æqualis ipſi MF oſtenſa; ergo per 1. axio. libr. 1. ipſa PQ recta æqualis erit rectæ HB, ſed eadem PQ eſt oſtenſa parallela ipſi HB, cùm ſit pars rectæ IDQ; ergo rectæ PQ, HB, erunt inter ſe æquales & parallelæ probatæ: quare HP, BQ, ipſas reuincientes, erunt per propoſ. 33. libr. 1. æquales & parallelæ; vnde reſultabit parallelogrammum HPQB. Simili artificio, probabuntur parallelogrammata HPNA, ANOK, KOQB, AOQB; Igitur habebimus ſolidum contentum ſex planis quadrilateris parallelogrammis prædictis inter quæ eſt baſis AB: Et quia duæ rectæ lineæ HP, PN, ſunt parallelæ reſpectiuè duabus rectis lineis BQ, QO, erunt per prop. 15. plana AP, KQ, parallela aduerſa; & ſic oſtendentur reliqua alia plana aduerſa dicti ſolidi eſſe parallela: quare per defin. 30. ſolidum AOP, erit parallelepipedum. Et quia parallelepipedũ AIK, eſt ſupra eandem baſim AB, cum parallelepipedo AOP; & in eadem altitudine per corollarium noſtrum 4. ad prop. præced. eo quod plana oppoſita AB, OP, ſint parallela oſtenſa; & in eiſdem rectis lineis CO, IQ, ſint collocatæ rectæ inſiſtentes lineæ AC, AN, KG, KO, HI, HP, BD, BQ; erunt per præced. propoſit. 29. ipſa parallelepipeda AIK, AOP, æqualia: Ex eiſdem principiis probabuntur æqualia parallelepipeda AOP, AML; ergo per 1. axio. libr. 1. parallelepipeda AIK, AML, erunt inter ſe æqualia quod erat concludendum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Solida parallelepipeda æqualia ſupra eandem baſim, ſiue inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non; in eadem ſunt altitudine.*

SI enim vnum ſit altius altero, & ſecetur plano parallelo baſi iuxta altitudinem humilioris; quandoquidem abſciſſum eandem habet baſim cum humiliore ex datis, erit per propoſ. 25. abſciſſum & humilius vt baſis ad baſim, quare cùm baſes ſint æquales, erunt ſolida parallelepipeda humilius & abſciſſum æqualia: ſed datur altius æquale humiliori, & abſciſſum eſt æquale huic humiliori; ergo pars & totum hoc eſt abſciſſum & altius erunt æqualia. quod cùm abſurdum ſit, non erunt in diuerſis altitudinibus ſed in eadem altitudine data parallelepipeda.

## PROPOSITIO XXXI.

### Solida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine, æqualia ſunt inter ſe.

SVppoſitio. Super æquales baſes AB, CD, ſita ſint parallelepipeda eiuſdem atitudinis: Dico ila eſſe æqualia. *Fig. 253.*

Conſtructio. Productis lateribus CE, DE, vltra E, fiat per 23. prop. libr. 1. angulus FEG æqualis angulo L; & per prop. 3. lib. eiuſdem, fiat æqualis recta EF, rectæ LB, & recta EG æqualis rectæ LA; & per 1. lem. ad libr. 2. perficiatur parallelogrammum GF, quod erit æquale & ſimile parallelogrammo AB, quia ſunt æquiangula, & latera habent proportionalia circa angulos æquales: Perficiatur etiam parallelogrammum DF, & producto latere KF, vltra F, occurrat latus GH productum ſi opus ſit, rectis DE, KF; iſtis in I, huic in M: reſultabit aliud parallelogrammum IF, & aliud totale IK: & parallelogrammum GF æquale demonſtratum parallelogrammum AB dato æquali ipſi CD, erit per 1. axio. lib. 1. æquale parallelogrammo CD. Denique concipiantur ſuper parallelogrammata GF, IF, DF, conſtituta parallelepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis datis ſuper AB, & CD.

Demonſtratio. Parallelepipedum ſuper GF erit æquale parallelepipedo ſuper AB, per defin. 10. propter plana ſimilia & æqualia illorum relatiuè iuxta conſtructionem: ſed & ſunt parallelepipeda ſupra GF, IF, cùm habeant eandem baſim inſiſtentem plano IK, cuius baſeos vnum eſt recta EF, per prop. 29. vel 30. æqualia: igitur per 1. axio. libr. 1. parallelepipedum ſuper AB æquale erit parallelepipedo ſuper IF. Præterea quia per prop. 35. libr. 1. parallelogrammata GF, IF, ſunt æqualia, & GF æquale eſt oſtenſum ipſi CD; æqualia erunt per 1. ax. lib. 1. parallelogramma IF, CD: vnde iuxta 7. prop. lib. 5. erit IF ad EK, vt CD ad EK; eſt autẽ per 25. prop.

Digitized by Google

Digitized by Google

## PROPOSITIO XXXIII.

### Similia ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

Fig.155. SVppoſitio. Similia parallelepipeda data ſint ABC, EFG, quæ per defin.9. ſimiles habebunt baſes AB, EF, quarum per def. 1. libr.6. homologa erunt latera AI, EK: Dico iſta parallelepipeda habere inter ſe rationem triplicatam homologorum laterum AI, EK prædictorum, iuxta def.10. libr.5.

Conſtructio. Producto latere AI vltra I, capiatur per 3. propoſ.libr.1. recta IL æqualis rectæ EK vel GR, vel OF, æqualibus: tùm producto latere DI vltra I, ſumatur recta IM æqualis ipſi rectæ HK, vel GO, vel RF, æqualibus: tùm producto BI latere vltra I, ſecetur IN æqualis ipſi KF, vel GS, vel OE, æqualibus. Præterea completo parallelogrammo LM, per 1.lemm.ad libr.2. & parallelogrammo IT, concipiatur moueri parallelogrammum LM, ſupra parallelogrammum IT, ſeruando eundem inclinationis angulum quem habebat, quando peruenerit ad rectam NT, perfectum erit parallelepipedum TVI, ſimile & æquale ipſi parallelepipedo EFG, iuxta def.10.(quia per prop.15.lib.1. anguli AID, LIM, ſunt æquales, & angulus AID æqualis eſt angulo EKH, ob data ſimilia parallelepipeda, vnde per 1. axio. libr.1. anguli LIM, EHK, erunt æquales; ideoque parallelogrammum EH æquale erit parallelogrãmo ML, & ſimile: & ſic de reliquis aliis planis parallelepipedorum EFG, TVI, probabitur.) Concipiatur præterea planum QM fluere ſupra DX, ſeruando ſemper eundem inclinationis angulum quem cum illo efficit, quando peruenerit in recta ZX, efficiet parallelepipedum MXQ; & ſimul cum hoc motu planum QI efficiet parallelepipedum DLQ; & planum BM, efficiet parallelepipedum MXB.

Demonſtratio. Quia ſunt ſimilia parallelepipeda ABC, EFG, erit per defin.9. vt AI ad EK, hoc eſt ad IL, propter æquales factas EK, IL, iuxta 7.prop. libr.5. ita DI ad HK, hoc eſt ad IM; & BI ad FK, hoc eſt ad IN: ſed eſt vt AI IL, ita parallelogrammum AD ad parallelogrammum DL, per 1.prop.lib.6; & vt DI ad IM, ita parallelogrammum DL ad parallelogrammum LM; & vt BI ad IN, ita parallelogrãmum BL ad parallelogrammum LN: Igitur per propoſ.11. libr.5. erit vt AD ad DL, ita DL ad LM, & BL ad LN; ſed per propoſ. 32. eſt vt baſis AD ad baſim DL, ita parallelepipedum ABC ad parallelepipedum DLQ; & vt baſis DL ad baſim LM, ita parallelepipedum DLQ ad parallelepipedum MXB; & vt baſis BL ad baſim LN, ita parallelepipedum MXB ad parallelepipedum TVI: ideoque per prop.11.libr.5.erit vt parallelepipedum ABC ad parallelepipedum DLQ, ità parallelepipedum DLQ ad parallelepipedum MXQ, & parallelepipedũ MXQ ad parallelepipedum TVI; vnde quatuor illa parallelepipeda ſunt continuè proportionalia ABC, DLQ, MXQ, TVI; ideoque iuxta defin.10. libr. 5. primum ABC ad quartum TVI, hoc eſt ad EFG ſibi æquale iuxta propoſ.7.libr.5. habebit proportionem triplicatam, quam habet ad ſecundum DLQ. Sed per prop.32. eſt ABC parallelepipedum ad DLQ parallelepipedum, vt baſis AD ad baſim DL; & per 1.propoſ.libr.6. eſt baſis AD ad baſim DL, vt recta AI ad rectam IL vel EK ſibi æqualem: ergo per propoſ.11.libr.5.erit parallelepipedum ABC ad parallelepipedum DLQ, in proportione triplicata proportionis laterum humologorum, AI videlicet ad EK, quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM.

*Si fuerint quatuor rectæ lineæ continuè proportionales; vt eſt prima ad quartam, ita erit parallelepipedum ſuper primam deſcriptum, ad parallelepipedum ſimile ſimiliterq́; poſitum eſſe ſecundam.*

NAm demonſtrauimus parallelepipedum ad parallelepipedum habere rationem triplicatam laterum homologorum; & conſtat ex def.10.libr.5. primam quatuor rectarum continuè proportionalium, habere ad quartam proportionem triplicatam quam habet ad ſecundam, videlicet laterum homologorum.

## PROPOSITIO XXXIV.

### Æqualium ſolidorum parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocantur.

### Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocãtur, illa ſunt æqualia.

SVppoſitio. Sint æqualia parallelepipeda ABC, EFG: Dico baſes eorum AD, EH, reciprocari Fig.156. & 157.

reciprocari cum altitudinibus illorum. Quod ſi dictæ illorum baſes reciprocentur: aſſero illa eſſe æqualia.

Multos caſus continebit hæc propoſitio. Aut enim rectæ lineæ inſiſtentes AI, EK, perpendiculares erunt ad baſes proprias AD, EH, prædictas, æqualeſque erunt prædictæ lineæ perpendiculares, vel inæquales. Aut enim prædictæ lineæ inſiſtentes minimè erunt perpendiculares prædictis baſibus, ſimulque æquales, vel inæquales.

Fig. 256. Conſtructio, quando rectæ lineæ AI, EK, inſiſtentes perpendiculares ſunt baſibus propriis ſimulque inæquales; nam quando ſunt æquales, nulla opus eſt conſtructione. Sint igitur inſiſtentes lineæ perpendiculares KE, FQ, & reliquæ baſi EH maiores aliis IA, BO, & reliquis perpendicularibus baſi AD. Detrahatur ex EK maiore, recta EL æqualis ipſi AI minori, per 3. propoſ. libr. 1. & concipiatur ſectum parallelepipedum EFG, plano LM tranſeunte per L, parallelo baſi EH, reſultabit parallelepipedum ENP.

Demõſtratio huius caſus, & primo, quando prædictæ lineæ inſiſtentes baſibus AD, EH ſunt æquales, vt in primis duabus figuris: tunc enim altitudines datorum parallelepipedum erunt æquales inter ſe, ex dictis in def. 4. libr. 6. Iam verò quia dantur parallelepipeda ABC, EFG, æqualia, & eiuſdem ſunt altitudinis, baſes AD, EH, obtinebunt æquales, per corollar. noſtrum ad propoſ. 31. Igitur erit vt baſis AD ad baſim EH, ita altitudo KE ad altitudinem IA, in proportione æqualitatis: ergo per def. 2. libr. 6. baſes & altitudines datorum parallelepipedorum æqualium, reciprocabuntur. Age verò demonſtremus idem in conſtructione facta. Quia dantur ſolida ABC, EFG, parallelepipeda æqualia, obtinebunt ad idem parallelepipedum ENP, eandem rationem, per prop. 7. lib. 5. ſed per prop. 32. vt ſolidum ABC, ad ſolidum ENP, ita eſt baſis AD ad baſim EH, quandoquidẽ habent æquales altitudines IA, LE: & ſi conſiderẽtur parallelepipeda ENG, ENP, ſupra baſes KN, LN, in eadẽ altitudine, quia ſunt inter plana parallela KN, GH, parallelepipedi totalis EFG, per corollar. noſtrum 4. ad prop. 29. erit etiã per cit. prop. 32. vt ſolidum EFG vel ENG, ad ſolidũ ENP, ita baſis KN ad baſim LN: ergo per prop. 11. libr. 5. erit vt baſis AD ad baſim EH, ita baſis KN ad baſim LN: Verùm per 1. propoſ. libr. 6. eſt baſis KN ad baſim LN, vt altitudo KE ad altitudinem LE vel IA æquales rectas: hoc eſt baſes datorum parallelepipedorum æqualium erunt reciprocæ cum eorum altitudinibus. Ad hæc oſtendamus in hoc caſu ſecundam partem propoſitionis. Sintque baſes & altitudines prædictæ reciprocæ, & in particulari altitudines æquales: Imprimis erit altitudo AI ad altitudinem IK, vt baſis EH ad baſim AD, ex datis; altitudines autem ſunt æquales, ergo etiam baſes erunt æquales, quia dantur reciprocæ altitudines & baſes: igitur per prop. 31. parallelepipeda data ABC, EFG, æqualia erunt. Sint autem altitudines inæquales, & ponatur conſtructio allata; quia eſt ex datis, vt baſis AD ad baſim EH, ita altitudo EK ad altitudinem AI, ſeu EL ipſi æqualem factam; & per 32. propoſ. eſt vt baſis AD ad baſim EH, ita ſolidum ABC ad ſolidũ ENP, propter æquales altitudines AI, EL; & per prop. 1. libr. 6. eſt vt EK ad EL, ita KN ad LN; & per cit. propoſ. 32. eſt vt baſis KN ad baſim LN, ita ſolidum EFG vel ENG, ad ſolidum ENP, (quandoquidem poſitis baſibus KN, LN, eandem habent altitudinem exiſtentem inter duo plana parallela KN, GH, parallelepipedi EFG) ergo per prop. 11. libr. 5. erit vt ſolidum ABC ad ſolidũ ENP, ita ſolidum EFG vel ENG ad ſolidũ ENP: quare per prop. 9. libr. 5. æqualia erunt ſolida parallelepipeda ABC, EFG.

Conſtructio, quando rectæ lineæ inſiſtentes AI, EK, non ſunt perpendiculares baſibus AD, EH. Ex eiſdem punctis quatuor baſium AD, EH, educantur perpendiculares ad rectas IB, CM, terminantes ex vna parte plana ipſa parallela baſibus datis, per prop. 12. libr. 1. erunt duo parallelepipeda ABC, ADN ſupra eandem baſim AD, in eadem altitudine AL, quorumque inſiſtentes lineæ AI, AL, & ſic de reliquis, in eiſdem collocatæ ſunt lineis rectis IB, CM; quare per 29. erunt iſta duo parallelepipeda æqualia ABC, ADN: Simili modo probabuntur alia duo parallelepipeda EFG, EHN, æqualia: Dantur autẽ æqualia parallelepipeda ABC, EFG, ergo per 1. axio. libr. 1. erunt æqualia parallelepipeda ADN, EHN: ſed quia per primum caſum demonſtratum reciprocantur baſes AD, EH, & altitudines AL, EL, parallelepipedorum datorum æqualium ADN, EHN; & eorundem parallelepipedorum quia baſes & altitudines reciprocantur ex datis, ipſa ſunt æqualia; & quia aliorum parallelepipedorum ABC, EFG, eædem ſunt altitudines AL, EL, quæ dictorum duorum ADN, EHN, per noſtrum coroll. 4. ad propoſ. 31. vel per corollarium noſtrum ad propoſ. 32. tùm baſes eædem AD, EH, per conſtructionem: manifeſtum eſt etiam in æqualibus parallelepipedis ABC, EFG, reciprocari baſes cum altitudinibus; & data iſta reciprocatione Fig. 257.

tione baſium & altitudinum, ipſa eſſe parallelepipeda ABC, EFG, æqualia. omnia erant demonſtranda.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Propoſitiones 29. 30. 31. 32. 33. 34. & corollaria illarum applicari poſſunt priſmatibus, aſſumendo baſes eorum parallelas oppoſitas; ſicuti fecimus in corollario noſtro ſecundo ad propoſit. 29. eadem enim omnes demonſtrationes inſeruient.*

## PROPOSITIO XXXV.

Si fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineãt æquales, vtrumque vtrique; In ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primùm poſiti ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primùm poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendunt.

Fig. 258. SVppoſitio. Duo anguli BAC, EDF, ſint æquales; quorum verticibus A, D, inſiſtant extra plana ipſorum rectæ lineæ AG, HD, ſublimes, ita tamen vt angulus CAG æqualis ſit angulo FDH: ſumptaque ſint puncta G, H, in recta illis ſublimibus AG, DH, ex quibus demiſſæ ſint rectæ lineæ GI, HK, perpendiculares ad plana angulorum datorum BAC, EDF, per prop. 11. libr. huius, incidentes in puncta I, & K dictorum planorum; tùm adiunctæ ſint rectæ lineæ IA, KD, vincientes puncta prædicta I, K, cum angulorum datorum punctis A, D: Dico has rectas IA, KD, efficere cum ſublimibus rectis AG, DH, angulos æquales IAG, KDH.

Conſtructio. Si duæ rectæ ſublimes AG, DH, ſint inæquales, De maiore, puta AG, detrahatur per 3. prop. libr. 1. recta AL æquali minori DH; & ex puncto L ducatur per prop. 31. lib. 1. recta linea LM, parallela rectæ GI, in plano trianguli GAI, quod conſtat per 2. prop. in vno exiſtere plano. Iam verò quoniam rectæ LM, GI, parallelæ ſunt, & GI ex datis eſt perpendicularis plano anguli BAC. Prætereà ducantur ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares rectæ lineæ MB, MC, KE, KF, per prop. 12. libr. 1. vel per 11. libr. huius; & tranſmittantur rectæ BC, BL, LC, EF, EH, HF.

Demonſtratio. Ex oſtenſis, recta LM perpendicularis eſt ad planum anguli BAC, ergo per def. 3. efficiet angulum LMA rectum; vnde per prop. 47. libr. 1. quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum LM, AM; ſed per eandem 47. prop. quadratum rectæ AM, æquale eſt quadratis rectarum CA, MC, ergo quadratum rectæ AL æquale erit quadratis rectarum CA, CM, ML; ſed etiam per citat. 47. propoſ. quadratum rctæ CL æquale eſt quadratis rectarum CM, ML, eo quod per 3. defin. recta LM ſit perpendicularis ad rectam MC, ergo quadratum rectæ AL æquale erit quadratis rectarum AC, CL, quare per prop. 48. libr. 1. angulus ACL rectus erit. Inſuper quia quadratum rectæ AL æquiualet quadratis rectarum AM, ML, per 47. prop. libr. 1. & quadratum rectæ AM eſt æquale quadratis rectarum AB, BM, ergo quadratum rectæ AL æquiualebit quadratis rectarũ AB, BM, ML; ſed rectarum BM, ML, quadratis æquale eſt quadratum rectæ BL, ergo quadratum rectæ LA, æquiualebit quadratis rectarum AB, BL; ideoque per 48. prop. libr. 1. angulus ABL rectus erit. Simili modo, per eaſdem citatas propoſitiones 47. & 48. libr. 1. oſtendemus rectos eſſe angulos DFH, DEH. Quia ergo anguli ABL, LAB, trianguli ABL, ſunt æquales angulis DEH, HDE, triãguli DEH, vterque vtrique, ſuntque latera AL, DH, æqualia; erunt per 26. prop. lib. 1. reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, HE, æqualia reſpectiuè: Ex eiſdem principiis probabuntur AC, CL, æquales rectis DF, FH, reſpectiuè. Vnde cùm AB, AC, triãguli BAC, ſint æqualia reſpectiuè lateribus DE, DF, reſpectiuè in triãgulo DEF, & anguli BAC, EDF, ab illis contenti lateribus, ſint æquales, erunt per 4. propoſ. lib. 1. baſes BC, EF, æquales, & anguli ABC, ACB, equales reſpectiuè angulis DEF, DFE; Sunt autẽ anguli ABM, ACM, recti, æquales angulis rectis DEK, DFK: ergo per ax. 3. li. 1. illi detracti æquales ab iſtis totalibus rectis, relinquuntur anguli MBC, MCB, æquales reſpectiuè angulis KEF, KFE: & cũ latera BC, EF, ſint æqualia, erunt per prop. 26. libr. 1. latera reliqua BM, CM, æqualia

reſpectiuè

reſpectiuè reliquis lateribus EK, FK. Quoniã ergo latera AC, CM, in triangulo ACM, ſunt ęqualia lateribus DF, FK, reſpectiuè in triangulo DFK, & anguli ACM, DFK, contenti ab prædictis lateribus ſunt æquales quia recti, erunt per 4. propoſ. libr. 1. baſes AM, DK, æquales inter ſe. Quia verò demonſtrauimus rectas BL, EH, æquales eſſe, quadrata illarum erunt etiam æqualia inter ſe, per corollar. noſtrum 3. ad propoſ. 46. libr. 1. & quia per 47. prop. libr. eiuſdem quadratum rectæ BL æquiualet quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, æquiualet quadratis rectarum EK, KH; erunt quadrata rectarum MB, ML, æqualia quadratis reſpectiuè rectarum EK, KH, per 1. axio. libr. 1. ſi igitur tollamus quadrata rectarũ æqualium BM, EK, relinquentur per 3. ax. lib. 1. æqualia quadrata rectarũ LM, HK; ideoque rectæ LM, HK, erunt æquales per coroll. noſtrum 4. ad prop. 46. libr. 1. Denique quia in triangulo LAM, duo latera AL, AM, ſunt æqualia reſpectiuè duobus lateribus DH, DK, in triangulo HDK; & baſes illorum LM, HK, ſũt æquales, anguli LAM, ſeu GAI, & HDK, erunt æquales. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

*Si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos æquales contineant, vtrumq; vtriq; erunt à punctis extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primò poſitorum demiſſæ perpẽdiculares inter ſe æquales.*

Fig. 258. SVppoſitio eſt eadem quæ propoſitionis huius 35. niſi quod ponantur ſublimes rectæ lineæ LM, HK, æquales inter ſe. Nunc verò cõcludere oportet rectas LM, HK, perpendiculares ad plana angulorum BAC, EDF datorum primo loco, eſſe æquales inter ſe. Sed iam hoc oſtendimus in demonſtratione allata. quare rectè deducitur hoc corollariũ ex hac propoſitione demonſtrata.

## PROPOSITIO XXXVI.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulo verò prædicto.

SVppoſitio. Tres rectæ lineæ A, B, C, ſint continuè proportionales: Dico parallelepipedum EDH ex tribus illis rectis conſtructum, hoc eſt habens longitudinem DE æqualem ipſi A, & latitudinem E æqualem ipſi C, & altitudinem EG æqualem ipſi B, eſſe æquale parallelepipedo KIN conſtructo ex media recta B, hoc eſt habente longitudinem IK, latitudinemque KL, & altitudinem MK, æquales ipſi B mediæ rectæ. Fig. 259.

Demonſtratio. Nam per prop. 17. libr. 6. parallelogrammum DF, ſub DE, EF, hoc eſt ſub extremis A & C rectis datis, æquale eſt parallelogrammo IL ſub media B recta, æquiangulo alteri DF parallelogrammo, iuxta ea quæ diximus in coroll. noſtro ad cit. prop. 17. libr. 6. duo autem parallelepipeda EDH, KIN, eandem obtinent altitudinem, ſiue rectæ GE, MK, æquales ſingulæ ipſi B mediæ ſint perpendiculares baſibus DF, IL, ſiue non, modò æquales ſint aliæ altitudines ipſorum, quandoquidem ponuntur æquiangula ipſa parallelepipeda; ( Cùm enim anguli DEF, IKL, ſint æquales, æqualeſque ſublimes rectæ EG, KM, efficientes angulos DEG, IKM æquales, tùm FEG, LKM æquales erunt per corollar. prop. præcedentis rectæ lineæ GO, MP, perpendiculares parallelogrammis DF, IL, æquales, hoc eſt altitudines ipſorum parallelepipedorum: ) ergo per prop. 32. inter ſe erunt vt baſes eorum DF, IL; quæ cum oſtenſæ æquales, ipſa erunt æqualia. quod erat concludendum.

COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Duo parallelepipeda æquiangula, habentia baſes æquales; ſunt in eadem altitudine; quorum vnum ſit ſub tribus rectis lineis proportionalibus, baſiſq; eius ſub extremis; aliud verò ſub media recta.*

COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Si parallelepipedum ex tribus rectis lineis deſcriptum, æquale fuerit parallelepipedo ſibi æquiangulo à media linea deſcripto; erunt tres rectæ lineæ continuè proportionales.*

NAm poſitis angulis DEF, IKL planis æqualibus, ex quibus æquales rectæ lineæ EG, KM, æqualeſque ſingulæ ipſi mediæ, ab G & M, decident rectæ lineæ æquales perpendiculares planis ſeu parallelogrammis DF, IL; vnde habebunt ipſa parallelepipeda æquales Fig. 259.

æquales altitudines. Dantur autem æqualia ipſa, igitur per corollar. noſtrum ad prop. 31. æquales habebunt baſes DF, IL: ergo cum æquales habeant DEF, IKL, erunt per prop. 14. lib. 6. latera circa illos reciproca, hoc eſt erit DE ad IK, vt KM ſeu IK ad EG; hoc eſt A ad B, vt B ad C.

## PROPOSITIO XXXVII.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ſolida parallelepipeda quæ ab ipſis, & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt.

Et ſi ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia; & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Fig. 160. SVppoſitio. Sit A recta ad B rectam, vt C recta ad D rectam: Dico ita eſſe parallelepipedum A ad B parallelepipedum, vt C parallelepipedum ad D parallelepipedum; ſi ſint ſimilia ſimiliterque deſcripta. Quod ſi iſta parallelepipeda, A,B,C,D, ſimilia ſimiliterque deſcripta, ſint proportionalia: Dico rectas A,B,C,D, eſſe proportionales, hoc eſt eſſe A ad B, vt C ad D.

Demonſtratio. Per propoſ. 33. Parallelepipedum A ad parallelepipedum B, habet proportionem triplicatam proportionis A rectæ ad B rectam; tùm etiam Parallelepipedum C, ad parallelepipedum D, habet proportionem triplicatam proportionis C rectæ ad rectam D: quare proportio eadem erit parallelepipedi A ad parallelepipedum B, quæ parallelepipedi C ad parallepipedum D, videlicet triplicata, quod erat primo propoſitum. Prætereà cùm per cit. propoſ. 33. proportio parallelepipedi A ad parallelepipedum B ſit triplicata proportionis rectæ A ad rectam B; & proportio parallelepipedi C ad parallelepipedum D ſit triplicata proportionis rectæ C ad rectam D; erunt proportio eadem rectæ A ad rectam B, quæ C rectæ ad rectam D, videlicet triplicata ſolidi A ad ſolidum B, quæ eadem eſt ſolidi C ad ſolidum D: quare erit A ad B vt C ad D. quod erat ſecundò propoſitum.

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Si fuerint tres lineæ proportionales; erunt & parallelepipeda ſimilia ſimiliterq; deſcripta ex eis, proportionalia.*

*Et ſi ſolida parallelepipeda ſimilia ſimiliterq; deſcripta fuerint proportionalia; & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.*

ASſumpta enim bis media recta linea, tunc quatuor erunt rectæ lineæ proportionales, & ſic idem demonſtrabitur quod de quatuor fecimus, &c.

### COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Tota hæc propoſitio, & corollarium præcedens applicari poteſt priſmatibus, quorum duo plana aduerſa æqualia ſunt triangula.*

NAm additis aliis priſmatibus æqualibus & ſimilibus, vti præcepimus in corollario noſtro 3. ad propoſ. 28. reſultabunt parallelepipeda huius propoſitionis: ergo per propoſ. 15. libr. 5. priſmata iſta quia ſunt dimidia horum parallelepipedorum iuxta corollar. 2. ad cit. propoſ. 28. eandem habebunt rationem cum ipſis parallelepipedis, hoc eſt erunt proportionalia, &c.

## PROPOSITIO XXXVIII.

Si planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

SVppoſitio. Plano AD, inſiſtat ad angulos rectos planum CB; ſitque recta AB, communis ſectio ipſorum iuxta propoſ. 3. tùm ex puncto E plani CB ducta ſit recta linea EF perpendicularis ad planum AD: Dico quod hæc recta EF ſit perpendicularis ad rectam AB ſectionem cõmunem datorũ planorum. Fig. 161.

Demonſtratio. Si recta EF non cadat ad

 angulos

angulos rectos ſupra AB, communem ſectionem datorum planorum, ſed in puncto G plani AD, extra ſectionem communem: demittemus per prop.12.lib.1. rectam EF perpendicularem ipſi rectæ AB in plano CB: verũ per def.4.hæc recta EF erit perpendicularis plano AD; ergo contra coroll. noſtrum ad prop.11.duæ rectæ lineæ EF, EG, ex puncto E in ſublimi demittentur perpendiculares ad idem planum AD. hoc abſurdum manifeſtam facit poſitionem contradicentem huic propoſitioni quæ ideo vera erit.

## PROPOSITIO XXXIX.

Si ſolidi parallelepipedi eorũ quæ ex aduerſo planorum latera bifariàm ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: communis ſectio planorum, & ſolidi parallelepipedi diagonalis, bifariàm ſe mutuò ſecabũt.

Fig.262. SVppoſitio. Solidi parallelepipedi HAB, duo plana BD, AC, aduerſa ſumantur, eorumque latera bifariàm ſecentur in I, K, L, M, P, Q, N, O, per quas ſectiones extenſa ſint plana duo IN, KO, ſe mutuò ſecantia in recta linea RS: Dico quod hæc mutua ſectio RS, & diagonalis BA parallelepipedi dati, ſe mutuò ſecabunt bifariàm in puncto T.

Conſtructio. Ductis rectis duabus RB, RD; tùm aliis duabus SA, SC. Quia per def. 30. Parallelepipedum continetur planis parallelis, plana eius aduerſa omnia, erunt per 24.prop.parallelográma, videlicet BD, CA; AE, HB; AF, GB: Cùm igitur per 34.lib.1. latera BF, ED, ſint æqualia, & ex datis ſint eorum dimidia BM, EK, æqualia; & parallela etiã ſint vt tota latera, rectæ lineæ BE, MK, erunt parallelæ & æquales, per prop.33.lib.1. vnde parallelogrammum erit BK; & eodem artificio probabitur eſſe parallelogrammum MD; tùm etiam FI, & DI: ſed etiam parallelogramma erunt MI, RE, FR, LK, quandoquidem latera illorum aduerſa oſtenſa ſint parallela, quæ etiam per propoſ.cit.34.lib.1. erunt æqualia quare erant MR, RK æqualia, quia ſunt æqualia æqualibus FL, LD; idque per 1.ax. libr.1. eodem modo erunt æqualia inter ſe MB, DK; vnde erit in proportione æqualitatis MR ad RK: vt MB ad DK, & permutando, MB ad MR: vt DK ad DR. Conſideremus autem duo triangula MRB, KRD, quia anguli eorum BMR, DKR, ſunt æquales per 29.prop. lib.1; & latera circa illos ſunt oſtẽſa proportionalia, erunt ipſa triangula æquiangula per propoſ.6.lib.6. quare anguli MRB, DRK, æquales erunt, & anguli MBR, KDR, æquales; vnde per 4.prop. lib.1. erunt latera BR, RD æqualia. Sũt autem per 2.coroll. noſtrum ad prop.13.lib.1. anguli in R, ſupra rectam MRK, verſus partes I, æquales duobus rectis, videlicet tres anguli MRB, BRI, IRK; ergo ſi duobus angulis poſterioribus BRI, IRK, addatur angulus KRD æqualis oſtenſus angulo MRB, erunt tres anguli BRI, IRK, KRD, æquales etiã duobus rectis. quare ad punctum R, rectæ IR, eductæ rectæ lineæ RB, RD, ad partes diuerſas, quia efficiunt angulos BRK, KRD, æquales duobus rectis, ipſæ rectæ RB, RD, efficiẽt vnam rectam BRD. Ex eiſdem principiis probabuntur duæ rectæ SC, SA, efficere vnam rectam CSA, & eſſe æquales CS, AS. Eſt autem DA æqualis & parallela ipſi FH in parallelogrammo AF; tum etiam recta BC, æqualis & parallela ipſi FH, in parallelogrammo HB; ergo per 1.ax.lib.1.erunt æquales inter ſe ipſæ rectæ BC & DA, tum per 9.propoſ. huius lib. parallelæ inter ſe; ergo vlterius per prop. 33.lib.1.rectæ BRD, CSA, erunt etiã æquales & parallelæ, quandoquidem per 7.propoſ. libr.huius exiſtunt in eodem plano parallelarum BC, BA, parallelogrammum ergo erit CD, eiuſque diameter BA, & recta RTS in ipſo plano perallelogrãmi CD ducta, eo quod earum extrema ſuſtententur in dicto plano.

Demonſtratio. Per prop.29.libr.1. RBT, æqualis eſt angulo STA, tùm etiam per prop. 15.lib.eiuſdem, anguli BTR, ATS, æquales; ergo in triangulis ATS, BTR, quia illi dicti anguli duo ſunt æquales, illis duobus, & latera SA, RB, ſunt æqualia, vtpotè æqualiũ BD, CA, dimidia oſtenſa; erunt per prop.26.libr. 1.latera RT, ST, æqualia, tum BT, AT. Duę ergo lineæ BA diagonalis parallelepipedi, & RS, ſectio communis prædictorum planorum IN, KO, ſe mutuò ſecant bifariàm in T. quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM.

*In omni parallelepipedo diametri omnes ſe mutuò bifariàm ſecant in vno eodemq́ puncto, quod centrum eius vocatur.*

NAm ſe debet quælibet, ſecare bifariàm Fig.262 in T, cum recta linea RTS quæ eſt communis ſectio prædictornm planorum; ergo omnes ſe mutuò ſecabunt diagonales in vno eodem puncto. quod meritò centrum parallepipedi vocari debet.

PRO-

## PROPOSITIO XL.

Si fuerint duo priſmata æqualis altitudinis habentia duo triangula oppoſita parallela; quorum hoc quidem habeat baſim, parallelogrammum; illud verò, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipſa priſmata.

Fig.163. SVppoſitio. Duo priſmata ABCDEF, GHIKLM, ſint æqualis altitudinis, primumque habeat baſim parallelogrammam ABCD, ſecundum vero triangularem baſim GHI, ſubduplam dicti parallelogrammi: & ſingula priſmata oppoſita habeant plana triangularia parallela. Dico quod hæc priſmata ſint æqualia.

Conſtructio ſingulis hiſce priſmatibus concipiantur adiuncta ſibi ſimilia & æqualia ita vt plana ſimilia & æqualia ſint parallela, & duo alia ſimilia & æqualia ſint ſimul; efficientur per coroll. noſtrum 3. ad propoſ.28. priſmata AFO, GPL.

Demonſtratio. Datur triangulum GHI ſubduplum parallelogrãmi AC, & per prop. 34.lib.1.triangulum idem GHI, ſubduplum & parallelogrammi GP, ergo per ax.6.lib.1. parallelogrammata AC, GP, erunt æqualia: Ergo parallelepipeda AFO, GPL, cùm eandem habeant altitudinem datam priſmatum datorum, & inſiſtant baſibus AC, GP æqualibus, erunt per prop. 31. æqualia; ideoque per prop.15. libr.5. priſmata data horũ dimidia erunt æqualia. quod erat concludendum.

# COMMENTARIVS
# IN
# LIBRVM DVODECIMVM
# ELEMENTORVM
# GEOMETRICORVM
# EVCLIDIS.

## PROPOSITIO I.

Quæ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata.

Fig.164. SVppositio. In circulis ſint duo ſimilia polygona ABCDE, FGHIK, vnum in vno alterum in altero circulo: Dico ita eſſe iſta polygona inter ſe, vt quadrata à diametris circulorum; hoc eſt ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum à diametro circuli primi ad quadratum à diametro circuli ſecundi.

Conſtructio. Ab vno angulo polygoni ABCDE, puta ab A, tranſmittatur diameter AL circuli circũſcribentis ipſum polygonum: & ab angulo F ęquali angulo prædicto, ducatur FM diameter alterius circuli: tùm ſubtendantur rectæ AC, FH, æqualibus angulis ABC, FGH, quandoquidem dantur ſimilia polygona; tùm ſubtendantur aliæ rectæ BL, GM.

Demonſtratio. Per def.1.libr.6.quia dantur ſimilia polygona, erunt in triãgulis ABC, FGH, latera proportionalia circum angulos ABC, FGH; vnde per propoſ.6.libr.6.erunt æquiangula triangula ABC, FGH; æqualeſque erunt anguli ACB, FHG; ſed per prop.

21. libr. 3. anguli ACB, ALB ſunt æquales, tùm etiam anguli FHG, FMG ſunt æquales; ergo per 1. ax. lib. 1. anguli ALB, FMG erunt æquales inter ſe. Sunt autem in triangulis ABL, FGM, anguli in B & G, recti per prop. 31. libr. 3. ergo per 12. ax. libr. 1. erunt æquales inter ſe: cùm igitur in dictis triangulis ABL, FGM, oſtenſi ſint duo anguli æquales duobus angulis, vterque vtrique, erunt reliqui anguli BAL, GFM, æquales per coroll. noſtrum 3. ad prop. 32. libr. 1. Cùm ergo ſint æquiangula triangula LAB, MFG, erit per prop. 4. libr. 6. vt MF ad FG, ita LA ad AB; & per propoſ. 22. libr. 5. permutando erit vt MF ad LA, ita FG ad AB: Quod ſi concipiamus quadrata ſuper MF, & LA; tùm ſimilia data polygona ſuper FG, & AB; cùm ſint quadrata ſimilia, erit per propoſ. 22. libr. 6. vt quadratum ex MF ad quadratum ex LA, ita polygonum ſimile ſuper FG ad polygonum ſimile ſuper AB, conſtitutum. quod erat concludendum.

Hæc conſtructio ac demonſtratio propria eſt, quando rectilineum polygonum eſt pluſquam tetragonum. Quare vt in vniuerſum propoſitionem demonſtremus, reſtat vt conſtructionem in triangulis & quadrangulis in ſcriptis in circulis datis, tùm demonſtrationem proferamus in medium.

*Fig. 264.* In eiſdē circulis ſint duo triangula BAE, GFK, ſimilia. Ducantur diametri AL, FM, ex angulis BAE, GFK, æqualibus, ſecantes oppoſita latera BE, GK; & ex angulis æqualibus E, K, tranſmittantur rectæ EL, KM. Erunt per prop. 21. lib. 3. anguli ABE, ALE æquales, tùm etiam anguli FGK, FMK, æquales; ſed dantur anguli ABE, FGK æquales, ob ſimilitudinem triangulorum, ergo per 1. ax. lib. 1. anguli ALE, FMK, æquales erunt. Cùm igitur in triangulis AEL, FKM, duo anguli AEL, FKM, ſint recti per 31. propoſ. libr. 3. ideoque æquales per 12. ax. libr. 1. tùm anguli ALE, FMK, oſtenſi æquales, erunt per coroll. noſtrum 3. ad propoſ. 32. lib. 1. reliqui anguli LAE, MFK, æquales, quare triangula ipſa AEL, FKM, erunt æquiangula; ideoque per. 4. propoſ. libr. 6. erit vt LA ad AE, ita MF ad FK, & per 22. prop. libr. 5. permutando, erit vt LA ad MF, ita AE ad FK: ergo per 22. prop. lib. 6. erit vt quadratum diametri LA ad quadratum diametri MF, ſic triangulum ABE ſuper AE conſtitutum, ad triangulum FGK ſimile conſtitutum ſuper FK.

*Fig. 264.* In eiſdem circulis, ſint ſimilia quadrilatera BAEL, GFKM. Si ductæ diametri AL, FM, ex angulis æqualibus BAE, GFK, terminentur in angulis aliis æqualibus BLE, GMK; tunc anguli AEL, FKM, erunt recti per prop. 31. libr. 3. æqualeſque per 12. axio. libr. 1. & quia ex datis eſt LE ad EA, vt MK ad KF, erunt per prop. 6. libr. 6. triangula ipſa LEA, MKF, æquiangula: quare per prop. 4. libr. 6. erit vt LA ad AE, ita MF ad FK, & permutando iuxta prop. 16. libr. 5. erit vt LA ad MF, ſic AE ad FK: ideoque per prop. 22. lib. 6. erit vt quadratum ex diametro LA ad quadratum ex diametro MF, ſic quadrilaterum ABLE ſuper AE deſcriptum, ad quadrilaterum FGMK ſuper FK ſimile prædicto deſcriptum. Quod ſi dictæ diametri AL, FM, ductæ ab angulis æqualibus ſimilium quadrilaterorum non terminentur in eorum aliis angulis æqualibus, ſed ſecent latera illorum, vt in quadrilateris ACDE, FHIK, ſimilibus: ſic erit agendum. ex angulis D, E, tranſmittendæ erunt rectæ DA, EL; & ex angulis I, K, aliæ rectæ IF, KM: Tunc vero ob ſimilitudinem datorum quadrilaterorum, philoſophandum erit circa triangula AED, AEL, FKI, FKM, vti fecimus initio circa triangula, ABC, ABL, FGH, FGM: & concludetur ita eſſe LA ad AE, vt MF ad FK, & permutando eſſe ita LA ad MF, vt AE ad FK: & per propoſ. 22. libr. 6. ita eſſe quadratum ex diametro LA, ad quadratum ex diametro MF, ſicut quadrilaterum CAED ſuper AE deſcriptum, ad quadrilaterum ſimile HFKI ſuper FK deſcriptum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si in circulis deſcribantur ſimilia polygona vnius ſpeciei, tùm alia ſimilia polygona alterius ſpeciei vel diuerſa: erunt eiuſdem ſpeciei inter ſe polygona ſimilia, vt alia polygona diuerſa ſimilia in ipſis circulis.*

Exempli gratia erit triangulum BAE ad ſimile triangulum GFK, vt quadrilaterum BAEL ad quadrilaterū ſimile GFKM: Nam tàm illa triangula ſimilia, quàm quadrilatera iſta ſimilia, ſunt vt à diametris circulorum ipſorum quadrata circumſcribentium dictas figuras ſimiles; ergo per prop. 11. libr. 5. erit triangulum ad triangulum ſimile, ſicut quadrilaterum ad quadrilaterum ſimile, ſi deſcripta ſint in eiſdem circulis diuerſis. *Fig. 264.*

PRO-

## PROPOSITIO II.

### Circuli inter ſe ſunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SVppoſitio. Duo circuli ABCD, EFGH, obtineant diametros ſuas proprias AC, EG: Dico eſſe vt quadratum diametri AC ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD ad circulum EFGH.

Fig.165. Conſtructio, ſi non ſit circulus datus ad circulum datum, vt diametri circuli primi quadratum ad quadratum ex diametro circuli ſecundi; erit per axioma 1.libr.5. circulus primus ABCD ad aliquam magnitudinem puta *I*, vt quadratum diametri AC ad quadratum ex diametro EG: quæ magnitudo *I*, vel erit minor, vel maior, vel æqualis circulo EFGH. Si æqualis, babebit circulus ABCD ad circulum EFGH, & ad quantitatem *I*, eandem rationem, iuxta prop.7.lib.5. quare cùm detur vt quadratum ex diametro AC ad quadratum ex diametro EG, ita circulus ABCD ad quantitatem I: & ſit oſtenſus circulus ABCD ad circulum EFGH, vt circulus idem ABCD ad quantitatem I; erit per prop.11. libr.5. vt quadratum ex diametro AC, ad quadratum ex diametro EG, ita circulus ABCD ad circulum EFGH, quod hactenus euidens non eſt, niſi prius demonſtrauerimus quantitatem *I* aſſumptam comparabilem cum circulo ABCD, non poſſe eſſe maiorem, vel minorem circulo EFGH: tunc enim euidens erit diſcurſus ſactus, & propoſitio demonſtrata erit.

Age verò demonſtremus quantitatem *I*, non poſſe eſſe minorem circulo EFGH. Eſto ſit minor dicto circulo, magnitudine K, quæ ſit differentia circuli EFGH, & quantitatis I; itaque vt circulus EFGH, ſit æqualis magnitudinibus I & K ſimul ſumptis, & circulus EFGH excedat quantitatem *I*, quantitate K. Per propoſ.6.lib.4. In circulo EFGH, inſcribatur quadratum EFGH, & per 7.propoſ. eiuſdem libr.4. circa eundem circulum deſcribatur quadratum XZ; quod latus habebit æquale diametro EG circuli EFGH, vel diametro EG quadrati inſcripti; nam EG erit ad angulos rectos lateribus quadrati XZ circulum EFGH deſcripti, idq́ue per propoſ. 18. & 19. libr.3. quia per defin.4. libr. eiuſdem 3. latera quadrati XZ, circulum tangunt; vnde parallelogramma per propoſ.29.libr.1. reſultabunt GX, EZ; & per propoſ.34.lib.1. diameter EG, & latera quæuis quadrati circa circulum deſcripti, videlicet quadrati ZX, erunt æqualia. Prætereà, ſi EG diameter quadrati EFGH in circulo inſcripti non ſit diameter circuli; erit angulus EHG quadrati, vel maior recto, vel minor recto, iuxta propoſ.31.libr.3. vtpotè exiſtens in ſegmento maiore vel minore quàm ſemicirculus; hoc vero eſt contra naturam quadrati, ergò diameter EG quadrati in circulo inſcripti, erit diameter circuli ipſius; ideoque etiam quadratum ZX circulo EFGH circumſcriptum latus habebit æquale diametro quadrati EFGH in circulo ipſo inſcripti. Et quia per propoſ.47.libr.1. quadratum ex EG, æquale eſt quadratis ex EH, HG, æqualibus per corollar. noſtrum 3. ad propoſ.46. libr.1. quia latera EH, HG, æqualia ſunt; erit quadratum ex EG, hoc eſt quadratum ZX, duplum quadrati EFGH ex EH latere, in circulo inſcripti. Eſt autem quadratum ZX maius circulo EFGH, & quadratum EFGH, minus eodem circulo EFGH: & ipſum quadratum EFGH non poteſt eſſe dimidium circuli EFGH, alioquin circulus ipſe EFGH duplus quadrati EFGH ex hac poſitione, & quadratum ZX duplum eiuſdē quadrati EFGH, eſſent æqualia per 6.axio.libr.1. contra id quod oſtendimus, videlicet quadratum ZX maius eſſe circulo EFGH. Sed neque quadratum EFGH poteſt minus quàm dimidiū circuli EFGH, nam quadratum ZX oſtenſum duplum quadrati EFGH, eſſet minus circulo EFGH, contra demonſtrata. Relinquitur ergo vt quadratum EFGH ſit maius quàm dimidium circuli EFGH, quandoquidem oſtendimus non poſſe eſſe eius dimidium, nec minus dimidio eiuſdem. Præterea arcus quatuor EF, FG, GH, HE, æquales per corollar. noſtrum ad propoſ.28. libr.3. ſecentur bifariàm per propoſ.30. libr. eiuſdem 3. in punctis L, M, N, O; & ducantur rectæ EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, OE, quæ erũt æquales per cit. corollar. tùm per coroll. noſtrum 1. ad propoſ.17. libr.3. ex puncto L, ducatur recta VLT tangens circulum in L; & ex centro A circuli EFGH, ducantur rectæ AL, AF, illa ſecabit obuiam chordam FE in B: Cùm autem arcus LE, LF, ſint æquales vtpotè dimidia totius FLE, anguli LAE, LAF, erunt æquales per propoſ. 27. libr. 3. quare per 4.propoſ.lib.1. in triangulis BAE, BAF, cùm latera EA, AB, ſint æqualia lateribus FA, AB, æqualeſq́ue comprehendant angulos, anguli circa B æquales erunt, ideoque recti ambo per defin. 10. libr. 1. Sed & per propoſ.18.libr.3. anguli in L ſunt recti effecti ab AL & VLT, & per propoſ.15. libr.1. anguli in B verſus L ſunt etiam recti, ergo per propoſ.28.libr.1. parallelæ erunt rectæ lineæ

VLT, FBE; verum vna illarum FE, ſecat parallela latera HE, GF, quadrati EFGF, ergo per corollar. noſtrum 1. ad propoſ. 42. libr. 1. etiam recta VLT, ſecabit rectas parallelas eaſdem HE, GF, productas vltra E, & F: quare parallelogrammum erit VE. Quia vero per propoſ. 41. libr. 1. triangulum FLE eſt dimidium parallelogrammi VE, quod maius eſt ſegmento FLE circuli, oſtendemus eodem modo triangulum FLE maius quàm dimidium ſegmenti FLE, quo probauimus quadratum EFGA maius eſſe quàm dimidium circuli EFGH. Simili autem ratione demonſtrabuntur reliqua triãgula maiora eſſe dimidio ſegmentorum in quibus ſunt: ideoq; ſimul ſumpta illa triangula erunt maiora quàm dimidium omnium ſimul ſegmentorum ſuorum. Quod ſi rurſus iidem arcus minóres LE, LF, & ſic de reliquis, bifariàm diuidantur per 30. propoſ. libr. 3. & ſic deinceps in infinitum, & tranſmittantur ſubtenſæ ipſis arcubus minoribus & minoribus reſultantibus, conſtituentur triangula quæ ſimul ſumpta maiora erunt dimidio ſegmentorum ſimul ſumptorum in quibus exiſtunt, per eadem principia citata. Igitur quia ab circulo EFGH, ablatum eſt quadratum EFGH quod maius eſt quam dimidium ipſius circuli; & ab reliquis ſegmentis ablata ſunt triangula prædicta maiora quam dimidium dictorum ſegmentorum reliquorum; & ſic deinceps; relinquetur tandem per 1. propoſ. libr. 10. minor quantitas vel magnitudo quam K, exceſſus circuli EFGH, ſupra magnitudinem I. Iam verò ſint, exempli gratia, circuli ſegmenta relicta EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, OE, ſimul ſumpta, minora quàm magnitudo K: Quia circulus EFGH ponitur æqualis magnitudinibus I & K ſimul ſumptis; ſi ex circulo illo ablata ſint illa dicta ſegmenta; & ex I & K ablata ſit magnitudo K quæ maior eſt dictis ſegmentis ſimul ſumptis oſtenſa: erit reliquum multilaterum ELFMGNHOE maius reliqua magnitudine I, & I magnitudo minor multilatero ELF, &c. Quod ſi in circulo ABCD, multilaterum APBQCRDSA concipiatur inſcriptum, ſimile prædicto multilatero ELFM, &c. quia multilaterum APBQ, &c. eſt per propoſ. 1. ad multilaterum ELFM, &c. vt quadratum ex diametro AC ad quadratum ex diametro EH; & poſitus eſt circulus ABCD ad magnitudinem I, vt quadratum ex diametro AC ad quadratum ex diametro EG; erit per propoſ. 11. libr. 5. multilaterum APBQ, &c. ad multilaterũ ELFM, &c. vt circulus ABCD ad I magnitudinem; eſt multilaterum APBQ, &c. minus circulo ABCD, erit igitur per propoſ. 14. lib. 5. multilaterum ELFM, &c. minus quàm I magnitudo. Idem ergo multilaterum ELFM, &c. erit maius quàm I, & minus quàm I. quod abſurdum eſt; ergo poſitio quod I ſit minor circulo EFGH, vnde procedit illud abſurdum, falſa erit. Eodem artificio, & ex iiſdem principiis probabitur non poſſe eſſe circulum EFGH ad circulum ABCD, vt quadratum ex diametro EG ad diametrum ex quadrato AC: ita vt in vniuerſum verum ſit, nunquam circulum priorem ita ſe habere ad magnitudinem minorem circulo poſteriore ſeu conſequente; vt quadratum ex diametro antecedentis circuli, ad quadratum conſequentis eirculi. quo poſito

Reſtat vt oſtendamus magnitudinem I, non poſſe eſſe maiorem circulo EFGH. Eſto ſi fieri poſſit magnitudo I maior circulo EFGH. Ponitur autem circulus ABCD ad I, vt quadratum diamatri AC ad quadratum diametri EG, ergo per corollar. propoſ. 4. lib. 5. erit inuertendo, magnitudo I ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG ad quadratum diametri AC: Ponatur vero vt I magnitudo ad circulum ABCD, ita circulus EFGH ad magnitudinem aliquam, puta K per cit. axioma libr. 5. Verùm quoniam I maior ponitur circulo EFGH, erit per prop. 14. libr. 5. circulus ABCD maior quàm magnitudo K: ſed ex antecedentis comparatione ſit per propoſ. 11. lib. 5. vt ſit quadratum diametri EG ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH ad magnitudinem K minorem oſtenſam circulo ABCD, quod eſt abſurdum: nam in prima parte probauimus non poſſe eſſe vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum antecedentem ad magnitudinem circulo conſequente minorem: falſa ergo erit poſitio quod magnitudo I ſit maior eirculo EFGH.

Demonſtratio. Si non ſit circulus ABCD ad circulum EFGH, vt diametri AC quadratum ad diametri EG quadratum; erit per ax. 1. lib. 5. circulus ABCD ad aliquam magnitudinem puta I, vt quadratum diametri AC ad quadratum diametri EG: Quæ magnitudo I, vel erit minor, vel maior, vel æqualis ipſi circulo EFGH; ſed oſtendimus non poſſe dici minorem, neque maiorem circulo ipſo EFGH; relinquitur ergo vt magnitudo I ſit æqualis circulo EFGH: igitur per 7. propoſ. libr. 5. circulus ABCD ad circulum EFGH eandem habebit rationem, quàm ad magnitudinem I; ſed eſt circulus ABCD ad magnitudinem I, vt quadratum diametri AC ad quadratum diametri EG; ergo per prop. 11. lib. 5. erit circulus ABCD, ad

ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC ad quadratum diametri EG, ſicuti in principio cõſtructionis probaueramus. Quare circuli inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata, quod erat propoſitum ac demonſtrandum.

## COROLLARIVM.

*Circulus eſt ad circulum, vt multilaterum in illo deſcriptum ad multilaterum ſimile in hoc inſcriptum.*

QVia per hanc propoſitionem eſt circulus ad circulum vt quadratum ex diametro illius ad quadratum ex diametro huius, & per præcedentem propoſ. ſunt multilatera ſimilia, in circulis inſcripta, vt à diametris quadrata: ergo per propoſ. 11. libr. 5. erit circulus ad circulum, vt multilaterum in illo deſcriptum ad multilaterum ſimile in hoc inſcriptum.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Quadratum circumſcriptum circulo, latus habet æquale diametro ipſius circuli.*

*Et quadratum in circulo inſcriptum, diametrum habet æqualem diametro circuli ipſius.*

*Et quadratum circumſcriptum circulo, latus habet æquale diametro quadrati in eodem ipſo circulo inſcripti.*

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Dato quadrato circa circulum deſcripto ſi ab puncto contactus vnius lateris quadrati & circuli per centrum circuli recta ducatur, producta vltra centrum, ad aliud punctum contractus oppoſiti lateris quadrati prædicto incidet.*

*Et ſi ab angulo quadrati deſcripti in circulo ducatur diameter ipſius circuli, ad augulum quadrati oppoſitum incidet.*

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Quadratum circulo circumſcriptum, duplum eſt quadrati in eodem ipſo circulo inſcripti.*

## COROLLARIVM NOSTRVM IV.

*Quadratum in circulo inſcriptum, maius eſt dimidio ipſius circuli.*

## COROLLARIVM NOSTRVM V.

*Recta linea circulum tangens in puncto medio arcus eius, parallela eſt chordæ ſubtenſæ illi arcui.*

## COROLLARIVM NOSTRVM VI.

*Triangulum rectilineum baſim habens chordam arcus circuli, angulum verò illi baſi oppoſitum, in puncto medio illius arcus; maius eſt ſegmenti dimidio circuli in quo exiſtit.*

HÆc noſtra ſex corollaria demonſtrata ſunt in cõnſtructione poſitionis quod magnitudo I non ſit minor circulo EFGH.

## COROLLARIVM NOSTRVM VII.

*Circuli ſunt, vt à ſemidiametris quadrata.*

CVm enim per propoſ. 15. libr. 5. ſit ſemidiameter vnius circuli ad ſemidiametrum alterius circuli, vt diameter illius ad diametrum huius; & ſimiliterque ſe habeat quadratum ex ſemidiametro illius ad quadratum ſemidiametri huius, vt quadratum totius diametri illius ad quadratum totius diametri huius, eo quod tàm quadruplum ſit vnum ſui proprij quadrati, quàm aliud ſui proprij, iuxta corollarium noſtrum ad propoſ. 20. libr. 6. & per hanc propoſ. 2. circuli ſint vt quadrata ex eorum diametris; erunt etiam per propoſ. 11. libr. 5. iidem circuli vt quadrata eorum ex ſemidiametris.

# PROPOSITIO III.

Omnis pyramis triãgularem habens baſim, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, triangulares habentes baſes; & in duo priſmata æqualia, quæ priſmata maiora sũt totius pyramidis dimidio.

*Fig.*166 SVppoſitio. Data ſit Pyramidis triangularem habens baſim ABC, & verticem D: Dico diuidi in duas pyramides, &c. in propoſitione aſſerta.

Conſtructio, ſecentur bifariàm in E,F,G, H,I,K, omnia eius latera, per prop. 10. lib. 1. & ducantur rectæ lineæ EG, EH, HG, HI, HK, IK, IF, FG: Diuiſa erit pyramis in duas pyramides, quarum prima erit AEGH, baſim habens triangularem AEG, verticemque H; ſecundæ verò HIKD, baſis erit triangulum HKI, & vertex D: tùm in duo ſolida quorum primum EBFGHI, baſim obtinens EBFG parallelogrammum; alterum verò CFGHIK, baſim habens triangulum CFG: Probandum autem eſt duo illa ſolida EBFGHI, CFGHIK, eſſe priſmata æqualia inter ſe, & ſimul ſumpta eſſe maiora dimidio totius datæ pyramidis, & pyramides duas AEGH, HIKD, eſſe æquales inter ſe, & ſimiles inrer ſe & toti; ipſaſque cum duobus illis ſolidis priſmatibus componere totam pyramidem datam.

Demonſtratio. Latera AD, BD, trianguaris plani ADB, diuiſa ſunt per conſtructionem, bifariàm in H & I, hoc eſt proportionaliter, ergo per 2. propoſ. lib. 6. recta HI, erit parallela ipſi AB: ſimiliter ob idem principium, recta HK erit parallela rectæ AC; & recta IK ipſi BC rectæ; & recta EG, ipſi BC; & recta GF ipſi AB; & recta EH, ipſi BD; & recta IF, ipſi DC; & recta HG ipſi DC: Sunt autem oſtenſæ rectæ FG, HI, eſſe parallelæ ipſi AB, ergo per propoſ. 9. lib. 11. erunt inter ſe parallelæ; Simili modo quia duæ rectæ HG, IF, ſunt oſtenſæ parallelæ eidem DC, erũt inter ſe parallelæ: quare parallelogrammum erit FGHI: Non aliter oſtendentur parallelogrãmata eſſe EHIB, GHKC, FIKC, EGBH. Iam verò quia duæ rectæ EH, HG, ſunt parallelæ probatæ duabus rectis BD, DC, angulos continebunt æquales EHG, BDC, per propoſ. 10. libr. 11. per quam etiam anguli HEG, DBC, æquales erũt, tùm etiam anguli HGE, DCB: quare in triangulis EHG, BDC, æquiangulis oſtenſis, proportionalia erunt latera circa dictos angulos æquales iuxta 4. propoſ. libr. 6. vnde per def. 1. libri eiuſdem, erunt dicta triangula ſimilia: ſed & per corollar. propoſ. cit. 4. libr. 6. triangula HAE, HAG, AEG, ſimilia triangulis DAB, DAC, ABC; ergo per defin. 9. libr. 11. pyramis AEGH, ſimilis erir pyramidi, ABCD. Inſuper quoniam rectæ HI, HK, ſunr parallelæ rectis AB, AC, erunt per propoſ. 10. libr. 11. anguli IHK, BAC æquales; eodem artificio probabuntur æquales anguli HIK, ABC; & HKI, ACB; igitur in æquiangulis triangulis HIK, ABC, latera erunt proportionalia circum æquales angulos per 4. propoſ. libr. 6. ideoque per defin. 1. libr. eiuſdem, dicta triangula erunt ſimilia; ſed & ſunr per corollar. propoſ. 4. libr. 6. triangula DHI, DIK, DKA, ſimilia triangulis DAB, DBC, DCA, ergo per 9. defin. libr. 11. pyramidis HIKD ſimilis erit pyramidi ABCD. Quia verò triangula HAE, HDI, ſimilia oſtendentur triangulo ADB, per corollar. propoſ. 4. libr. 6. ipſa quoque erunt ſimilia inter ſe per propoſ. 21. libr. eiuſdem 6. ſed ſunt conſtituta ſupra æquales rectas AH, HD; ergo erit per 1. def. libr. 6. vt HA ad AE, ita DH ad HI, videlicet latera circa æquales angulos EAH, IHD per 29. propoſ. lib. 1. probandos; ſed propoſ. 22. libr. 5. erit HA ad HD, vt AE ad HI, ergo ſicut HA, HD, ſunt æquales, erũt æquales rectæ AE, IH; cùm ergo in triangulis HAE, DAI, ſint circa æquales angulos prædictos, latera æqualia, vtrumque vtrique, erunt per 4. propoſit. libr. 1. ipſa dicta triangula æqualia, & baſes habebunt HE, DI, æquales. Eadem arte probabuntur æqualia & ſimilia triangula AHG, HDK, quia ſimilia demonſtrata ſunt triangulo ADC, & poſita ſint ſupra æquales rectas AH, HD: Item ſimilia & æqualia erunt triagula AEG, HIK, cùm ſimilia ſint triangulo ABC, & ſuper rectas æquales AE, HI, oſtenſas: Denique æqualia erunt & ſimilia triangula EHG, IDK, oſtenſa ſimilia triangulo BDC, & ſuper rectas HE, DI, oſtenſas æquales: Pyramides ergo prædictæ HEGH, HIKD, æquales ſunt & ſimiles per defin. 10. libr. 11. quandoquidem omnia plana earum oſtenſa ſunt reſpectiuè eſſe æqualia & ſimilia: Prærereà quia pyramis AEGH oſtenſa eſt totali ABCD ſimilis, erunt plana huius ſimilia planis illius reſpectiuè; ſed plana pyramidis AEGH, ſunt oſtenſa ſimilia planis reſpectiuè pyramidis AIKD; ergo per propoſ. 21. libr. 6. plana pyramidis HIKD, erunt ſimilia planis relatiuè, pyramidis

pyramidis totalis ABCD: ergo per defin.9. lib.11.pyramis HIKD,erit etiam ſimilis totali pyramidi ABCD,demonſtrauimus ergo pyramides duas AEGH,HIKD,eſſe æquales & ſimiles inter ſe,& totali ABCD pyramidi ſimiles.

Ad hæc quia latera EH,HG,GE, æqualia ſunt, & parallela lateribus BI, IF, FB, per prop.34.libr.1. cùm parallelogrammata ſint oſtenſa EHIB,FGHI,BFGE,erunt per coroll.propoſit.8. libr.1. triangula æquiangula EHG, BIF, & æqualia, ideoque ſimilia per defin.1. lib.6. & quia EH, HG, rectæ, ſunt oſtenſæ parallelæ rectis BI,IF, erunt plana ipſa triangulorum quæ per illas ducuntur parallela per prop.15.lib.11. quare ſolidum BIFGHE, contentum duobus illis triangulis EHG,BIF, ſimilibus, æqualibus & parallelis oppoſitis, tùm tribus parallelogrammis EGFB,BEHI,IFGH,priſma eſt ex defin.13. libr.11.Præterea, quia per prop.34.lib.1.rectæ FC,CG, GF, æquales ſunt, & parallelæ rectis IK,KH, HI, quia ſunt parallelogrammata probata CFIK, CGHK, FGHI; erunt vti in præcedentibus, triangula CFG, HIK, æqualia & æquiãgula & ſimilia, per corollar. prop.8.libr.1.& defin.1. libr.6. ſed & etiam per prop.15.libr.11.quia rectæ CF,CG,ſunt parallelæ rectis KI,KA,plana triangulorum CFG, HIK, ducta per illas, erunt parallela: Igitur ſolidum CFGHIK terminatum planis duobus triangularibus CFG,HIK,oppoſitis, parallelis, æqualibus,& ſimilibus, tùm parallelogrammis tribus CFIK, CGHK, FGHI, erit per defin. 13. priſma. Denique quia duo priſmata EBFGHI,CFGHIK,ſunt inter duo plana parallela BCGE, HIK, eo quod oſtenderimus plana triãgulorum HIK, CFG eſſe parallela,& planum CFG eſt in eodem plano totius plani EBCG,ſeu totius trianguli ABC; erunt dicta duo priſmata eiuſdem altitudinis per prop.29. libr.11. coroll. noſtrum 4. & coroll. noſtrum ad propoſ.34. eiuſdem libri 11.& inſuper per prop.41.libr. 1.baſis parallelogramma EBFG eſt dupla baſeos triangularis CFG; ipſa priſmata duo prædicta EBFGHI,CFGHIK,erunt æqualia per 40. ſeu vltimam prop.libr.11.

Vltimò quia pyramis EBFI, æqualis eſt ac ſimilis pyramidibus ſeorſim ſumptis AEGH,AIKD,ob triangularium planorum æqualitatem & ſimilitudinem,& multitudinem;& priſma EBFGHI maius eſt pyramide EBFI,vt totum parte;etiam aliud priſma CFGHIK, maius erit pyramide altera HIKD: Ergo duo priſmata illa ſimul ſumpta, erunt maiora pyramidibus illis duabus ſimul ſumptis: Et quoniam tota pyramis data ABCD, diuiſa eſt in illas duas pyramides, & duo illa priſmata, hæc duo ſimul ſumpta erunt maiora dimidio totius pyramidis & ſic tota propoſitio demonſtrata remanebit.

## COROLLARIVM NOSTRVM

*Æqualia & ſimilia rectilinea, vti triangula, ſimiliterque conſtituta, ſunt ſupra rectas æquales.*

HOc demonſtratum eſt in prima parte.

## PROPOSITIO IV.

Si fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum vtraque diuiſa & in duas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, & in duo priſmata æqualia: ac eodem modo diuiſa ſit vtraque pyramidum, quæ ex ſuperiore natæ ſunt; idque ſemper fiat.

Erit vt vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim,ita & omnia quæ in vna pyramide priſmata, ad omnia quæ in altera pyramide priſmata multitudine æqualia.

SVppoſitio.Super baſes triãgulares ABC, EFG, ſint duæ pyramides ABCD, EFGH,eiuſdem altitudinis;& earum latera omnia bifariàm diuidantur, & rectæ lineæ ducantur, vt in præcedentis propoſitionis 3. conſtructione; ita vt prima pyramis ABCD, ſecta ſit in duas pyramides AILM, MNOD, æquales & ſimiles inter ſe & toti; tùm in duo priſmata æqualia IBKLMN, CKLMNO: Altera vero pyramis EFGH etiam diuiſa ſit in duas pyramides EPRS, STVH, ſimiles & æquales inter ſe, & toti pyramidi EFGH ſimiles; & in duo alia priſmata æqualia PFQRST,GQRSTV,quemadmodum in præcedente propoſitione factum eſt: Atque ita fiat circa reſultantes pyramides. Dico ita eſſe omnia priſmata enata ex huiuſmodi diuiſionibus,in prima pyramide,ad omnia alia priſmata effecta in alia pyramide, per huiuſmodi diuiſio- Fig.167.

diuiſiones, illis multitudine æqualia; vt eſt baſis ABC ad baſim EFG.

Demonſtratio. Quandoquidem per conſtructionem latera CB, GF, diuiſa ſunt bifariàm in K & Q; erit in ratione dupli CB ad CK, vt GF ad GQ; ſed & per coroll. propoſ. 4. libr. 6. triangula ABC, LKC, ſimilia ſunt, ob parallelas rectas AB, LK oſtenſas in prop. præced. Similiter ſimilia ſunt triãgula EFG, RQG; ergo per propoſit. 22. lib. 6. erit triangulum ABC ad triangulum LKC, vt triangulum EFG ad triangulum RQG; & iuxta propoſ. 22. libr. 5. permutando erit, vt triangulum ABC ad triangulum EFG, ita triangulum LKC ad triangulum RQG. (Iam verò intelligantur ex verticibus D, H, pyramidum datarum, demiſſæ rectæ lineæ perpendiculares ad baſes earum ABC, EFG; ipſæ perpendiculares erunt æquales inter ſe per def. 4. libr. 6. quia dantur ipſæ pyramides æqualis altitudinis: & quia in propoſit. 15. præcedentis demonſtratione oſtendimus plana ABC, MNO, eſſe parallela, quæ ſecãt duas rectas, nimirum DC, & perpendicularem ex D demiſſam ad planum ABC; ipſas per propoſit. 17. libr. 11. ſecabunt proportionaliter; ſed per conſtructionem ſecatur recta DC in O, bifariàm, ergo etiam dicta perpendicularis bifariàm ſecabitur ab plano MNO: ſimili ratione concludetur perpendicularis prædicta recta ex H demiſſa ad baſim EFG, biſariàm ſecari ab plano STV: igitur quia totæ perpendiculares ſunt æquales, ipſarum ſemiſſes erunt æquales, videlicet altitudines priſmatum CKLMNO, GQRSTV; quare per coroll. noſtrum ad propoſ. 34. libr. 11. erunt dicta iſta priſmata, vt earũ baſes LKC, RQG.) Cùm igitur ſit vt LKC triangulum ad triangulũ RQG, ita priſma CKLMNO ad priſma GQRSTV, atq; ita priſma IBKLMN ad priſma PFQRST cũ hæc illis ſint æqualia; & per prop. 12. li. 5. ſit, vt vnum priſma IBKLMN, ad vnum priſma PFQRST, ita duo priſmata IBKLMN, CKLMNO, ad duo PFQRST, GQRSTV: erit per prop. 11. libr. 5. vt baſis ABC ad baſim EFG, ita duo priſmata in vna pyramide ABCD ad duo priſmata in pyramide EFGH. Ex eiſdem principiis probabimus, ita eſſe duo priſmata in pyramidibus AILM, MNOD, enatis in pyramide ABCD, ad duo priſmata reſultantia in pyramidibus EPRS, STVH, enatis in pyramide EFGH, vt ſunt baſes AIL, MNO, illarum pyramidum, ad baſes EPR, STV, harum pyramidum: & ſic deinceps, ſi fiant plures & plures ſubdiuiſiones imperatæ. Verùm vt illæ baſes ad has, ita eſt LKC baſis, quæ illis eſt æqualis & ſimilis, ad baſim RQG quæ eſt his æqualis & ſimilis, ſicuti probatum eſt in demõſtratione præcedentis prop. itaque eſt baſis ABC ad baſim EFG, per prop. 11. libr. 5. Igitur per citat. iſtam propoſit. 11. erunt quoque vt baſis ABC ad baſim EFG, ita priſmata cuiuſlibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad priſmata cuiuſlibet pyramidis enatæ modo prædicto in pyramide EFGH: vnde per eandem prop. 11. libr. 5. erunt vt priſmata pyramidis ABCD ad priſmata pyramidis EFGH, ita priſmata tam pyramidis AILM ad priſmata pyramidis EPRS, quàm priſmata pyramidis MNOD ad priſmata pyramidis STVH; & ſic deinceps in infinitum. Quamobrem quia ſunt vt duo priſmata pyramidis ABCD, ad duo priſmata pyramidis EFGH, ita omnia priſmata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. ad omnia priſmata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. ſi hæc illis ſint multitudine æqualia, iuxta propoſ. 12. libr. 5. denique à primo ad vltimum, erit per prop. 11. libr. 5. vt baſis ABC ad baſim EFG, ita omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata in alia pyramide EFGH. quomodo fuit propoſitum.

## PROPOSITIO V.

### Sub eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.

SVppoſitio. Sint in eadem altitudine pyramides ABCD, EFCH, baſes habentes triangulares ABC, EFG: Dico ita eſſe pyramidem ad pyramidem, vt baſis ad baſim. *Fig. 167.*

Conſtructio. Diuidatur iuxta conſtructionem propoſitionis 3. vel 4. præcedẽtium, Pyramis EFGH in duas alias pyramides æquales, & duo priſmata æqualia; Rurſuſque factæ pyramides, in alias duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia ſecentur: & ita deinceps, in infinitum.

Demonſtratio. Si non ita ſit vti proponitur vel aſſeritur, Ponatur ſi fieri poſſit, vt baſis ABC ad baſim EFG, ita pyramis ABCD ad ſolydum X, quod vel minus, vel maius erit pyramide EFGH, vel illi æquale.

Eſto ſi fieri poſſit minus, ita vt differentia illorum ſit ſolidum Y. Iam verò ſi à pyramide EFGH auferantur duo priſmata æqualia PFQRST, GQRSTV, maiora ſimul quàm dimidium ipſius pyramidis, per prop. 4. præcedent. Tùm à reliquis pyramidibus EPRS, STVH,

STVH, plus quàm dimidium, nimirum earum duo priſmata; & ſic deinceps, in infinitum; relinquetur iuxta propoſit. 1. libr. 10. tandem minor magnitudo quàm Y ſolidum, exceſſus pyramidis EFGH ſupra ſolidum X; atque ita relicta erit magnitudo minor. Cùm autem pyramis EFGH ponatur ęqualis duobus ſolidis X, Y; erunt reliqua priſmata in dicta pyramide EFGH, maiora ſimul ſolido X;(nam ſunt illa oſtenſa ſimul maiora dimidio totius pyramidis; & alia etiam reliqua ſimul maiora factarũ in eadem pyramide prædicta pyramidum.) Præterea vti fecimus in conſtructione, ſecetur pyramis ABCD, in duas pyramides AILM, MNOD, æquales, & dua priſmata æqualia; dictæque pyramides iſtæ in alias duas æquales, & duo priſmata æqualia; & ſic deinceps toties quoties id factum eſt in pyramide EFGH. Nunc verò quia ſunt per prop. 4. libr. huius, omnia priſmata pyramidis ABCD, ad omnia priſmata multitudine æqualia pyramidis EFGH, vt baſis ABC ad baſim EFG, hoc eſt per prop. 11. libr. 5. vt pyramis ABCD ad ſolidum X; & ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD minora quàm pyramis ipſa ABCD, quia non computantur pyramides particulares; erunt per propoſit. 14. lib. 5. etiam priſmata omnia pyramidis EFGH, minora quàm ſolidum X, conceſſa in ſuperioribus maiora quàm ipſum ſolidum X: hæc pugnantia indicant poſitionem eſſe falſam, videlicet X ſolidum eſſe minus quàm pyramis EFGH.

Eſto verò maius ſolidum X, quàm pyramis EFGH. Quia ponitur pyramis ABCD ad ſolidum X, vt baſis ABC ad baſim EFG; erit per corollar. propoſit. 4. libr. 5. inuertendo, ſolidum X ad pyramidem ABCD, vt baſis EFG ad baſim ABC; Ponatur verò vt ſolidum X ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH ad ſolidum Y: Iam quia ſolidum X maius eſt quàm pyramis EFGH, erit per propoſ. 14. libr. 5. pyramis ABCD maior ſolido Y: quare per propoſit. 11. libr. 5. erit vt baſis EFG ad baſim ABC, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Hoc autem abſurdum eſt; nam oſtendimus non poſſe eſſe vt baſis eſt ad baſim, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Igitur falſa erit poſitio quod ſolidum X ſit maius pyramide EFGH.

Cùm ergo demonſtrauerimus ſolidum X non poſſe adſtrui minus nec maius pyramide EFGH, erit æquale ipſi. Igitur cùm ponatur vt baſis ABC ad baſim EFG, ita pyramis ABCD ad ſolidum X; ſit autem X ſolidum æquale pyramidi EFGH, erit per propoſ. 9. lib. 5. pyramis ABCD ad pyramidẽ EFGH, vt ad ſolidum X; ſitque vt baſis ABC ad baſim EFG ita pyramis ABCD ad ſolidum X; erit etiam per prop. 11. libr. 5. vt baſis ABC ad baſim EFG, ita pyramis ABCD ad pyramidem EFGH; hoc eſt pyramides datæ erunt vt baſes ipſarum. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM I.

*Pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem baſim, vel æquales baſes triangulares, ſunt inter ſe æquales.*

Nam per hanc propoſitionem, ipſæ pyramides eãdem habent proportionem, quàm baſes illarum, & iſtarum baſium datur proportio æqualitatis; ergo etiam pyramides erunt æquales.

## COROLLARIVM II.

*Pyramides triangulares æquales, ſuper eandem vel æquales baſes, eandem habent altitudinem.*

*Et pyramides triangulares, eandemq́, habentes altitudinem; baſes obtinent æquales ſi non eandem habuerint.*

Hoc corollarium eodem artificio demonſtrabitur quo demonſtrauimus corollar. noſtrum ad prop. 31. libr. 11. ſi tam in altitudine quàm in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si pyramides triangulares inter ſe ſint vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine.*

Secando enim ab maiore altitudine æqualem minori, & ab ſectionis puncto ad omnes baſeos angulos rectæ immittantur lineæ, conſtituentur noua plana terminantia reſultantem pyramidem, nam per 2. prop. libr. 11. omne triangulum eſt in vno plano: eritque vt baſis ad baſim ita pyramis minoris altitudinis ad pyramidem modo conſtitutam, per hanc propoſ. præſ. Sed datur eadem pyramis data ad totam datam, ergo per 9. propoſ. lib. 5. pyramis conſtituta ſeu reſultans æqualis erit totali pyramidi, pars toti, quod abſurdum: ergo & poſitio repugnans aſſertioni huius corollarij; quare demonſtratum erit intentum & aſſertio.

PRO-

Digitized by Google

tum per citat. demonſtrationem præcedentis caſus, eſt vt baſis ADE ad baſim GHKL, ita pyramis ADEF ad pyramidem GHKL; erit per cit.prop.24.lib.5. vt baſis ABDE ad baſim GHKL, ita pyramis ABCDEF ad pyramidem GHKLI, quod erat concludendum.

Atque ita in vniuerſum demonſtrata erit propoſitio iſta ſexta.

## COROLLARIVM I.

*Pyramides eiuſdem altitudinis, ſuper æquales baſes multangulas conſtituta, vel ſuper eandem, ſunt inter ſe æquales.*

NAm cùm dentur æquales baſes, vel eadem, illarum pyramidum eiuſdem altitudinis: & per hanc propoſitionem ſint pyramides illæ vt baſes; & baſes ſint æquales ex datis; erunt ipſæ pyramides æquales.

## COROLLARIVM II.

*Pyramides æquales, multangulas habentes baſes æquales, vel eandem; eandem obtinent altitudinem.*

## COROLLARIVM III.

*Pyramides æquales, eandem habentes altitudinem, ſunt ſuper æquales baſes, ſi non habeat communem.*

HÆc duo poſtrema corollaria demonſtrabuntur ſimili artificio, quo innuimus demonſtrari ſecundum coroll.prop.5.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Pyramides quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt vt baſes; eandem habent altitudinem.*

EAdem methodo demonſtrabitur, hoc noſtrum corollarium, quo aliud noſtrum vnicum explicauimus ad propoſ.5.

## PROPOSITIO VII.

Omne priſma triangularem habens baſim, diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe, triangulares habentes baſes.

Fig.172. SVppoſitio. Datum ſit priſma ABCDEF, baſim habens triangularem ABF, oppoſitum huic triangulo planum, erit triangulare DCE, iuxta def.13.lib.11. Dico autem hoc priſma diuidi in tres pyramides æquales inter ſe, quarum baſes erunt triangulares.

Conſtructio. Parallelogrāmi ABCD, diameter AC ducatur, tùm parallelogrammi AFED tranſmittatur diameter DF; tùm parallelogrāmi tertij BCEF, diameter FC immittatur: (hæc enim tria parallelogramma pertinent ad priſma datum, quia tot debent parallelogrammata conſtituere illud, quot ſunt latera in baſi triangulari vna, vti oſtendimus in def.13.lib.11.) Reſultabunt ex ductibus harum diametrorum, & lateribus parallelogrammorum priſmatis, & baſium eius triangularium lateribus diuerſa triangula, quæ cùm ſint plana per 2.prop.lib.11. conſtituent iſtas tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, diuerſæ, conſtituentes ipſum priſma datum, quarumque baſes erunt triangulares, ABC, ADC, EFD. Iam verò probandum eſt, dictas tres pyramides eſſe æquales inter ſe.

Demonſtratio. Quia in parallelogrammo ABCD, ducta eſt diameter AC, reſultabunt per prop.34.li.1. duo triangula ABC, ADC, æqualia, quorum primum ABC eſt baſis pyramidis ABCF, & ſecundum ADC eſt baſis pyramidis ADCF; porrò ſi ducatur intellectu recta linea perpendicularis ex vertice F communi dictis pyramidibus ad planum ABCD, in quo exiſtunt duæ illarum æquales baſes prædictæ ABC, ADC, eandem obtinebunt altitudinem, illæ pyramides: quare per propoſit.5. coroll.1. ipſæ duæ pyramides ABCF, ADCF, erunt æquales inter ſe. Conſideremus autem pyramides ADFC, EFDC, conſtitutas ſuper æquales baſes triangulares ADF, EFD, iuxta propoſit.cit.34.lib.1. eandemque habentes altitudinem, videlicet perpendicularem rectam emiſſam ex vertice C illarum communi ad planum ADEF in quo exiſtunt prædictæ illarum baſes: quia pyramis ADFC, eſt eadem cum pyramide ſuperiùs conſiderata ABCF, quandoquidem eiſdem contineātur planis ADC, ADF, ACF, DCF; & iſta pyramis ADFC æqualem habent altitudinem cum pyramide EFDC, & æqualem baſim ADF, baſi EFD pyramidis EFDC; ipſæ pyramides ADFC, ſeu ADCF, EFDC, erunt æquales, per cit.coroll.1. ad propoſ.5. Tres igitur pyramides ABCF, ADCF, EFDC, datum priſma componentes, erunt æquales inter ſe per 1.axio.lib.1. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM I.

*Qualibet pyramis triangularem habens baſim, tertia pars eſt priſmatis quod eandem cum illa baſim & altitudinem obtinet.*

PRiſma enim triangularem habens baſim, diuiditur per hanc propoſ.7. in tres pyramides æquales, triangulares habentes baſes; ergo ſi priſma concipiatur eandem habens altitudinem cum data pyramide habente baſim triangularem, eandemque baſim cum ipſa; erit tertia pars huius priſmatis, data pyramis.

COROLLARIVM II.

*Priſmata eiuſdem altitudinis, & ſuper æquales baſes conſtituta, vel ſuper eandem baſim, ſunt inter ſe æqualia.*

COROLLARIVM III.

*Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudine.*

COROLLARIVM IV.

*Priſmata æqualia, eiuſdemq; altitudinis, habent baſes æquales, ſi non habuerint eandem.*

HÆc poſtrema corollaria implicitè manifeſta ſunt ex coroll. noſtro ad propoſ. 34. libr. 11. connotando propoſitiones & corollaria ex quibus dependet dictum noſtrum corollarium.

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Omne parallelepipedum ſex planorum diuiditur in ſex pyramides æquales inter ſe, triangulares habentes baſes.*

NAm per prop. 28. libr. 11. tale parallelepipedum ſecatur bifariàm plano per diagonales aduerſorum planorum acto; ſectioque eſt in duo priſmata æqualia & ſimilia, triangulares habentia baſes per coroll. 2. noſtrum ad illam propoſ. cit. quare cùm per hanc propoſ. 7. quodlibet horum æqualium priſmatum ſecetur in tres æquales pyramides, triangulares habentes baſes, & æqualium tertiæ partes ſint æquales, per 7. ax. libr. 1. quælibet trium pyramidum dimidij parallelepipedi, id eſt priſmatis vnius, erit æqualis cuilibet pyramidi dimidij alterius eiuſdem parallelepipedi nimirùm priſmatis alterius: & ſic totum parallelepipedum ſecabitur in ſex pyramides æquales, triangulares habentes baſes, quod erat explicandum.

COROLLARIVM NOSTRVM

II.

*Pyramis quadrilateram baſim parallelogrammam habens; eſt tertia pars parallelepipedi, eandem altitudinem & baſim habentis parallelogrammam cum dicta pyramide.*

COncepto enim parallelepipedo iſto, & ductis diametris tam in baſi communi ipſi & pyramidi datæ, quàm in aduerſo huic baſi plano; ſecabitur per præced. coroll. in ſex pyramides æquales, triangulares habentes baſes; harum verò duæ ſuper æquales baſes triangulares totius baſeos, cùm eiuſdem ſint altitudinis, erunt æquales per 1. corollar. ad prop. 5. compoſitum ergo ex his duabus, videlicet pyramis data, erit tertia pars dicti parallelepipedi.

COROLLARIVM NOSTRVM

III.

*Quælibet pyramis eſt tertia pars priſmatis eandem altitudinem & baſim cum illa habentis.*

SI enim baſis communis eſt triangularis, vel quadrangularis; id conſtat ex coroll. 1. anteriorum, & ex coroll. noſtro ſecundo. Quod ſi baſis communis ſit plurium laterum quàm quatuor, diuidenda erit iſta baſis in diuerſa triangula; ſupra quæ concipienda erunt diuerſa priſmata eiuſdem altitudinis cum dato, æqualia ipſi dato ſi ſumantur omnia ſimul particularia, etiamſi ſint diuerſa ratione inclinata reſpectu dati, idque per coroll. noſtrum ad prop. 34. lib. 11. quod ſi ſint eodem modo inclinata, aſſumptum verum erit per axio. 19. lib. 1. Iam verò ex omnibus angulis horum triangularium baſium ad verticem pyramidis datæ ſi concipiantur ductæ rectæ lineæ, tùm ad aliquod punctum triangularis plani oppoſiti baſi propriæ triangulari; diuerſæ reſultabunt pyramides eiuſdem altitudinis vt priſmata particularia & totale: & quælibet ex iſtis in proprio priſmate triangularis baſeos incluſa erit tertia pars ipſius priſmatis per corollar. 1. anteriorum: quod ſi quælibet ex iſtis comparetur cùm alia pyramide terminata in vertice datæ pyramidis, quia iſtæ duæ triangulares habent baſim eandem, & eandem altitudinem, ipſæ duæ erunt æquales inter ſe per prop. 5. componetur ergo totalis pyramis data ex his particularibus; quæ cùm ſint ſingulæ tertia pars ſui priſmatis, & omnia iſta priſmata ſimul ſumpta adæquen-

adæquentur priſmati totali dato; omnes ſimul ſumptæ videlicet totalis data pyramis, erunt. tertia pars totalis priſmatis.

## PROPOSITIO VIII.

### Similes pyramides, quæ triangulares habent baſes; ſunt in triplicata ratione laterum homologorum.

Fig. 273 SVppoſitio. Sint ſimiles pyramides ABCD, EFGH, triangulares habentes baſes ABC; EFG: Dico illas pyramides eſſe in triplicata ratione homologorum laterum BC, FG, exempli gratia.

Conſtructio. concipiantur priſmata ABCDIK, EFGHML, quarum ſunt tertiæ partes propriæ iuxta prop. præced. 7. & eius corollar. 1. ita vt ſint ſimilia iſta priſmata.

Demonſtratio. Per corollar. noſtrum ad prop. 34. lib. 11. iſta duo priſmata ſunt in triplicata ratione laterum homologorum BC, FG. & datæ pyramides ABCD, EFGH, ſunt ſubtriplæ partes illorum; ergo per prop. 15. libr. 5. erunt illæ pyramides etiam in triplicata ratione laterum homologorum BC, FG.

### COROLLARIVM.

*Similes pyramides, quarum baſes plura latera quàm tria continent, proportionem triplicatam laterum homologorum obtinent.*

NAm in triangula ſimilia baſes earum reſoluentur, eductis ex angulis æqualibus rectis ad alios angulos, per prop. 20. libr. 6. quia ipſæ baſes ſunt ſimiles; eruntque tot numero in vna baſi, quot in alia. Tùm oſtendentur ſimilia relatiuè triangularia plana terminantia iſtas pyramides particulares triangulares habentes baſes prædictas; igitur ſimiles erunt dictæ pyramides reſpectiuè particulares iuxta 9. def. lib. 11. Quare cùm oſtēſæ ſint ſimiles illę particulares pyramides reſpectiuè, habētes triangulares baſes; & binæ ſimiles per hanc prop. 8. duplicatā habeant rationem laterum homologorū: omnes ſimul particulares componentes vnam è datis, ad omnes alias ſimul componentes aliam è datis, ſint per prop. 12. li. 5. vt vna ſimilis ad aliam; & hæc ad aliam ſit in duplicata ratione laterum homologorum ex prop. iſta 8. omnes ſimul ad omnes ſimul prædictas, hoc eſt pyramis totalis data ad pyramidem datam totalem, cùm ſint ſimiles, duplicatam habebit rationem laterum homologorum.

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Pyramides ſimiles, quarum baſes ſunt plurium laterum quàm trium; diuiduntur in ſimiles reſpectiuè pyramides, triangulares habentes baſes, æqualiq; multitudine, & homologa totis.*

HOc manifeſtum eſt ex diſcurſu demonſtrationis præcedentis corollarij.

### COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Priſmata ſimilia habebunt tripicatam proportionem laterum homologorum.*

EXplicatio huius corollararij dependet ex corollario noſtro ad prop. 34. lib. 11. tùm ex demonſtrationis diſcurſu facto in explicatione propoſit. 33. libr. citat. 11.

### COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Priſmata baſes oppoſitas habentia plurium laterum quàm trium, & ſimilia; diuiduntur in priſmata ſimilia triangulares habentia baſes, & multitudine æqualia, & homologa totis. vt patet ex diſcurſu corollarij de pyramidibus.*

## PROPOSITIO IX.

### Æqualium pyramidum, & triangulares baſes habentium; reciprocantur baſes, & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habentium reciprocantur baſes & altitudines: illæ ſunt æquales.

SVppoſitio. Sint æquales pyramides ABCD, EFGH, & primæ ſit baſis ABC triangularis, & ſecundæ baſis ſit etiam triangularis EFG. Dico ita eſſe baſim ABC ad baſim EFG, vt altitudo pyramidis EFGH ad altitudinem pyramidis ABCD; ſic enim re- Fig. 274.

ciprocantur baſes & altitudines datarum pyramidum. Præterea earundem pyramidum reciprocantur baſes prædictæ triangulares: Dico ipſas pyramides eſſe æquales.

Conſtructio. Concipiantur parallelepipeda duo, quorum vnius ſit pyramis ABCD, pars ſexta; & alterius ſit etiam ſexta pars, pyramis EFGH; eandemque habeant altitudinem iſta parallelepipeda quàm propriæ pyramides prædictæ: ſitque baſis IC parallelogrammum parallelepipedi ſextupli pyramidis ABCD; & parallelogrammum KG ſit baſis parallelepipedi ſextupli pyramidis EFGH.

Demonſtratio. Per prop. 34. lib. 11. Eſt vt baſis IC parallelepipedi ſui prædicti ad baſim KG parallelepipedi ſui proprij prædicti, ita altitudo huius parallelepipedi ad altitudinem illius parallelepipedi, hoc eſt baſes & altitudines horum parallelepipedorũ reciprocantur: ſed per prop. 15. lib. 5. eſt vt baſis IC ad baſim KG, ita triangulum ABC ad triangulum EFG; cùm ſint dicta triangula ſemiſſes illorum parallelogrammorum iuxta prop. 34. lib. 1. ergo per prop. 11. lib. 5. erit vt baſis triangularis ABC, ad baſim triangularem EFG, ita altitudo parallelepipedi ſextupli pyramidis EFGH, ad altitudinem parallelepipedi ſextupli pyramidis ABCD; quandoquidem ex conſtructione eandem habent altitudinem pyramides cum ſuis parallelepipedis ſextuplis: Ergo cùm ſit eadem altitudo prædicta, erit vt baſis triangularis ABC ad baſim triangulárem EFG, ita altitudo pyramidis EFGH ad altitudinem pyramidis ABCD; hoc eſt triangulares baſes pyramidum, & earũ altitudines reciprocabuntur: quod erat primò propoſitũ. Quod ad ſecundam partem attinet ſic demõſtratur; Cùm ſit per prop. 15. li. 5. vt parallelogrãmum IC ad parallelogrammum KG, ita ABC triãgulum ad triangulum EFG, vti oſtendimus; ſintque parallelepipedorum & pyramidum ſuarum prædictarum ſubſextuplarum altitudines eædem; erunt reciprocæ baſes prædictæ parallepipedorum reciprocę cum altitudinibus illorum: quare per prop. 34. lib. 11. erunt ipſa parallelepipeda prædicta æqualia; ideoque per 7. axio. lib. 1. ſubſextupla illorum, videlicet prædictæ pyramides ABCD, EFGH, æquales inter ſe, baſes triangulares obtinentes, & reciprocas cum earum altitudinibus.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I.

*Æqualium pyramidum etiam plurium linearum rectarum quàm trium baſes habentium; reciprocantur baſes atque altitudines.*

*Et ſi earum pyramidum baſes prædicta & altitudines reciprocantur; æquales ſunt.*

SI duæ pyramides habeant ſingulæ ſuas baſes multilateras ſupra triangulum: ex illis ſeorſim ſumptis per propoſit. 45. libr. 1. fiat parallelogrammum; & ſingula iſta parallelogramma reducantur ad triangula, hac ratione, ductis diametris iſtorum parallelogrammorum, vna in vno, altera inalio, per propoſit. 34. libr. 1. triangulum vnum reſultans in vno parallelogrammo, erit ſemiſſis illius, & ſic etiam triangulum reſultans in alio parallelogrammo erit ſemiſſis illius: Iam vero productis baſibus horum triangulorum, & per 3. prop. libr. 1. ſumendo ab terminorum illarum alterutro rectam lineam æqualem ipſis; rectaque linea ducendo ab verticibus illorum triangulorum, ad alterum extremum rectarum linearum, reſultabunt triangula dupla priorum iuxta prop. 1. lib. 6. quare per ax. 6. lib. 1. erunt iſta triangula dupla priorum, & parallelogrammata prædicta dupla eorundem æqualia inter ſe. Si ergo concipiamus pyramides ſactas ſupra iſtas baſes triangulares eiuſdemque altitudinis cum prioribus datis; certum eſt per prop. 6. quod quælibet iſtarum pyramidum triangulares baſes habentium ſit ad ſuam propriam pyramidem datam baſeos plurium laterum quàm trium, vt ſunt ipſæ baſes inter ſe; nam ſunt eiuſdem altitudinis iſtæ pyramides: porrò baſes ipſæ ſunt æquales factæ ac demonſtratæ, ergo pyramis triangularis baſis facta erit æqualis ſuæ pyramidi baſim habẽti plurium laterum quàm trium. Ergo per 1. axio. libr. 1. pyramides iſtæ duæ factæ erunt æquales inter ſe, ſicut ipſæ datæ pyramides quibus ſunt oſtenſæ æquales: Inſuper per hanc prop. reciprocabuntur baſes & altitudines iſtarum pyramidum factarũ; ergò cùm habeant altitudinem eandem cum iſtis factis datæ pyramides, & ęquales baſes baſibus, reciprocabuntur etiam illarum baſes & altitudines, quod erat concludendum. Quod ſi vna tantum ex pyramidibus datis baſim habeat triangularem, altera vero habeat plurium laterum quàm trium, facilior erit ex eiſdem principiis demonſtratio huius primæ partis corollarij huius.

huius. Ad cuius ſecundam partem explicandam deſcendimus, ſuppoſita eadem conſtructione prædicta. Datarum pyramidum reciprocantur baſes & altitudines ex datis; factarum pyramidum ſũt eædem altitudines quæ datarum, & inſuper æquales baſes habent reſpectiuè ex conſtructione; ergo etiam reciprocabũtur baſes & altitudines factarum pyramidum per 7. propoſ. libr. 5. factæ autem pyramides obtinent. baſes triangulares, ergo per 2. partem huius propoſit. 9. ipſæ æquales erunt; ergo per 1. axio. libr. 1. etiam datæ pyramides his factis æqualibus oſtenſæ æquales in conſtructione, æquales erunt inter ſe. quod erat concludendum.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I.

*Æqualium priſmatum, parallelepipedorumq́, quaſcumque baſes habentium rectilineas, reciprocantur baſes, & altitudines.*

*Et quorum priſmatum, parallelepipedorumq́, quaſcumque baſes habentium rectilineas, reciprocantur baſes & altitudines; ipſa ſunt æqualia.*

SI enim priſmata vel parallelepipeda ſint æqualia, eorum pyramides eandem cum ipſis altitudinem habentes, & ſupra eaſdem baſes, æquales erunt, cùm ſint eorum tertiæ partes, per corollar. 1. prop. 7. libr. huius, vel corollar. noſtra 2. & 3. ad eandem propoſ. 7. citat. quare vti oſtendimus in hac prop. 9. vel noſtro corollar. 1. reciprocabuntur baſes & altitudines iſtorum priſmatum vel parallelepipedorum.

Quod ſi illorum baſes & altitudines reciprocentur, etiam pyramidum propriarum baſes & altitudines reciprocabuntur: quare vti in hac prop. vel eius coroll. noſtro oſtendimus, iſtæ pyramides æquales erunt, earumque priſmata vel parallepipeda vtpotè tripla earum.

## PROPOSITIO X.

### Omnis conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem.

Fig. 275. SVppoſitio. Habeant eandem baſim circularem ABCD, Conus & Cylindrus, tùm eandem altitudinem: Dico Conum huiuſmodi eſſe tertiam partem illius Cylindri.

Conſtructio. Per prop. 7. libr. 4. circumſcribatur quadrato FGHI, circulus ABCD; & per prop. 6. libr. eiuſdem 4. in ipſomet circulo ABCD, inſcribatur quadratũ ABCD: Tùm per propoſit. 30. libr. 3. diuiſis arcubus BA, AD, DC, CB, circuli bifariàm in K, L, M, N; ductiſque chordis ad extrema dictorum arcuum, reſultabunt triangula AKB, BLC, CMD, DNA: & ſic iterum ſi ſubdiuidantur reſultantes arcus, & ducantur chordæ huiuſmodi, reſultabunt alia triangula; & ſic deinceps in infinitum ſi opus ſit. Denique ex medio puncto alicuius arcus ex prædictis, exempli gratia ex puncto K medio arcus AKB, ducatur iuxta corollar. noſtrum ad propoſ. 17. libr. 3. recta linea OKP, circulum tangens ABCD, quę per corollar. noſtrum 5. ad prop. 2. libr. huius, erit parallela chordæ AB, prædicti arcus AKB; quare ſi ex punctis extremis A & B, chordæ AB, educantur ad ipſam perpẽdiculares rectæ AP, BO, ſecabunt productæ rectam OKP, in O, & K, eruntque per 28. libr. 1. parallelæ inter ſe; vnde reſultabit cum aliis duabus parallelis OKP, BA, rectis, parallelogrammum OA. Iam vero concipiatur ſupra quadratum FH parallelepipedum eandem altitudinem habens cum cylindro baſeos ABCD; tùm aliud parallelepipedum eandem altitudinem obtinens cum cylindro prædicto: Quandoquidem per coroll. noſtrum 3. ad propoſit. 2. quadratum FH duplum eſt quadrati ABCD, & per propoſ. 32. libr. 11. parallelepipeda eandem altitudinem habentia, inter ſe ſunt vt baſes, erit parallelepipedum baſeos FH, duplum parallelepipedi baſeos quadratæ ABCD. Eſt autem parallelepipedum baſeos FH, maius cylindro baſeos circularis ABCD, vt totum parte; & cylindrus ille maior eſt parallelepipedo baſeos quadratæ ABCD, vt totum parte; ergo parallelepipedum baſeos quadratæ ABCD, maius erit quàm dimidium cylindri illius; nam oſtenſum eſt eſſe dimidium parallelepipedi, maioris cylindro illo. Porrò parallelepipedum baſeos quadratæ ABCD, abſcindet de cylindro baſeos circularis ABCD, partem æqualem ſibi, relinquendo ſegmenta baſium AKB, BLC, CMD, DNA, mixtilinearum ex arcubus & eorum chordis rectis, quæ ſegmenta eãdem habebunt altitudinem cum cylindro illo & parallelepipedo interiore. Prætereà quia parallelogrammum OA maius eſt ſegmento AKB circuli ABCD, vt totum parte, & triangulum rectilineum AKB, eſt ſemiſſis illius parallelogrammi per prop. 41. libr. 1. Si concipiamus priſmata, vnum ſupra baſem OA parallelogrammam, aliud ſupra baſem triangularem AKB, eandem ha-

bentia altitudinem communem prędictis parallelepipedis & cylindro, erit per cit. prop. 32. lib. 11. & coroll. noſtrum ad prop. 34. lib. eiuſdem priſma ſupra baſim AKB ſubduplum priſmatis baſeos OA: Et quia priſma baſeos OA maius eſt ſegmento cylindri habente baſem AKB, mixtilineam vt totum parte; erit priſma baſeos triangularis AKB, maius dimidio ſegmenti cylindri quod habet baſim ſegmentum AKB mixtilineum. Similiter ſi concipiamus ſupra baſes quadratas FH, ABCD, pyramides eiuſdem altitudinis cum cono & cylindro prædictis, ſingulæ erũt per coroll. noſtrum 2. ad prop. 7. ſuorum parallelepipedorum prædictorum ſupra eaſdem baſes proprias quadratas, tertiæ partes; quare cùm parallelepipedum baſeos quadratæ AB CD ſit oſtenſum dimidium parallelepipedi baſeos FH; erit per prop. 15. libr. 5. pyramis baſeos quadratæ ABCD, dimidia pars pyramidis baſeos quadratæ FH: At pyramis baſeos quadratæ FH continet conum baſeos circularis ABCD; ergo dimidium illius pyramidis videlicet pyramis baſeos quadratæ ABCD, erit maior dimidio illius coni. Quod ſi concipiantur etiam pyramides ſupra baſes, OA parallelogrammam, AKB triangularem eiuſdem altitudinis, & coni cylindrique datorum; quia oſtendimus parallelogrammum OA eſſe duplum trianguli AKB, erit per corollar. noſtrum vltimum ad prop. 7. erit pyramis baſeos parallelogrammæ OA dupla pyramidis baſeos triangularis AKB: Et quia pyramis baſeos parallelogrammæ OA eſt maior coni ſegmento eandem altitudinem prædictam habentis cum dicta pyramide & reliquis aliis, ſub baſi mixtilinea AKB, ipſum enim continet; ideo pyramis baſeos triangularis AKB, maior erit dimidio ſegmenti dicti coni ſub baſi mixtilinea AKB: Igitur etiam pyramides aliæ huiuſmodi ſupra baſes triangulares alias BLC, CMD, DNA, æquales oſtenſas inter ſe & dictæ AKB, erunt ſingulæ ſuorum propriórum ſegmentorum coni prædicti ſub baſibus mixtilineis prædictis, dimidio maiores, & ſic de aliis pyramidibus ſupra alias minores baſes triãgulares ęquales: Quare ſimul omnes huiuſmodi pyramides baſium triangularium, erunt maiores dimidio omnium illorum ſegmẽtorum coni prædictorum. Ex quo fit vt ſi ex cono baſeos ABCD circularis auferatur pyramis baſeos ABCD, auferetur ab eo plus quàm dimidium: & ſi ab reliquis omnibus ſegmentis illius coni baſes habentibus mixtilineas AKB, BLC, CMD, DNA, demantur pyramides baſium triangularium AKB, BLC, CMD, DNA, tolletur ab eis ſimul ſumptis, plus quàm dimidium. His poſitis ſequitur propoſitionis huius

Demonſtratio. Si conus baſeos circularis ABCD, non ſit tertia pars cylindri baſeos eiuſdem circularis ABCD, eandem altitudinem habentes: non erit cylindrus iſte illius coni triplus, ſed vel maior vel minor triplo coni. Eſto primùm maior cylindrus triplo coni, ſolido aliquo E: Quia verò ab cylindro baſeos ABCD, auferendo parallelepipedum baſeos quadratæ ABCD, auſertur pluſquàm dimidium; & ab reliquis ſegmentis AKB, BLC, CMD, DNA, prædicti cylindri, demendo priſmata baſium triãgularium AKB, BLC, CMD, DNA, auſertur plus quàm dimidium; & ſic deinceps auferendo ex reliquis ſegmentis prædicti cylindri, huiuſmodi priſmata, demitur pluſquam dimidium; tandem iuxta prop. 1. libr. 10. relinquetur quædam ſegmenta dicti cylindri, quæ ſimul erunt minora ſolido E. Atque vt procedamus in demonſtratione, ſupponamus dicta ſegmenta ſimul minora ſolido E, eſſe ſegmenta baſium mixtilinearum AKB, BLC, CMD, DNA: Verùm quoniam datur cylindrus ille æqualis triplo coni illius & ſolido E ſimul ſumptorum; ſi ex cylindro auferantur dicta ſegmenta reliqua minora ſolido E; & ex triplo coni, & ſolido E, tollatur ipſum E ſolidum; relinquetur triplum coni illius minus quàm priſma baſeos multangulæ AKBLCMDN, eandem obtinens altitudinem quàm conus ille & cylindrus; quare conus ille erit minor quàm tertia pars priſmatis, per prop. 15. lib. 5. ſed per noſtrum corollar. 3. propoſ. 7. pyramis baſeos dictæ multangulæ AKBL &c. eſt tertia pars priſmatis baſeos eiuſdem dictæ multangulæ AKBL, &c. quãdoquidem eandem obtinent altitudinẽ; ergo conus ille minor erit quã pyramis prædicta: ſed conus baſeos circularis ABCD datus, eſt maior prędicta pyramide quia ipsã continet; ergo eadem magnitudo nimirum conus ille erit & minor & maior pyramide prædicta. Hæc pugnantia indicant poſitionem cylindri maioris triplo coni eandem baſim & altitudinẽ habentium, eſſe falſam. Eſto ſecundò ſi fieri poſſit, cylindrus minor triplo coni: ſequitur neceſſariò vt conus ſit maior tertia parte cylindri, ſolido aliquo, puta E; ita vt ſolidum E, & tertia pars cylindri ſimul ſumpta, ſint æqualia cono: Quod ſi à cono baſeos circularis ABCD, auſeratur pyramis baſeos quadratæ ABCD, demetur ab eo pluſquam dimidiũ vti oſtenſum; & ab reliquis ſegmentis huius coni, baſes habentibus mixtilineas AKB, BLC, &c. demamus pyramides baſium triangularium AKB, BLC, &c. tollemus ab eis ſimul ſumptis

ptis plus quam dimidium vti demonſtratum eſt: & ſic deinceps ſi ab reliquis minoribus ſegmentis dicti coni ſimul ſumptis, adimamus pyramides baſium triangularium ſimul ſumptas tot numero, quot ſunt baſes ſegmentorum illorum coni, detrahemus ab illis plus quam dimidium; & ſic deinceps in infinitum; tandem per prop. 1. libr. 10. relinquetur aliquid minus E ſolido, de cono baſeos circularis ABCD. Sunt verò exempli gratia ſegmenta coni baſium mixtilinearum AKB, BLC, &c. ſimul ſumpta minora quàm E ſolidum: Quia autem Conus prædictus ponitur æqualis cylindri prædicti tertiæ parti & ſolido E ſimul ſumptis; ſi ex cono demantur ſegmenta eius illa relicta minora quam E ſolidum; & ex cylindri prædicti tertia parte & ſolido E ſimul ſumptis, tollatur ſolidum E: remanebit pyramis baſem habens multilateram AKBLCMDN maior quàm tertia pars cylindri reliqua; vnde fiet vt triplum illius pyramidis reliquæ ſit maius cylindro: eſt autem priſma baſeos AKBLCMDN prædictæ eandem habens altitudinem cum dicta pyramide eiuſdem baſeos triplum illius pyramidis per corollar. noſtrum vltimum ad prop. 7. ergo hoc priſma erit maius cylindro illo baſem circularem habente ABCD prædicto, pars maior toto, quod abſurdum eſt. Igitur poſitio vnde procedit, falſa erit; videlicet quod cylindrus datus ſit minor triplo coni dati. Cùm ergo demonſtrauerimus cylindrum non poſſe eſſe maiorem triplo coni eandem baſim & altitudinem cum ipſo habentis; nec poſſe minorem triplo eiuſdem coni: ſequitur vt cylindrus ille triplus ſit coni; vel quod idem eſt conus ſit tertia pars cylindri eandem cum ipſo baſim & altitudinem habentis. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I.

*Parallelepipedum eiuſdem altitudinis cum cylindro, baſem habens quadratum circumſcriptum circulari baſi cylindri; maius eſt cylindro.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I I.

*Parallelepipedum habens baſim quadratum inſcriptum in circulari baſi cylindri, & eiuſdem altitudinis cum illo; ſubduplum eſſe parallelepipedi baſim habentis quadratum circumſcriptum eidem circulari baſi prædicti cylindri, æqualemque altitudinem habentis cum dicto cylindro.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I I I.

*Parallelepipedum æqualem altitudinem habens cum cylindro, & baſim quadratum inſcriptum in circulari baſi dicti cylindri; maius eſt quàm dimidium cylindri prædicti.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

### I V.

*Priſma vel parallelepipedum æqualis altitudinis cum cylindro, baſimq; habens parallelogrammum cuius vnum latus ſit chorda arcus circularis baſeos dicti cylindri, aliud vero latus huic parallelum tangens circularem ipſam baſim cylindri; maius eſt ſegmento cylindri baſim habente mixtilineam ex chorda prædicta, & eius arcu.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

### V.

*Priſma æqualis altitudinis cum cylindro dato, & parallelepipedo ſeu priſmate coroll. præcedentis 4. baſim habens triangulum cuius vnum latus ſit chorda arcus baſeos circularis cylindri dicti, reliqua verò duo latera æqualia procedentia ex medio puncto arcus prædicti; maius eſt dimidio ſegmenti cylindri, de quo egimus in corollar. præcedente 4.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

### V I.

*Pyramis eiuſdem altitudinis cum cono, baſem habens quadratum circumſcriptum baſi circulari coni; maior eſt cono ipſo.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

### V I I.

*Pyramis eiuſdem altitudinis cum cono, baſemq; habens quadratum inſcriptum in circulari baſi coni; eſt ſubdupla pyramidis eiuſdem altitudinis cum cono prædicto, baſem habentis quadratum circa circularem baſim coni ipſius deſcriptum.*



Digitized by Google

## COROLLARIVM NOSTRVM
### VIII.

*Pyramis eiuſdem altitudinis cum cono, baſim habens quadratum inſcriptum in circulari baſi ipſius coni; eſt maior dimidio coni prædicti.*

## COROLLARIVM NOSTRVM
### IX.

*Pyramis eiuſdem altitudinis cum cono, baſim habens parallelogrammum corollarij noſtri 4. maior eſt ſegmento coni prædicti baſim habente ſegmentum circularis baſeos coni dicti quod eſt baſis ſegmenti cylindri de quo egimus in coroll. cit. 4. noſtro.*

## COROLLARIVM NOSTRVM
### X.

*Pyramis eiuſdem altitudinis cum cono, habens baſim triangularem de qua egimus in coroll. noſtro 5. ſuperiore; maior eſt dimidio ſegmenti coni dicti, baſim habente ſegmentum circularis baſeos coni dicti, de quo egimus in ſuperiore 9. coroll. noſtro.*

## COROLLARIVM NOSTRVM
### XI.

*Pyramis eiuſdem altitudinis cum cono, habens baſim rectilineam incluſam in baſi circulari Coni ipſius prædicti, minor eſt ipſo cono.*

## PROPOSITIO XI.

### Sub eadem altitudine exiſtentes coni, & cylindri; inter ſe ſunt vt baſes.

Fig. 276 SVppoſitio. Datus ſint conus baſeos circularis ABCD, & alius conus baſeos circularis EFGH, eandemque altitudinem ſeu æquales habeant altitudines KI, ML: Dico eſſe conum ABCDK ad conum EFGHM, vt eſt baſis ABCD ad baſim EFGH. Simili modo ſi duo cylindri dati ſint, prædictos circulos habentes pro baſibus, eaſdemque altitudines KI, ML: Dico ita eſſe cylindrum baſeos ABCD, ad cylindrum baſeos EFGH, vt eſt baſis ABCD ad baſim EFGH.

Conſtructio. Per prop. 6. lib. 4. In circulo EFGH, inſcribatur quadratum eiſdem literis deſignatum: & per prop. 30. lib. 3. arcus quatuor EF, FG, GH, HE, bifariàm diuidantur in P, Q, R, S, & chordæ eis ſubtendantur: tùm concipiatur circulus ABCD, eodem modo diuiſus; hoc eſt quadratum ABCD in eo inſcriptum, tum octogonum ATBVCXDY: & ducantur diametri BID, FLH, circulorum prædictorum.

Demonſtratio. Si non ſit vt baſis circularis ABCD ad baſim circularem EFGH, ita conus ABCDK ſupra baſim primam ad conum EFGHM ſupra baſim ſecundam: ſit ſi fieri poſſit vt baſis prima ad baſim ſecũdam, ita conus ABCDK ad aliquod ſolidum N; iuxta Authorum axioma lib. 5. quod vel erit minus cono EFGHM, vel maius illo, vel æquale illi. Eſto primùm minus ſolidum ipſum N quàm conus EFGHM & quidem ſolido alio aliquo, v. g. O; ita vt conus EFGHM ſit æqualis ſolidis duobus N, O, ſimul ſumptis. Iam verò ſi ex cono EFGM detrahatur pyramis ſupra baſim quadratam EFGH, eiuſdemque altitudinis cum cono illo, tolletur pluſquàm dimidium illius, per coroll. noſtrum 8. propoſ. præced. 10. & ſi ab reliquis ſegmentis coni prædicti tollantur pyramides ſupra triangulares baſes EPF, FQG, GRS, HSE, eiuſdem altitudinis cum dicto cono, auferetur ex illis plus, quàm dimidium, per coroll. noſtrum 10. cit. prop. præced. & ſic deinceps ſi ſemper adimantur huiuſmodi pyramides de reliquis ſegmentis coni, detrahetur plus quàm dimidium: quare per 1. propoſ. lib. 10. tandem relinquentur ſegmenta coni prædicti ſimul minora ſolido O: ſintque exempli gratia huiuſmodi ſegmenta coni, ſupra octo baſeos eius ſegmẽta EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE, conſtituta, ſimul minora ſolido O: Cùm ergo conus EFGHM, ponatur æqualis ſolidis N, O, ſimul ſumptis; ſi ex cono illo auferamus dicta ſegmenta reliqua minora ſimul quàm O; & ab ſolidis N, O, detrahamus ſolidum O; remanebit de cono illo, pyramis baſem habens rectilineã EPFQGRHSEM eiuſdemque altitudinis cum cono dicto, maior quàm ſolidum N: Et quia per coroll. prop. 2. vt eſt circulus ABCD ad circulum EFGH, ita eſt multilaterum ATBVCXDY, ad multilaterum EPFQ &c. prædictum; & quia vt eſt circulus ABCD ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK ad ſolidum N; & quia eſt per 6. prop. vt multilaterum ad multilaterum baſes pyramidum ambo multilatera, ita eſt pyramis ad pyramidem eiuſdem altitudinis cum conis; erit per prop. 11. libr. 5. vt pyramis ATBVCXDYK ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK ad ſolidum N; Verum pyramis ATBV, &c. eſt minor

minor cono ABCDK, vt pars toto, ergo pyramis EPFQGRHSM, erit minor quàm ſolidum N, iuxta prop. 14. libr. 5. contra conceſſa: pugnantia iſta indicant poſitionem eſſe falſam è qua proueniunt, videlicet ſolidum N eſſe minus cono EFGHM: non igitur erit N ſolidum minus dicto cono: Quare maneat conum non poſſe eſſe ad ſolidum minus altero cono eiuſdem altitudinis cum dicto cono, vt eſt baſis illius coni ad baſim huius coni. Sed eſto ſolidum N ſit maius cono ipſo EFGHM; verũ quia ponitur vt circulus ABCD ad circulum EFGM, ita conus ABCDK ad ſolidum N; erit iuxta corollar. prop. 4. lib. 5. conuertendo vt circulus EFGH ad circulum ABCD, ita ſolidum N ad conum ABCDK: Ponatur autẽ per ax. l. 5. vt ſolidum N ad conum ABCDK, ita conus EFGHM ad ſolidum O: ſed quia ponitur N ſolidum maius cono EFGHM: erit per prop. 14. lib. 5. conus ABCDK maior ſolido O: quare per propoſ. 11. libr. 5. erit vt circulus EFGH ad circulum ABCD, ita conus EFGHM ad ſolidum O, quod minus eſt cono ABCDK; ſed hoc abſurdum eſt: nam probauimus non poſſe eſſe conum ad ſolidum minus alio cono, vt eſt baſis illius coni ad baſim huius coni: Non ergo maius eſt ſolidum N, cono EFGHM. Cùm ergo demonſtrauerimus ſolidum N aſſumptum non poſſe maius eſſe nec minus cono EFGHM; igitur erit illi cono æquale. Quia verò ponitur vt baſis ABCD ad baſim EFGH, ita conus ABCDK ad ſolidum N; & per prop. 7. libr. 5. eſt vt conus ABCDK ad ſolidum N, ita conus idem ABCDK ad conum EFGHM; erit per propoſ. 11. libr. 5. vt baſis ABCD ad baſim EFGH, ita conus ABCDK ad conum EFGHM, quod erat in conis demonſtrandum.

Et quia per propoſ. 15. libr. 5. eſt vt conus ABCDK ad conum EFGHM, ita cylindrus ſupra angularem baſim ABCD, ad cylindrum ſupra baſim circularem EFGH, poſita eadem altitudine conorum & cylindrorum; nam per propoſ. præcedentem cylindri prædicti ſunt tripli ſuorum propriorum conorum prædictorum; erit per prop. 11. libr. 5. etiam vt baſis ABCD ad baſim EFGH, ita cylindrus ABCDK ad cylindrũ EFGHM. quod erat in cylindris demonſtrandum.

## COROLLARIVM I.

*Coni ſupra eandem baſim conſtituti, vel æquales baſes; ſunt inter ſe æquales, ſi habuerint eandem altitudinem.*

## COROLLARIVM II.

*Cylindri ſupra eandem baſim conſtituti, vel æquales baſes; ſunt inter ſe æquales, ſi habuerint eandem altitudinem.*

CVm enim dentur baſes æquales, vel eadem conorum vel cylindrorum, eademque altitudo; fit vt per hanc propoſitionem, ipſi coni, vel cylindri ſint æquales inter ſe.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Si coni vel cylindri inter ſe ſint, vt baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.*

SI enim non habeant eãdem altitudinem: concipiatur de illo qui eſt altior detractus conus vel cylindrus, eiuſdem altitudinis cum humiliore; tunc detractus continebitur in alteriore vti pars in toto, ideoque minor erit illo: ſed quia humilior & detractus æqualem habent altitudinem, æqualeſque baſes; ipſi per corollarium alterum ad hanc propoſitionem erunt æquales inter ſe: Verum datur ſublimior æqualis humiliori, ergo per primum axio. libr. 1. detractus etiam erit æqualis ſublimiori, pars toti, quod eſt abſurdum: ergo poſitio contradicens aſſertioni huius corollarij falſa erit & corollarium demonſtratum erit.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Æquales coni, vel cylindri, & in eadem vel æquali altitudine; ſuper æquales baſes ſunt, ſi non habuerint eandem.*

ESto inæquales baſes habeant, ſi fieri poſſit: Et concipiatur de maiore baſe, detracta alia æqualis minori, quæ continebitur in ipſa maiore; tum ſupra hanc detractam baſim, conus vel cylindrus eiuſdem altitudinis cum aliis datis: Hic conus vel cylindrus continebitur in eo qui habet maiorem baſim, ideoq; illo minor erit. Verũ quia datus conus vel cylindrus minoris baſeos, eſt æqualis alteri habenti maiorẽ baſim, ex ſuppoſitione; & per alterum corollarium huius propoſitionis, detractus & datus minoris baſeos, ſunt æquales; erunt per 1. axio. lib. 1. detractus & datus ſub maiore baſe æquales inter ſe, contra conceſſa. ergo poſitio contradicens aſſertioni huius corollarij falſa erit, & corollariũ verum.

COROL-

COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Non poteſt eſſe conus ad ſolidum cono altero minus, (ſi habeant coni huiuſmodi eandem vel æqualem altitudinem) vt eſt baſis illius coni ad baſim huius coni.*

COROLLARIVM NOSTRVM IV.

*Si duo cylindri habeant eandem altitudinem; non poteſt eſſe cylindrus conus ad ſolidum minus cylindro altero è datis, vt eſt baſis illius cylindri ad baſim huius cylindri.*

Tertium quidem corollarium oſtenſum eſt in prima poſitione demonſtrationis huius propoſ.11. Quartum verò ſic explicabitur. Quia loco pyramidum aſſumptarum in demonſtratione, aſſumi poſſunt priſmata earundem altitudinum cum cylindris datis; & eodem artificio concludi in cylindri, quo concluſum eſt in conis corollarium tertium; ideo iudicauimus addendum iſtud corollarium quartum pro cylindris.

## PROPOSITIO XII.

Similes coni, & cylindri; in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

Fig.176. Svppoſitio. Sint ſimiles coni vel cylindri, ABCD, EFGH: quorum primus baſim obtineat circularem ABCD, diametri BD, & axem IK; ſecundus verò baſim circularem habeat diametri FH, & axem LM. Dico conum ad conum, vel cylindrum ad cylindrum habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum.

Hanc propoſitionem primo loco demonſtrabimus in conis, deinde in cylindris, ſed conſule figuras ſuperioris propoſitionis.

Si non ita ſit, vti proponitur. Habeat ſi fieri poſſit Conus ABCDK ad ſolidum N, proportionem triplicatam diametri BD ad diametrum FH, iuxta axioma libr.5. Iam verò iſtud ſolidum N, vel erit minus, vel maius, vel æquale, reſpectu coni EFGHM. Sitque primum minus cono illo, eorūmque differentia ſit ſolidum O. Conſtructio autem ſit quæ in ſuperiore propoſitione, & vt ibi fecimus, concludatur demonſtratiuè Pyramis EPPQGRHSM maior ſolido N: Tùm ducantur rectæ KB, KT, MF, MP, vt reſultent duo plana triāgularia BKT, FMP, in pyramidibus EPFQ, &c. ATBVCXDYK, primum in ſecunda, ſecūdum in prima: denique tranſmittantur rectæ, TI, KI, PL, ML. Iam verò quia ABCDK, EFGHM, (deinceps quando, hos conos nominabimus, & pyramides conſtitutas ſupra baſes multilateras ATBVCX DYK, EPFQGQRHSM, eiuſdem altitudinis cum conis prædictis, vt breuius eos indicemus, deſignabimus illos extremis literis AK, EM.) ſimiles ſunt ex datis, erit per def. 24. libr. 11. vt diameter BD ad diametrum EH, ita axis IK ad axim LM; & per prop.15. lib.5. quia eſt vt diameter BD ad diametrum EH, ita eſt ſemidiameter BI ad ſemidiametrum FL; ergo per prop.11. libr. eiuſdem 5. erit vt ſemidiameter BI ad ſemidiametrum FL, ita axis IK ad axim LM; & iuxta prop. 16.lib.5. permutando, erit vt BI ad IK, ita FL ad LM: Quod ſi ponantur duo coni dati ſimiles AK, EM, recti, eorum axes IK, LM, erunt ad angulos rectos planis circularium ſuarum baſium propriis, iuxta def. 19. 18. & 3. libr. 11. ideoque per def. 3. ipſius libri 11. anguli BIK, FLM, erunt recti; vnde reſultabunt triangula BIK, FLM, æquiangula, per prop.6.lib.6. (Quod ſi coni dati non ſint recti, ſed ſcaleni, ita vt eorum axes ſint Ik, Lm, inclinati ad plana baſium propriarum: intelligantur ſuper eaſdem baſes circulares horum conorum ſcalenorum, alij duo coni recti earundem cum ipſis ſcalenis altitudinum, habentes axes proprios IK, LM, rectos ad baſes proprias; & concipiatur per rectas IK, Ik, angulum in I facientes, planum incedens; tùm per rectas LM, Lm, angulum in L cōſtituentes, planum aliud; ſingulaque iſta plana ſecantia ſuas proprias baſes circulares planas, in rectis BID, FLH, iuxta 2. & 3. prop. libr. 11. quæ erunt diametri illarum baſium, nam axes prædicti tranſeunt per centra propria baſium circularium conorum: Et quoniam axes IK, LM, conorum rectorum ſunt recti ad baſes proprias circulares, erunt per prop. 18. lib. 11. plana prædicta ſecantia ipſas baſes, perpendicularia ipſis baſibus circularibus: quare in his planis perpēdicularibus ſi ab k, & m, punctis illorum, concipiantur demiſſæ perpendiculares rectæ lineæ ad baſes circulares ſubiectas, cadent in communes ſectiones BID, FLH, per propoſit. 38. libr. 11. Porrò anguli DIk, HLm, erunt anguli inclinationum, iuxta defin. 6. libr. 11. quique erunt æquales inter ſe, quia dantur ſimiles coni: ſed & anguli DIK, HLM, ſunt recti, per def. 3. libr. citat.

ideoque

ideoque æquales inter ſe, ergo per axio. 3. lib. 1. anguli reliqui kIK, mML, æquales erunt, ſi ab æqualibus DIK, HLM, adimantur æquales prædicti DIk, HLm. Et quia coni AK, Ak, ponuntur eiuſdem altitudinis, erit recta Kk, per axium vertices ducta parallela ipſi BD, per prop. 33. lib. 1. quia recta KI orthogonia eſt plano baſeos in puncto I, & recta ex k demiſſa perpendicularis eſt ad idem planum baſeos, vnde per propoſ. 6. lib. 11. erunt parallelæ inter ſe; & quia ipſæ ſunt æquales ex datis ob æqualitatem altitudinis ipſorum conorum: inde vero fiet vt per prop. 29. lib. 1. ſit angulus kKI, rectus. Simili diſcurſu concludemus angulum mML eſſe rectum. Cum ergo in triangulis duobus KIk, MLm, oſtenderimus angulos in K & M eſſe æquales, tum angulos in I & L, eſſe æquales, erunt reliqui eorum anguli in k & m, æquales per 3. coroll. noſtrum ad prop. 32. libr. 1. quare à primo ad vltimũ triangula kIK, mLM; erunt æquiangula.) Redeamus ad conos rectos primo loco aſſumptos. Cùm ſint oſtenſa triangula BIK, FLM, erit per 4. prop. lib. 6. vt KB ad BI, ita MF ad FL; vt autem BI ad BT, ita FL ad FP, ob ſimilia triãgula BIT, FLP, nam anguli in I & L, ſunt æquales quia inſiſtunt ſimilibus BT, FP, arcubus, videlicet octauis partibus circumferentiarum; & reliqui anguli ad baſes BT, FP, cùm ſint æquales per 5. prop. lib. 1. in ſingulis dictis triangulis, & ſimul ſumpti ambo in vno ſint æquales duobus ſimul ſumptis in alio, per 3. ax. lib. 1. ſi ex tribus ſimul ſumptis tam in vno quàm in alio, æqualibus duobus rectis per 32. propoſ. lib. 1. demantur anguli æquales oſtenſi in centris ſeu verticibus I, & L; quare ſinguli ad baſim BT, erunt ſingulis ad baſim FP æquales, per 7. ax. lib. 1. Ergo per prop. 22. lib. 5. ex æqualitate erit vt KB ad BT, ita FL ad FP. Præterea cùm latera KI, IB, triãguli KIB, æqualia ſint lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli contenti ab ipſis lateribus deſignatis æquales, vtpote recti per defin. 3. lib. 11. erunt neceſſariò per 4. prop. lib. 1. baſes eorum KB, KT æquales: Simiſibus mediis oſtendentur baſes MF, MP, æquales, in triangulis MLF, MLP: & propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt in proportione æqualitatis. Quia autem per 7. prop. libr. 5. vt KB ad BT, ita KT ad BT; itemque vt MF ad FP, ita MP ad FP; erat verò vt KB ad BT, ita MF ad FP; erit etiam per 11. prop. libr. 5. vt KT ad BT, ita MP ad FP; etiamque erit conuertendo iuxta propoſ. 4. libr. 5. corollar. vt BT ad KT, ita FP ad MP: igitur cùm ſit vt KT ad KB, ita PN ad MF; & vt KB ad BT, ita MF ad FP; & vt BT ad TK, ita FP ad PM, vti in præcedentibus demonſtratum eſt; triangula BKT, FMP, obtinebunt latera proportionalia; quare per propoſ. 6. libr. 6. erunt æquiangula; ideoque ſimilia per 1. def. libr. eiuſdem 6. Ex eiſdem principiis probatur reliqua omnia triangula circumambientia pyramides AK, EM, eſſe inter ſe ſimilia: quæ cùm ſint multitudine æqualia, ob baſes æquilateras multitudine; pyramides ipſæ AK, EM, erunt per defin. 9. libr. 11. ſimiles: Vnde per propoſ. 8. coroll. ipſæ dictæ pyramides habent rationem triplicatam laterum homologorum BT, FP. Sed eſt vt BT ad FP, ita BI ad FL, propterea quod ſimilia ſint triangula BIT, FLP; & vt BI ad FL, ita BD ad FH, per propoſ. 15. libr. 5. ergo per prop. 11. libr. 5. erit pyramis AK ad pyramidem EM, in triplicata ratione diametrorum BD, FH; Poſita verò eſt proportio coni AK ad N, in proportione triplicata diametrorum BD, FH; ergo per propoſ. 11. libr. 5. erit vt pyramis AK ad pyramidem EM, ita conus AK ad ſolidum N: ſed pyramis AK eſt minor cono AK per corollar. noſtrum 11. propoſ. 10. ergo per propoſ. 14. libr. 5. erit pyramis EM, minor ſolido N: ſed oſtenſa fuerat in principio huius demonſtrationis eadem pyramis EM maior ſolido N: ergo pugnantia iſta procedentia ex poſitione quod ſolidum N ſit minus cono EM, indicabunt ipſam poſitionem eſſe falſam & non poſſe adſtrui neque aſſumi. Maneat itaque non poſſe Conum ad ſolidum alio Cono minorem habere triplicatam proportionem eius quam habent diametri baſium illorum. Sed eſto ipſum ſolidum N maius cono EM. Ponitur tamen conus AK ad ſolidum N, habere triplicatam rationem diametri BD ad diametrum FH; habeat verò pyramis AK ad pyramidẽ EM, triplicatam rationem diametri BD ad diametrum FH, vti paulò ante oſtendimus: erit vt conus AK ad ſolidum N, ita pyramis AK ad pyramidem EM, per propoſ. 11. libr. 5. & inuertendo iuxta coroll. propoſ. 4: libr. 5. erit vt ſolidum N ad conum AK, ita EM ad pyramidem AK: ſed per coroll. propoſ. 8. pyramis EM ad pyramidem AK, proportionem habet triplicatam laterum homologorum PF ad TB; atque vt in fine demonſtrationis ſuperioris poſitionis oſtendimus, erit inuertendo eadem pyramis EM, ad pyramidem AK, proportionem habens triplicatam, diametri FH ad diametrum BD: Ponatur verò vt ſolidum N ad conum AK, ita conus EM ad ſolidum O; habebit per propoſ. 11. libr. 5. conus EM ad ſolidum O, proportionem triplicatam diametri FH ad diametrum BD: Verùm quia N ſolidum datur maius cono EM,

EM, erit per propoſ. 14. libr. 5. conus AK maior ſolido O: ex quo fit vt contra conceſſum in fine demonſtrationis primæ poſitionis, conus EM ad ſolidum O minorem probatum cono AK, proportionem habeat triplicatam diametri FH ad diametrum BD, quod abſurdum cùm ſit, non poterit ergo adſtrui ſolidum N maius cono EM; Cùm igitur non poſſit etiam poni idem ſolidum N minus cono EM; relinquitur idem ſolidum N eſſe æquale cono EM. Quare per propoſ. 7. libr. 5. conus AK ad ſolidum N, & ad conum EM, eandem habebit rationem: ſed ponitur conus AK ad ſolidum N, habere rationem triplicatam diametri BD ad diametrum FH; ergo iuxta propoſ. 11. libr. 5. erit conus rectus AK ad conum rectum EM, in proportione triplicata diametri BD ad diametrum FH. Sed age abſoluamus demonſtrationem in conis ſcalenis inchoatam in prima poſitione. Quandoquidem oſtenſa ſunt æquiangula triangula KIk, MLm, erit per prop. 4. libr. 6. vt kI ad IK, ita mL ad LM; & iuxta propoſ. 16. lib. eiuſdem, permutando vt kI ad mL, ita IK ad LM: & quia dantur ſimiles coni iſti ſcaleni, erit vt axis kI ad mL axem, ita BD diameter ad FH diametrum: ergo erit per propoſ. 11. libr. 5. vt IK axis coni recti ad LM axem coni recti, vt diameter BD ad diametrum FH; vnde iſti coni recti erunt ſimiles per def. 24. libr. 11. vnde vti probauimus iſti coni recti, habebunt rationem triplicatam diametrorum. Quia verò conus rectus AK, & conus ſcalenus Ak, eiuſdem ſunt altitudinis, eandemque baſim obtinent, ipſi erunt æquales inter ſe per coroll. propoſ. 11. antecedentis; ſimili modo erunt æquales coni EM, Em, ille rectus, hic ſcalenus: ergo illi ad iſtos eandem habebunt rationem per coroll. noſtrum ad propoſ. 7. libr. 5. Rectus autem conus AK ad rectum EM, oſtenſus eſt habere rationem triplicatam diametri BD ad diametrum FH; ergo etiam conus Ak ſcalenus ad conum Em ſcalenum, rationem habebit triplicatam diametri BD ad diametrum FH. quod erat in conis omnibus concludendum ſimilibus.

Demonſtratio in cylindris omnibus ſimilibus ſiue rectis ſiue ſcalenis. Quia coni ſunt tertiæ partes cylindrorum eiuſdem altitudinis & baſis cum illis, vel æqualis altitudinis & baſis cum eiſdem, iuxta propoſ. 10. eandem obtinebunt rationem cylindri iſti quàm coni, quorum ſunt tripli, iuxta propoſ. 15. libr. 5. Sed oſtendimus conos ſimiles eſſe in triplicata ratione diametrorum quæ in baſibus ſuis; ergo etiam cylindri ſimiles erunt in triplicata ratione diametrorum quæ in baſibus. Abundè igitur demonſtrata eſt propoſitio iſta duodecima.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Non poteſt conus ad ſolidum cono altero minorem, habere rationem triplicatam diametri ſuæ baſeos ad diametrum baſeos alterius dicti coni conſequentis. Idem de cylindro.*

HOc elicitum eſt ex demonſtratione primæ poſitionis ad demonſtrationem huius propoſit. 12.

## PROPOSITIO XIII.

Si cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

SVppoſitio. Cylindrus ABCD, ſectus ſit plano GH parallelo aduerſis planis circularibus baſibus eius AB, CD, & ſecante axem EF, cylindri ipſius in puncto I; reſultabunt duo cylindri ABHG, GHCD: Dico ita eſſe cylindrum ABHG ad cylindrum CDHG, vt eſt axis EI, ad axem FI. Fig. 177.

Conſtructio. Concipiatur parallelogrammum EC productum vltra E & C, quod generauit cylindrum datum iuxta def. 21. li. 11. & in latere EF immobili, & producto etiam, ſumantur rectæ EK, KL, æquales ipſi EI, vel aliæ deinceps æquales quocumque numero, per prop. 3. libr. 1. Tùm aliæ quocumque numero, vt FM, MN, NO, æquales ipſi IF: Deinde per prop. 31. lib. 1. in plano EC producto, ducatur ex punctis I, K, L, M, N, O, rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ cuilibet rectarum EB, FC, parallelarū ob naturam parallelogrammi EC; erunt ipſæ omnes parallelæ inter ſe, per prop. 30. li. 1. & per 34. prop. eiuſdem lib. & axioma 1. erunt æquales inter ſe, & prædictis EB, FG: quæ quidē omnes ad reuolutionem totalis parallelogrammi LX, continentis parallalogrāmum EC, deſcribent circulos GH, PR, QS, TA, ZV, YX, æquales quidem, & aliis duobus AB, CD, ob æqualitatem rectarum prędictarum reuolutarū LQ, KP, EB, IH, FC, MT, NV, OX, & parallelos inter ſe: quod ſi non eſſent paralleli illi circuli, plana eorum tandem cōcurrerent, & ſic ad concurſum duæ rectæ lineæ ab centris circulorum ipſorū concurrerent, hoc eſt duæ rectæ parallelæ illos circulos efficiētes in ſuis reuolutionibus, non eſſent parallelę cōtra ſuppoſitionem, vel probationē præcedentem: quare ſi planum

planum concipiatur applicatum horum circulorum plano, ſecabit cylindrum, & circuli reſultabunt ex hac ſectione, paralleli baſibus cylindri ſecti, quorum circumferentiæ circulorum ſuſtentabuntur in ſuperficie cylindri rotunda, vti docuimus in defin. 21. libr. 11. Quare cylindri reſultabũt SP, RB, AH, GC, DT, AV, ZX, per defin. 21. cit. libr. 11. componentes totum cylindrum SX, rectum quidem vt partiales prædictos, ſi reuolutum parallelogrammum illum efficiens fuerit rectangulum; obtuſum verò vt & alios, ſi obtuſangulum: Quare ſi recti fuerint omnes cylindri dati & effecti, altitudo eorum ſumetur penes axes illorum perpendiculares baſibus. Itaque ſi recti fuerint, cylindri iſti SP, RB, AH, æqualem altitudinem habebunt, ob æquales axes EI, EK, KL, ſumptos, perpendiculares baſibus æqualibus oſtenſis propriis; quare æquales erunt prædicti cylindri SP, RB, AH, per corollar. propoſ. 11. Simili modo cylindri XZ, Va, TD, CG, æquales erunt, quia obtinent baſes æquales oſtenſas, & ſunt eiuſdem altitudinis, ob æquales axes ON, NM, MF, FI, perpendiculares baſibus prædictis. Erit verò tàm multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quàm multiplex eſt axis IL, axeos IE: Tùm tàm multiplex erit cylindrus XG cylindri CG, quàm multiplex eſt axis IO, axeos IF. Quod ſi cylindrus datus, & reſultantes ſint ſcaleni, ob parallelogrammum eos efficiens obtuſangulum; nihilominus ſi ex L centro baſeos primi SP cylindri ex prædictis demittatur per prop. 11. libr. 11. recta linea Lb perpendicularis ad baſim RP oppoſitam & parallelam eiuſdem cylindri; & concipiatur planum anguli OLb iuxta propoſ. 2. libr. 11. ſecans baſim planam circularem RP, ſecabit per propoſ. 3. lib. 11. in recta aliqua KP, vel æquiualente illi, exeunte ab centro eius K, quia recta OL per illud tranſit; ſed & ſecabit alias omnes baſes circulares aliorum cylindrorum prædictorum per centra illorum ob eandem rationem, in rectis EB, IH, &c. prædictis, vel æquiualentibus illis, exeuntibus ab centris circulorũ illorum: quare cùm planum illud ſecans hos circulos parallelos ſit rectum circulo vni RP, per prop. 18. libr. 11. erit etiam rectum circulis reliquis. quare cùm hoc planum ſecans incedere per centra circulorum illorum omnium probatum ſit, rectæ omnes perpendiculares ab centris prædictis in hoc plano ductæ, cadet per prop. 38. libr. 11. in ſectiones communes lineares huius plani ſecantis & circulorum ſectorum, veluti ſunt rectæ Lb, Kc, Ed, Ie, Ff, Mg, Nh; vnde reſultabunt per 3. def. li. 11. anguli omnes recti in b, c, d, e, f, g, h; ideoque triangula rectangula KbL, EcK, IdE, FeI, MfI, NgM, OhN: & quia planum prædictum ſecans, ſecat parallelos circulos, ſectiones lineares LQ, KP, &c. prædictæ erũt parallelæ per prop. 16. libr. 11. Rurſus quia in has rectas incidit recta OL, erunt anguli omnes interni externis æquales per prop. 29. lib. 1. veluti iſti duo LKP, KEB, & ſic de reliquis: In triangulis igitur rectangulis prædictis duo erunt anguli ęquales, recti nimirum, & nunc oſtenſi æquales, vnde per coroll. noſtrum 3. ad prop. 32. lib. 1. reliqui etiam erunt æquales: quare triãgula illa rectangula erunt æquiangula. Sed in primis tribus KbL, EcK, IdE, latera LK, KE, EI, ſunt facta æqualia, ergo cùm referantur iuxta 4. propoſ. libr. 6. ad perpendiculares Lb, Kc, Ed, rectas prędictas, ipſemet perpendiculares erunt æquales, per prop. 12. & 11. libr. 5. vnde cylindri SP, RB, AH, erunt æqualis altitudinis; & quia obtinent baſes æquales, ipſi erunt æquales per 2. coroll. prop. 11. Eadem methodo probabuntur æquales rectæ perpendiculares If, Ff, Mg, Nh, & cylindri GC, DT, AV, ZX, eiuſdem altitudinis, & æquales inter ſe: Vnde fiet vt in cylindris prædictis ſcalenis, cylindrus SH tàm multiplex ſit cylindri ſcaleni AH, quàm multiplex eſt IL axis illius, axeos IE, huius: & cylindrus ſcalenus GX tàm multiplex cylindri GC ſcaleni, quàm multiplex eſt IO axis illius, axeos IF, huius.

Demonſtratio. Iam vero demonſtremus propoſitum, videlicet ita eſſe cylindrum AH ad cylindrum GC, ſicut eſt axis EI, ad axim IF. ſiue totus conus AC ſectus fuerit rectus, ſiue ſcalenus. Quia primæ quantitatis AH cylindricæ, & tertiæ EI axeos illius cylindri, ſumpta ſunt æquemultiplicia propria SH, IL, iuxta quęcumque multiplicationem; tum ſecundæ quantitatis GC cylindricæ, & quartæ IF axeos huius, ſumpta ſunt etiam æquemultiplicia propria GX, IO, ſecũdum quamcumque multiplicationem: certum eſt quod ſi cylindrus SH. rectus fingendo penetrationem corporum includatur in cylindro recto GX; vel cylindrus ſcalenus SH, in cylindro ſcaleno GX, inclinationes eorum ad eandem partem accomodantes; cùm ſint baſes eorum circuli æquales, congruent inter ſe, & ſuperficies eorum rotundæ factæ ab reuolutione eiuſdem parallelogrammi vna intra aliam includetur: Iam vero ſic ſe mutuo penetrantes huiuſmodi cylindri, & cõparati vti diximus; vel cylindrus SH æqualis erit cylindro GX; vel maior ſeu altior; vel minor ſeu depreſſior: Si æqualis, cùm habeant ambo æquales baſes, imò eandem cùm congruant, axes eorum LI, IO, æquales etiam erunt, ſi enim eſſent in-

 æquales,

æquales, congruentibus baſibus eſſent etiam inæquales ipſi cylindri contra ſuppoſitionem: ſi maior ſit cylindrus SH, cylindro GX, vel altior; altior etiam erit & maior axis LI, quàm axis IO: ſi minor ſeu depreſſior ſit cylindrus SH, cylindro GX; minor etiam erit vel depreſſior erit axis LI, quàm axis IO. Quare cùm æquemultiplicia primæ & tertiæ quantitatum ſimul æqualia ſint, vel maiora, vel minora, reſpectu æquemultiplicium ſecundæ & quartæ quantitatum propoſitarum: erit per 6.def.lib.5. Cylindrus AH ad cylindrum GC, vt axis EI illius ad axim IF huius. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM NOSTRVM.

*Cylindro plano parallelo baſibus eius ſecto, reſultat ex ſectione iſta, circulus cuius circumferentia eſt in ſuperſicie cylindri rotunda.*

## PROPOSITIO XIV.

### Super æqualibus baſibus exiſtentes coni & cylindri; inter ſe ſunt vt altitudines.

Fig.278. SVppoſitio. Coni duo ABE, CDF, vel duo cylindri ABGH, CDIK, ſuper æqualibus baſibus AB, CD, ſint conſtituti: Dico eſſe conum ABE ad conum CDF; vel cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK; vt eſt altitndo antecedentis ad altitudinem conſequentis.

Conſtructio. Si altitudines conorum, vel cylindrorum ſint æquales, nulla opus erit conſtructione: nam per coroll.1.ad prop.11. ipſi erunt æquales coni data; & per coroll.2. eiuſdem propoſ. cylindri dati erunt æquales: ſed & dantur baſes eorum æquales: ergo tàm coni dati erũt inter ſe vt æquales altitudines; quàm cylindri dati erunt inter ſe vt altitudines eorũ æquales. Quod ſi altitudines eorum ſint inæquales: Producto autem axe LE cylindri recti ſurſum vel deorſum, in exemplo produximus ſurſum, ſumatur per 3.prop.lib.1.recta EN æqualis ipſi MF axi cylindri depreſſioris recti; & producto BG, rectãguli parallelogrammi LG, efficientis cylindrum ABGH, ſurſum; ex puncto N, ducatur recta NP parallela rectæ EG, per prop.31.lib.1.ſecans in P, totam BG productã, illa recta NP parallela etiam erit rectæ LB per 30.propoſ. li.ciuſdem 1. vnde reſultabit parallelogrammum EP, & LP; quare ſi concipiatur reuolui parallelogrammum LP circa immobile latus NEL, deſcribet iuxta 21.def.li.11.cylindros HP, & AP, quorum baſes circulares erũt parallelæ, ex dictis in illa def.cit. eruntq; cylindri HP, CI, eiuſdẽ altitudinis propter æquales perpendiculares NE, FM, æquales; tùm erunt ſuper baſes æquales HG, CD, nam CD ponitur æqualis ipſi AB, & huic eſt æqualis HG, vnde per 1.ax.li.1.erunt HG, CD, ęquales: quare per coroll.1. prop.11.erũt æquales cylindri HP, CI, vel vt demonſtrauimus in principio huius conſtructionis: quare concipi poterit cylindrus totalis AP, ſectus plano parallelo baſibus in HG. Quod ſi cylindri dati ſint ſcaleni vt AX altior, & CR depreſſior; ex centro E baſis ſuperioris cylindri ducatur per 31.prop.li.1.recta EH parallela rectæ LB ſemidiametro baſis inferioris AB, & ex puncto L centrobaſis huius inferioris excitetur recta LE ad angulos rectos ipſi AB, per prop. 11.li.1.occurrens in E ipſi EH; tùm demittatur per prop.12.lib.ciuſdẽ 1.ex E centro baſis VX, recta linea perpendicularis EY, ad rectam AB productam, erunt rectę EL, EY, parallelæ per prop.28.li.1.& parallelogrãmum reſultabit LX: quod ſi ex puncto B, alia recta BG excitetur ad angulos rectos ipſi LB, occurrens in G ipſi EH, reſultabit rectangulum LG, ex cuius reuolutione fiet cylindrus rectus AG: eruntque altitudines cylindrorum AG, AX, ęquales, nam LE, EY, ſunt per prop. 34.li.1.æquales: Eodem modo erunt altitudines cylindrorum CEI, CR, æquales, ſi vti diximus fiat cylindrus rectus CE, æqualis altitudinis cum cylindro ſcaleno dato CR ſuper eadem baſi CD: Iam verò producto ex altitudine CD cylindri altioris ſcaleni, recta CF æqualis altitudini ST, cylindri depreſſioris ſcaleni; & plano perpẽdiculari rectę CD, in puncto eius F, cõcipiatur ſectus cylindrus totus AB ſcalenus, ſectio reſultabit VX circulus in cylindro AB, per coroll. noſtrum ad prop. præced. nam per prop.14.lib.11.planum hoc ſecans & baſis AB cylindri ſcaleni AB, ſunt parallela; eruntque vti in rectis cylindris probauimus baſes VX, CD, parallelę: Et quia per conſtructionem iſtam altitudines CF, ST, cylindrorum VB, CR, ſunt æquales, & baſes eorum VX, CD, ſunt æquales, erũt ipſi cylindri æquales, per coroll.1.ad prop. 11. & reſultabunt duo triãgula ſimilia LCD, AEY, ob parallelas CD, EY, nã ſunt perpendiculares ipſi AB rectæ productæ, quare per prop.28.lib.1. erunt ipſæ dictæ rectæ parallelæ. Quod ſi dati ſint coni, erunt ex dictis efficiẽdi cylindri ſuper eorum baſibus, & in illorum altitudine.

Demonſtratio in cylindris rectis AG, CI. Per conſtructionem cylindrus AP, ſectus eſt plano parallelo aduerſis eius planis in HG; ergo erit per prop.præced.12. cylindrus AG ad cylindrum HP, vt axis EL ad axim NE,

hoc

hoc eſt vt altitudo EL ad altitudinẽ EN, in huiuſmodi rectis, ex natura altitudinẽ cylindrorum: Et quia oſtenſi ſunt in conſtructione æquales cylindri recti HP, CI; erit per prop. 7. li. 5. cylindrus AC ad cylindrũ CI, vt ad cylindrum HP; ſed oſtendimus eſſe cylindrum AC ad cylindrum HP, vt EL altitudo ad altitudinem EN, ergo per prop. 11. lib. 5. erit cylindrus AG ad cylindrum CI, vt altitudo EL ad altitudinem FM. cùm ſint æquales altitudines EN, FM, per conſtructionem.

Demonſtratio in ſcalenis cylindris AX, CR; Quia ſectus eſt cylindrus ſcalenus totalis AB, in VX circulo, plano parallelo baſibus aduerſis, erit per prop. præced. cylindrus AX ad cylindrum VB, vt axis EL ad axim EC; ſed per prop. 4. lib. 6. vt LE, ad EY, ita EC ad CF, ob parallelas rectas EF, AD; ergo alternando iuxta prop. 16. libr. 5. erit vt LE ad EC, ita EY ad CF, vel ad ST æqualem ipſi CF poſitam, ex prop. 7. libr. 5. Ergo per prop. 11. libr. 5. erit cylindrus AX ad cylindrum VB, ſicut altitudo EY ad altitudinem CF, & aduocando 7. prop. eiuſdem libri 5. erit cylindrus AX ad cylindrum CR, vt altitudo EY ad altitudinem ST.

Demonſtratio in vno cylindro recto AG, & ſcaleno CR. fiat per conſtructionem ſuper eadem baſi CD, ſcaleni trianguli, cylindrus rectus CI, eiuſdem altitudinis cum cylindro ſcaleno CR. Erũt cylindri CR, CI, æquales per corollar. 1. ad prop. 11. quare per 7. prop. lib. 5. erit cylindrus AG ad cylindrum CR, vt ad cylindrum CI: ſed ex demonſtratione in cylindris rectis, eſt cylindrus AG ad cylindrum CI, vt altitudo EL ad altitudinem FM, ergo per 11. prop. libr. 5. erit cylindrus AG ad cylindrum CR, vt altitudo EL ad altitudinem ST.

Demonſtratio vniuerſalis in conis. fiant cylindri eiuſdem altitudinis cum conis datis, ſuper eorum baſibus æqualibus. Quia iſti cylindri erunt tripli ſuorum conorum datorum, iuxta propoſ. 10. & per prop. 15. libr. 5. partes habent eandem rationem cum æquemultiplicibus ſuis: & ex demonſtrationibus cylindrorum in omnibus caſibus, cylindri huiuſmodi ſe habent vt altitudines; coni iſti dati, etiam ſe habebunt vt altitudines eædem cum cylindris.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Cylindri ſeorſim, & coni ſeorſim, proportionem habentes eandem cum altitudinibus; baſes habent æquales.*

Si enim non obtinerent baſes æquales; de maiore detracta vna æqualis ipſi minori, & ſuper hac ædificato cylindro, vel cono, eiuſdem altitudinis cum illo qui habet maiorem baſim: cùm iſte ſactus ſit æqualis dato minori, per corollar. 1. vel 2. prop. 11. eandem habebit rationem cum maiore, vt minor datus, per 7. propoſ. libr. 5. quare totum pars, hoc eſt cylindrus vel conus incluſus ſeu contentus in alio, erunt æquales, per 9. prop. lib. 5. quod abſurdum eſt: baſes ergo non habebunt inæquales, ſed æquales erunt.

## PROPOSITIO XV.

Æqualium conorum, & cylindrorum; reciprocantur baſes & altitudines.

Et quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines; illi ſunt æquales.

Suppoſitio in cylindris AG, DI, æqualibus & primi altitudo ſit CL, ſecundi verò altitudo ſit MF: Dico ita eſſe baſim AB primi ad baſim DE ſecundi, vt eſt altitudo FM ſecundi ad altitudinem CL primi; hoc eſt reciprocari baſes & altitudines illorum. Sint verò horum cylindrorum AG, DI, reciprocæ baſes & altitudines; dico illos cylindros eſſe æquales. *Fig. 179.*

Conſtructio quando altitudines ſunt inæquales. De maiore puta FM detrahatur MN æqualis ipſi minori CL, per prop. 3. libr. 1. & concipiatur ſectus cylindrus DI, plano parallelo baſi eius DE, reſultabit circulus NO in cylindro DI, per coroll. noſtrum ad prop. 12. duoque cylindri facti erunt, DO, OK, eritque circulus NO, æqualis circulorum cuilibet DE, KI, ex natura cylindri.

Demonſtratio in cylindris. Per 7. prop. lib. 5. cylindrus AG ad cylindrum DO, ita ſe habebit vt cylindrus DI ad cylindrum DO; ſed eſt per propoſ. 10. cylindrus AG ad cylindrum DO, vt baſis AB ad baſim DE, propter æquales altitudines CL, MN; ſed etiam eſt cylindrus DI ad cylindrum DO, vt altitudo MF ad altitudinem MN, per prop. 14. præcedent. propter baſim eandem DE: ergo per propoſ. 11. libr. 5. erit vt baſis AB ad baſim DE, ita altitudo FM ad altitudinem MN, vel DE æquales: hoc eſt reciprocæ erunt baſes & altitudines. Sed age probemus ſecundam partem. Datur AB ad DE vt FM ad CL hoc eſt HM ipſi æqualem; eſt autem per 11. prop. vt baſis AB ad baſim DE, ita cylindrus

Digitized by Google

iam diuidatur, & chordæ ſubtendantur duæ; in toto quadrāte BC, erunt chordæ ſubtenſæ numero pares, per 21. prop. libr. 9. quod ſi quadrans alter BA in tot arcus diuidatur, in quot fuit diuiſus alter quadrans BC, ſubtenſiſq́ue his arcubus chordis, erunt numero pares vt in alio, ſummaq́ue tota par erit per citat. propoſit. 21. libr. 1. Denique ſi ſemicircumferentia AQC, in tot arcus diuidatur in quot fuit diuiſa alia ſemicircumferentia ABC, erunt in illa vt in iſta pares numero arcus, & ſumma omnium par, per eandem propoſit. citat. tum etiam ſumma chordarum: Et quia hi omnes arcus ſunt æquales, cùm ſint partes aliquotæ totius circumferentiæ circuli, etiam chordæ illorum omnes erunt æquales per corollar. noſtrum ad propoſit. 29. libr. 3. Dico autem hoc multilaterum inſcriptum in circulo maiore, eſſe illud quod propoſitum fuit.

Demonſtratio. Æquilaterum eſt imprimis vti oſtendimus in conſtructione, & parium numero laterum. Supereſt vt oſtendamus hoc multilaterum nullo modo tangere circulum minorem DE. Quia duæ rectæ GE, KM, ad angulos rectos ſunt ipſi EC, parallelæ erunt inter ſe, per propoſit. 28. libr. 1. ſed GE circulum minorem tangit in vno ſolùm puncto E, ergo alia recta KM, eum circulum non continget, alioquin producta occurreret ipſi GE productæ ſi opus ſit, ergo minus recta CK vnum latus multilateri prædicti circulum ipſum minorem contingere poteſt, cùm longiùs abſit ab illo: Et cùm alia latera huius multilateri ſint ęqualia prædicto CK, æqualiter diſtabunt ab centro F, per propoſit. 14. libr. 3. quæ ſi contingerent circulum minorem DE, non æqualiter diſtarent ab centro F, ſicuti prædictum CK, contra conceſſum: nulla igitur latera multilateri inſcripti prædicti in circulo maiore, minorem contingent. Et ſic probata erit conſtructio & fecerimus imperatum.

### COROLLARIVM.

*Si ab extremitate lateris polygoni ſeu multilateri inſcripti in maiore circulo quod ab diametro egreditur, ad diametrum demittatur recta linea; circulum minorem huius propoſitionis non tanget, totaque extra circulum ipſum erit.*

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*In circulo ſi ab aliquo eius circumferentia puncto, recta linea demittatur ad eius diametrum perpendicularis; & ab alio puncto eiuſdem ſemicircumferentia alia recta linea demittatur perpendicularis ad eandem diametrum circuli prædictam: ſecabit diametrum in puncto ſito inter punctum eius incidentia alterius dicta perpendicularis, & extremum diametri verſus partes puncti ſemicircumferentia ſecundo loco accepti.*

### COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Qualibet recta linea perpendicularis diametro circuli demiſſa ab aliquo circumferentia illius puncto, ſecabit diametrum ipſam intra circulum, non autem in extremu eius punctu, aut extra circulum.*

DVo corollaria præcedentia, iam oſtenſa ſunt in demonſtratione huius propoſitionis. Secūdum vero noſtrum ſic declaratur. Eſto in eadem figura, recta KM, demiſſa perpendicularis ad diametrum AFC circuli, ab puncto K circumferentiæ illius, cadat ſi fieri poſſit in C pūctum extremū diametri AFC, ductâ recta KA, reſultabit triāgulum AKC, cuius angulus AKC rectus erit per prop. 31. lib. 3. ſed & rectus eſt angulus KCA ob perpendicularem ductam ex K in C per aduerſarium, ergo contra prop. 17. lib. 1. in triangulo duo erunt anguli recti. Eſto etiam eadem recta KM, cadat in H vltra circulum ſupra diametrum eius AFCH productam; ducendo rectas KA, KC, reſultabit triangulum AKH, cuius angulus AKH, maior erit recto AKC ex prop. cit. 31. lib. 3. ſed & ex aduerſario rectus eſt angulus AHK, ergo contra cit. prop. 17. lib. 1. in triangulo erunt duo anguli maiores duobus rectis. Abſurda hæc condemnant poſitiones aduerſarij: relinquitur ergo vt recta KM cadat intra circulum, ſecetque in M. diametrum eius AFC, inter extrema ipſius diametri. Fig. 280.

### COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Si ex arcu circuli auferatur dimidium, & ex reliquo arcu etiam dimidium, & ſic deinceps, tandem relinquetur arcus minor arcu dato minori quàm arcus primus datus.*

HOc demonſtrauimus in arcu CK minore quàm arcus CG minor arcu maiore primo dato CBA. Fig. 280

### COROLLARIVM NOSTRVM IV.

*Duabus datis magnitudinibus cōparabilibus inæqualibus; ſi de maiore auferatur dimidiū, & ex reliqua dimidium, & ſic deinceps in infinitum, tandem relinquetur magnitudo minor quā data minor anteà.*

NAm de maiore ſi ſubtrahatur minori æqualis ab vno eius extremo, hæc ſubtracta vel cadit in aliquod dimidium ſubtrahendorum de maiore, vel non. ſi cadit in dimidium, certum eſt huius dimidij dimidium eſſe minus illa minore data. ſi non cadit, erit differentia aliqua inter illam & aliquod dimidium aduerſus extremũ, quare dimidium aliquod horum dimidiorum erit minus illa minore data quantitate.

## PROPOSITIO XVII.

### Duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiore ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

Fig.281. SVppoſitio. Duæ datæ ſint ſphæræ AB CD, EFGH, idem centrum I obtinentes; & oporteat in maiore ABCD, ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ EFGH ſuperficiem.

Conſtructio. Iuxta def. 14. libr. 11. concipiantur duo ſemicirculi ABC, EFG, concentrici in puncto I communi centro, in vno exiſtere plano imaginario ampliſſimo vndequaque, & immobili; tùm ſimul & vnâ moueri hos duos ſemicirculos circa diametrum AIC communem immobilem, ita vt ſemicirculus minor EFG, conſiſtat ſemper etiam in hoc motu in plano ſemicirculari maiore ABC: In hac reuolutione integra horũ ſemicirculorum, generabuntur duæ prædictæ ſphæræ concentricæ; & in huiuſmodi reuolutione planum ſemicirculi maioris ſuſtinẽs planum ſemicirculi minoris, tandem aliquando reperietur in plano prædicti ampliſſimi plani in ſitu contrariò primo vnde incepit ille motus: & ſic reſultabunt duo circuli maior ABCD, minor EFGH, conſtantes ex duobus ſemicirculis prædictis communes diametros habentibus immobiles prædictos: quorũ vnus erit veſtigium relictum in plano illo ampliſſimo vnde incepit motus ſemicirculorum iſtorum, alter vero conſiſtens per imaginationẽ ſemicirculus in parte contraria dicto ſitui, in eodẽ plano ampliſſimo prædicto: Porrò hi duo ſemicirculi maior & minor, ſic concepti, circulos duos efficiẽt concentricos maiorem & minorem, eruntque communes tàm ſphæræ effectæ, quã plano illi ampliſſimo extra ſphæram partim egrediẽte, partim penetrante ſeu diuidente ipſam: vnde fit vt ſphæra ſecta ab plano per centrum, ſectio communis eius & plani ſit circulus habens idem centrum cum ſphæra, quod proponemus in primo corollario noſtro ad iſtam prop. Ducantur autem in his duobus circulis concẽtricis in I, duæ diametri AIC, BID, ſe mutuò ſecantes ad angulos rectos in I, per prop. 11. li. 1. erũt quatuor quadrantes illorum; AB, BC, CD, DA in maiore circulo; & in minore alij quatuor quadrantes EF, FG, GH, HE, per coroll. 2. prop. 33. li. 6. Præterea per prop. præced. 16. in maiore circulo ABCD inſcribatur multilaterum æquilaterum & parium multitudine laterum, non tangens circulum minorẽ EFGH. Verùm vt demonſtratio intenti facilior ſit, ita multilaterum inſcribatur: Ex puncto G excitetur per prop. 11. lib. 1. recta Gγ ad angulos rectos ipſi EIG diametro circuli minoris, quæ Gγ recta circulum ipſum minorem continget in G, iuxta coroll. prop. 16. lib. 3. ſecetq; in γ hæc recta Gγ ſemicircũferentiam ADC circuli maioris: tùm per 1. prop. lib. 4. in hoc ſemicirculo ADC, ex pũcto A applicetur recta Aε æqualis ipſi Gγ. Quod ſi arcui Cγ concipiatur recta ſubtenſa Cγ, reſultabit triangulum CGγ rectangulum, in quo nullus alius angulus erit maior recto CGγ, per propoſ. 17. lib. 1. quare per prop. 19. lib. eiuſdem 1. latus Cγ maius erit latere Gγ; & per 1. axio. libr. 1. eadem recta Cγ maior erit recta Aε æquali ipſi Gγ; Ductis autem Iγ Iε ſemidiametris ſphæræ; quia triãguli γIC duo latera CI, γI, ſunt æqualia duobus lateribus AI, εI, trianguli AIε, & baſis γC maior eſt oſtenſa baſi Aε; erit per prop. 25. li. 1. angulus CIγ maior angulo AIε. Et quia eſt per prop. 33. lib. 6. vt angulus CIγ ad angulum AIε, ita arcus Cγ ad arcum Aε, miorque eſt oſtenſus angulus CIγ, angulo AIε, erit per coroll. noſtrum 2. ad prop. 14. libr. 1. arcus Cγ maior erit arcu Aε. Secetur Cδ æqualis arcui Aε, qui arcus Cδ minor erit arcu Cγ, quia oſtẽſus arcus Cγ maior arcu Aε. Iam verò ſi ex quadrante CD auferatur dimidiũ DL; & ex reliquo CL tollatur dimidiũ LK; & ſic deinceps tandẽ relinquetur arcus minor arcu Cδ ſeu Aε, per prop. præced. coroll. noſtrum 3. Sit autem huiuſmodi arcus CK minor arcu Cδ vel Aε; erit chorda CK minor quàm chorda Aε vel Gγ, ex eiſdem principiis paulo ante allatis. Tunc verò recta CK erit vnum latus multilateri prædicti inſcribendi in circulo maiore AB CD: Cùm enim chorda Cδ arcus Cδ minoris arcu Cγ, non tangat circulum minorem EF GH, vti ex demõſtratione ſuperioris propoſitionis manifeſtũ eſt; multo minus chorda CK arcus minoris arcu Cδ, eũdem circulum continget ex dictis in eadem demonſtratione. Inſuper ducatur recta diameter KIN; & per 12.

propoſ.

propoſ.libr.11. ab centro I erigatur ad plana circulorum ABCD, EFGH, recta linea IO ad angulos rectos,ſeu perpendicularis,occurrens in puncto O, ſuperficiei ſphæræ maioris; hæc recta IO, erit perpendicularis diametris AIC,NIK, per def.3.libr.11. Quod ſi plana applicentur rectis OI,AC; OI,KN; hæc plana erunt recta ſeu perpendicularia circulo ABCD,iuxta prop.18.lib.11. efficientque in ſuperficie ſphæræ communes ſectiones circulares vti initio huius conſtructionis oſtendimus,centrum I cõmune habentes cum ſphæra ABCD; horum vero circulorum ſemicirculi erunt AOC,NOK: Et quia anguli OIC, OIK,oſtenſi ſunt recti, erunt per corollar.2. prop.33.lib.6.quandrantes OC, OK; æqualeſque per 7. ax. libr.1. quia circuli ABCD, AOC, NOK, ſunt æquales, ob diametros ſphæræ maioris æquales quæ ſunt etiam diametri horum circulorum: & propter hanc rationem erunt quadrantes CD, OC, OK, æquales. Si ergo arcus DL in tot partes æquales ſecetur, in quot ſectus eſt arcus CL;& quadrantes OC,OK,in arcus numero & magnitudine æquales diuidantur, arcubus quadrantis CD;erunt per prop.29.lib.3.coroll. noſtrum, chordæ his omnibus æqualibus arcubus ſubtenſæ æquales,videlicet CK, KL, LM, MD; CP, PQ, QR, RO; KS,ST,TV, VO;æquales. Coniunctis autem punctis P,S, Q,T,R,V,per rectas PS,QT,RV; demitantur per prop.11.lib.11.ex punctis P,S,ad planum circuli ABCD, perpendiculares rectæ PX,SY, quæ per prop.38.eiuſdem lib.11.cadent in communes ſectiones AC,NK circuli ABCD,& planorum prædictorum rectorum illi,& per 6.prop. eiuſdem libri 11.erunt inter ſe parallelæ. Et quia triangulorum PCX, SKY, anguli in X, & Y ſunt recti per def.3. lib.11.& anguli per coroll.noſtrũ ad prop.27. li.3.PCX,SKY ſũt æquales,ob æquales peripherias AOP,NOS,quibus inſiſtunt,demptis ab ſemicirculis AOC, NOK, æqualibus, arcubus æqualibus CP, SK; erunt duo anguli PCX,PXC,trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY; & ſunt latera PC,SK,ęqualia;ergo per prop.26.li.1. reliqua latera PX,XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt reſpectiuè. Igitur ſi rectæ PX,SY æquales & parallelæ oſtenſæ,rectis lineis cõnectantur PS,XY; erunt per prop.33. lib.1.æquales & parallelæ,ipſæ rectæ PS,XY. Quod ſi ex ſemidiametris IC,IK,ęqualibus, tollantur æquales rectæ oſtenſæ CX,KY,relinquentur æquales rectæ IX,IY;eruntq́;duo latera IC,IK,diuiſa proportionaliter; quare per 2.prop.li.6. recta linea XY erit parallela ipſi CK; ac proinde erit per cit.prop. vel coroll.4.propoſ.& def.1.lib.6.vt IX ad XC,ita IY ad YK. Et quia oſtenſæ ſunt duę rectæ lineæ PS,KC,parallelæ eidem rectæ YX,erunt per 9.prop.lib.11. parallelæ inter ſe;& rectæ CP,KS,eas nectentes, erunt in eodẽ cum ipſis plano,per 7.prop.lib.cit.11. Totum igitur quadrilaterum CKSP in vno erit plano. Iam verò ex Q,& T,ſi demittãtur ad planum circuli ABCD perpẽdiculares rectæ vti de aliis diximus ex P & S;& cõnectantur rectæ QC, TK; probabimus eodem artificio CK, QT, eſſe parallelas, & rectas ipſas PS, QT eſſe etiam parallelas, quia ſũt eidem CK parallelæ; totumque quadrilaterum PSTQ in vno eſſe plano. Et quia oſtendimus eſſe IK ad KC,vt IY ad YX; & KI maior eſt IY,erit per prop. 14.lib.5.ipſa KC maior quàm YX, & quàm PS oſtenſa æqualis ipſi YX. Eodem artificio oſtendemus in quadrilateris SPQT,TQRV; & ſic in reliquis huiuſmodi incluſis inter duos quadrantes circulorum,verſus O,latera SP,TQ,BV,eſſe parallela,& ipſum SP maius eſſe quàm TQ; & TQ maius eſſe quàm VR. Sed & latera in bis quadrilateris nectẽtia extrema inæqualium dictorũ laterum concurrere vltra minus latus probandum eſt ſic; verbi gratia latera CP,KS, concurrere vltra CP minus latus: ſi non cõcurrant ad neutras partes, parallelæ erunt rectæ lineæ CP, KS, ergo cum parallelis KC,SP,efficient parallelogrammum KP;vnde per prop. 34. lib.1.æquales erunt rectæ KC, SP, contra oſtenſa: igitur concurrẽt rectæ CP,KS;ſed non vltra C & K, v.g. ad punctum ζ,nam in triangulo PζS, haberemus rectum CK parallelam ipſi baſi PS, ideoque per coroll.prop.4. lib.6.diuiſum eſſet dictum triangulum in duo triangula PξS,CξK ſimilia;& per def.1.lib.6.eſſet ζP ad PS, vt ζC ad CK; eſt autem ξP maior quam ξC,ergo per 14.prop. lib.5.maior eſſet PS quàm CK, contra oſtenſum: non igitur concurrent PC, SK vltra K & C; ergo concurrent vltra minus latus SP: Et ſic probauimus etiam quamcumque rectam lineam ductam parallelã ipſi KC, intra quadrilaterum KP,ſemper eſſe minorem lateri KC. Et ſic de aliis huiuſmodi quadrilateris dicendum erit. Ex eiſdem principiis probabitur quadrilaterum QTVR in vno ſuſtentari plano;tùm alia huiuſmodi quadrilatera;Eſt vero triangulum RVO in vno plano per 2.prop.lib.11. Quare ſi eadem conſtructio fiat ſuper reliqua latera KLM,LM,MD,ducẽdo quadrãtes OL,OM, OD, qui probabũtur eſſe quadrantes æquales eodem modo quo probati ſunt quadrantes æquales OC,OK;& alios quadrãtes reliquos; & in alio hemiſpherio etiam, vt tota ſphæra referatur quadrilateris & triangulis, quæ ſi-

milia ſint prædictis inter quadrantes OC, OK, ſuper latus CK conſtructis: inſcriptum erit in maiore ABCD ſphæra polyedrum ſolidum circumſcriptis dictis quadrilateris & triangulis. Hoc vero dico non tangere ſphæram minorem EFGH.

Demonſtratio. Cùm circumferentiæ quadrantes circulorum maioris ſphæræ ABCD ſint in ſuperficie ſphæræ illius maioris, & quadrilaterum CKSP, & ſic de reliquis aliis, tùm triangulū BOR, & ſic de aliis prædictis, angulos ſuos habeat, ſeu terminos linearum plana illa quadrilaterorum & triangulorum prædictorum terminantium in circūferentiis quadrantum illorum minimè contingētium ſphæram minorem interiorē EFGH; (ſi enim contingerent illæ circūferentiæ quadrantum minorem ſphæram, rectæ ſemidiametri ab centro I communi duabus ſphæris, maiori & minori, ad illa puncta contactus eſſent æquales, & ſic contra datum, eſſent æquales illæ ſphæræ:) ipſi anguli quadrilaterorum & triā-gulorum prædictorum, non cōtingent ipſam ſphæram minorem EFGH. Sed neque latera CP, CK, quadrilateri CKSP, ipſam minorem ſphæram cōtingent, alioqui circulum EFGH minoris ſphæræ cōtingerent, contra conſtructionem ex prop. præced. nam ſunt latera polygoni in circulo maiore ABCD inſcripti non contingentis circulum minorem prædictum. Sed neque latus KS, quia eſt latus polygoni inſcripti in maioris ſphæræ circulo, vti latera KC, CP, oſtenſa non tangere ſphæram minorem. Sed neque latus SP ſphæram minorem tāget: nam eſto eam tangat: Tunc applicando planum infinitum plano trianguli IPS, ſecans ſphęras datas cōcentricas per centrum I commune ipſis, reſultabunt circumferentiæ circuli tam in ſuperficie ſphæræ maioris quàm minoris, vti diximus initiò conſtructionis; & recta PS circulum reſulrantem hunc in ſuperficie ſpbæræ minoris continget in puncto vno; quare ab hoc puncto cōtactus ad centrum I ſi ducatur recta linea, erit ad contingentem rectam SP perpendicularis per prop. 18. lib. 3. Vnde per prop. 1. li. 4. ſi in circulo dicto maioris ſphæræ accomodetur recta æqualis ipſi KC maiori probatæ quàm SP; minus diſtabit à centro I, quàm recta SP minor, iuxta prop. 17. lib. 3. quare per def. 4. libr. eiuſdē 3. ad eam cadet minor recta linea perpendicularis ab centro I, quàm ad rectam SP minorem: hæc igitur recta KC ſecabit circulum minoris ſphæræ concentricum ipſi; contra conceſſa: recta igitur linea SP non tanget circulum EFGH, nec ſphæram minorem. Sed neque idem quadrilaterum continget ſphæram minorem in quouis alio puncto ſito intra ipſius areā, v.g. in K: nam per prop. 31. lib. 1. per punctum K ducendo rectam lineam parallelam ipſi KC, probata erit minor quam KC, ex dictis in conſtructione verſus finem; ergo ſi tangat hæc recta ſphæram minorem, multo magis eam tanget ipſa KC maior, ex diſcurſu modò facto, contra conceſſa. Quod verò diximus de quadrilatero KCPS, idem dicēdum erit de aliis prædictis quadrilateris, & triangulis continētibus polyedrum deſcriptum in ſphæra maiore. Ergo cùm demonſtrauerimus nullum punctum laterum quadrilateri KCPS, nec vllum punctū internum eius, contingere ſphæram minorem EFGH; nulla ratione eam continget; neque etiam reliqua alia plana comprehendenria polyedrum propoſitum deſcriptum, contingent ſphæram minorem eandem. Fecimus ergo imperatum.

## COROLLARIVM.

*Si in quauis ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile polyedro ſolido in alia ſphæra deſcripto: polyedrum in illa ſphæra deſcriptum ad polyedrum in hac alia ſphæra deſcriptum, proportionem habebit triplicatam diametri illius ſphæræ ad diametrum huius ſphæræ.*

SI enim ex ſphærarum centris ad omnes angulos baſium polyedrorum illorum rectæ lineæ intelligantur traiectæ, diuidentur polyedra illa in pyramides numero æquales & ſimiles reſpectiuè, quarum homologa ſunt latera ſemidiametri ſphærarum; ſi concipiantur concentricæ illæ ſphæræ, confluent enim illa latera in vnam rectam, à centro communi ad baſium ſimilium angulos: Igitur cum ſingulæ pyramides in vna ſphæra ad ſingulas pyramides in alia ſphæra ſimiles, habeant ex dictis in prop. 8. libri huius, rationem triplicatam laterum homologorum, id eſt ſemidiametrorum ſphærarum: ſintque vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides illæ ad omnes pyramides illas, per propoſ. 12. lib. 5. hoc eſt ſolidum polyedrum ex pyramidibus omnibus vnius ſphæræ compoſitum, ad ſolidū polyedrum ex omnibus pyramidibus alterius ſphæræ coagmētatum: habebit quoq; per prop. 11. li. 5. polyedrū vnius ſphæræ ad polyedrum ſimile alterius ſphæræ, rationem triplicatam ſemidiametrorum ſphærarū ipſarum; & per prop. 15. li. eiuſdem quinti, diametrorum ipſarummet ſphęrarum.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Si ſphæra plano ſecetur per centrum eius acto: ſectio communis erit circulus concentricus ſphæræ, circumferentiam habens in ſuperficie ipſius ſphæræ.*

COROL-

Digitized by Google

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I I.

*Si maior chorda in circulo maiore inſcripta vel ſpara maiore, minorem circulū concentricum illi maiori vel ſpharam minorem concentricam illi minori, non contingat: minor chorda in eodem illo circulo maiore, vel ſphara maiore inſcripta, non continget minorem dictum circulum, vel minorem dictam ſpharam.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I I I.

*Sectiones omnes circulares eiuſdem ſphara per plana incodentia per centrum illius, ſunt circuli aquales inter ſe concentrici ſphara, & inter ſe.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I V.

*Si dua recta linea ſint parallela & inaquales; alia dua recta linea earum extrema ad eaſdem partes connectentes, concurrent producta vltra minorem illam parallelam rectam: & qualibet alia recta intra quadrilaterum iſtud ſeu trapezium, ducta parallela vni datarum parallelarum inaqualium; minor eſt maiore è datis parallelis, maior verò minore ex eiſdem datis parallelis.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

## V.

*Si duo quadrantes circulorum ſphæra tranſeuntium per centrum eius, procedentes ab eodem puncto ſuperficiei eius in aquales arcus diuidantur: recta linea reiungentes arcuum iſtorum aqualium extrema ſunt parallela, initium ducendo ab primis, & ſic deinceps.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

## V I.

*Si plani alicuius nullum punctum ſpharam datam contingat; ipſum planum ſpharam hanc non continget, nec ſecabit.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

## V I I.

*In eodem circulo vel circulis aqualibus; maior chorda, ſubtenditur maiori arcui; & minor chorda minori arcui.*

## PROPOSITIO XVIII.

### Sphæræ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

SVppoſitio. Duæ ſphæræ ABC, DEF, quarum diametri ſint AC, DF; Dico eſſe ſphæram ABC ad ſphæram DEF, in triplicata ratione diametri AC ad diametrum DF. Fig. 282.

Si non ita ſit. Habebit iuxta axioma lib. 5. ſphæra ABC ad aliam ſphæram GHI minorem, vel maiorem KLM, quàm ſphæra DEF, vel æqualem illi, rationem triplicatam diametri AC ad diametrum DF.

Conſtructio. Cōcipiantur ſphæræ inæquales, DEF maior, GHI, minor, concentricæ: & per prop. præcedent. 17. inſcribatur in maiore ſphæra DEF, polyedrum DNEOFPQR, minorem ſphæram GHI minimè contingens: & intelligatur in ſphæra ABC, aliud polyedrum ASBTCVX inſcriptum ſimile prædicto.

Demōſtratio ex poſitione aduerſarij ſphæræ GHI minoris quàm ſphæra DEF. Quia eſt ex poſitione aduerſarij ſphæra ABC ad ſphæram GHI minorem quàm ſphæra DEF, in triplicata ratione diametri AC ad diametrum DF; & per corollar. propoſit. præced. 17. eſt polyedrum ASBTVYX ad polyedrum DNEOFPQR, in triplicata ratione diametri AC ad diametrum DF: erit per propoſit. 11. libr. 5. ſphæra ABC ad ſphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVYX ad polyedrum DNEOFPQR; ſed ſphæra ABC maior eſt polyedro ASBTC, &c. ergo per prop. 14. libr. 5. ſphæra GHI maior erit polyedro DNEOF, &c. contentum maius continente, ſeu pars maior toto, quod abſurdum eſt; ergo poſitio vnde ſequitur falſa erit; videlicet ſphæram GHI eſſe minorem ſphæra DEF. Hinc deducitur ex diſcurſu demonſtrationis, non poſſe ſphæram ad ſphæram alia minorem, habere proportionem triplicatam diametrorum.

Demōſtratio quod ſphæra ABC ad ſphæram KLM maiorem quam ſphæra DEF, non poſſit habere rationem triplicatam diametri AC ad diametrum DF. Eſto ſit ita, ſi fieri poſſit. Ex corollar. prop. præcedent. Polyedrum ASBTC, &c. ad polyedrum DNEOF, &c. habet rationem triplicatam diametri AC ad diametrum DF; ergo per propoſ. 11. libr. 5. erit vt ſphæra ABC ad ſphæram KLM,

KLM, ita polyedrum ASB, &c. ad polyedrum DNE, &c. ergo per corollar.propoſ.4. lib.5.erit vt ſphæra KLM ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNE, &c. ad polyedrum ASB, &c. Sed per citat. corollar. propoſit. præced. Eſt polyedrum DNE,&c. ad polyedrum ASB, &c. in triplicata ratione diametri DF ad diametrum AC;ergo per propoſit. 11. libr. 5. erit ſphæra KLM ad ſphæram ABC, in triplicata ratione diametri DF ad diametrum AC. Ponatur autem iuxta ſenſum axiomatis libr. 5. vt ſphæra KLM ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF ad aliam ſphæram Y; obtinebit ergo ſphæra DEF ad ſphæram Y, rationem triplicatam diametri DF ad diametrum AC, per propoſit.11. lib. 5. Verũ ponitur ab aduerſario ſphæra KLM maior ſphæra DEF, erit ergo per propoſit. 14. libr. 5. ſphæra ABC maior quàm ſphæra Y: Quare ſphæra DEF ad ſphæram Y minorem quàm ſphæra ABC, proportionem ſibi vendicabit triplicatam diametri DF ad diametrum AC, contra conceſſa in primæ poſitionis demonſtratione; videlicet non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, habere proportionem triplicatam diametrorum. Falſa igitur erit hæc ſecunda poſitio. Relinquitur ergo vt ſphæra GHI ſit æqualis ipſi DEF. Igitur cum ponatur ſphæra ABC ad ſphæram GHI, in triplicata ratione diametri AC ad diametrum DF; ſitque per 7. prop. libr. 5. ſphæra ABC ad ſphæram DEF, ſicut ad ſphæram GHI; erit per propoſit. 11. lib. 5. ſphæra ABC ad ſphæram DEF, in triplicata ratione diametri AC ad diametrum DF. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM.

*Sphæra eſt ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum in hac ſimile deſcriptum.*

NAm per corollar. propoſit. præced. eſt polyedrum in vna ſphæra deſcriptum ad polyedrum in alia ſimile deſcriptum, in triplicata ratione diametri ſphæræ illius ad diametrum ſphæræ huius; & per hanc prop. ſphæra ad ſphæram eſt in triplicata ratione diametri ſuæ ad diametrum huius alterius: ergo per prop.11.libr.5.erit ſphæra ad ſphæram, vt polyedrum in illa inſcriptum, ad polyedrum in hac ſimile deſcriptum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Non poteſt vna ſphæra ad ſphæram alia tertia minorem habere proportionem triplicatam diametri ſuæ ad diametrum huius tertia.*

HOc corollarium neceſſariò deductum eſt in demonſtratione primæ poſitionis.

COM-

# COMMENTARIVS IN LIBRVM DECIMVM-TERTIVM ELEMENTORVM GEOMETRICORVM EVCLIDIS

## PROPOSITIO I.

Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius; quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

Fig.283. SVPPOSITIO. Secta ſit recta AB in C, extrema & media ratione, ita vt maius ſegmētum ſit AC, & minus CB: tùm ſecta ſit per medium in R: Dico quod quadratum ex recta AC, AR, tanquam vna, ſit quintuplum quadrati rectæ AR: ſed quod idem eſt, maius ſegmentum AC aſſumens dimidiam AR, totius AB, quintuplum poſſit eius, quod ab dimidia AR deſcribitur quadrati.

Conſtructio. Producta recta BA vltra A, ſumatur per 3. prop. libr.1. recta AD æqualis ipſi AR: & per prop. 46. libr. 1. ſuper recta DC fiat quadratum CE, & ſuper recta AB, aliud quadratum AM; iſtud erit quadratum ex DC compoſita ex dimidia DA totius AB datæ, & AC maiore eius ſegmento; hoc verò erit quadratum ex tota data recta AB. Præterea producatur latus FC, vltra C donec ſecet in N, latus LM quadrati CM, reſultabunt rectangula AN, CM, nam cùm angulus ACF ſit rectus, erit angulus BCN rectus per propoſit. 15. libr. 1. tum angulus ACN rectus per propoſ. 13. lib. eiuſdem; quare cum anguli B & A, ſint etiam recti in quadrato AM, erunt per propoſ. 28. libr. 1. parallelæ rectæ FCN, BM, AL; rectangula igitur erunt parallelogramma AN, CM. Simili modo ſi producatur recta LA vltra A, donec ſecet rectam EF, in G, & intermediam diametrum FD in H, quadrati EC; reſultabunt duo rectangula AE, AF. Denique ſi ducatur IHK parallela ipſi DAC, reſultabunt per lemma noſtrum 2. ad librum 2. rectangula DK, KE, DG, AF, & quadrata IA rectæ AD ſeu dimidiæ AR, totius AB; tùm GK rectæ AC maioris ſegmēti totius rectæ AB: & rectangulum AK ſub maiore ſegmento AC & AH æquale ipſi AD dimidiæ totius AB.

Demonſtratio. Quia per data, recta linea AB ſecta eſt in C extrema & media ratione, erit ex def. 3. libr. 6. tota AB ad AC ſegmentum eius maius, vt ipſa AC ad CB ſegmentum eius minus; quare per propoſ. 17. libr. 6. erit rectangulum ſub AC, & CB, hoc eſt rectangulum CM, æquale quadrato GK, rectæ AC. Eſt autem recta AL dupla rectæ AH ſeu AD, ergò rectangulum AN per 1. prop. libr. 6. erit

6. erit duplum rectanguli AK; ſed eſt per prop. 43. libr. 1. rectangulum IG æquale eſt rectangulo AK; ergo rectangula IG, AK, erunt æqualia rectangulo AN: his æqualibus ſi addantur æqualia oſtenſa GK, CM rectangula, fient ex vna parte gnomon IPQ, & ex alia totum quadratum AM æqualia. Verum per corollar. noſtrum ad prop. 20. lib. 6. quadratum AM quadruplum eſt quadrati IA hoc eſt rectæ DC vel AR; ergo etiam gnomon IPQ quadruplus erit eiuſdem quadrati IA, per 7. prop. libr. 5. Igitur ſi gnomoni illi IPQ addatur quadratum IA, fiet totum quadratum EC ex recta AC, & AD, hoc eſt maiore ſegmento totius AB, & dimidio AR totius eiuſdem, quintuplum quadrati IA dimidiæ AR totius AB. quod erat concludendum.

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Si rectanguli vel parallelogrammi vnius latus commune habeat ſegmentum cum latere alterius rectanguli vel parallelogrammi: productis lateribus horum rectangulorum vel parallelogrammorum extrema habentibus communia dicto ſegmento vltra illa puncta communia, intra rectangulum vel parallelogrammum aliud; reſultabunt alia rectangula vel parallelogramma intra data.*

Fig. 283. HOc probauimus in conſtructione, in rectangulis EC, AM, quorū latera DC, AB, commune ſegmentum habent AC: nam producto latere LA vltra A punctum, & producto latere FC, vltra punctum C; reſultarunt rectangula LA, GC, in rectangulo EC; & rectangula AN, CM, in rectangulo CM. Quod ſi rectangula non eſſent EC, AM, ſed parallelogramma alia, eodem modo reſultarent alia parallelogramma, ob rationes allatas in conſtructione.

COROLLARIVM NOSTRVM

I I.

*Quadratum totius rectæ ſectæ media & extrema ratione, minus eſt quadrato dimidiæ ſuæ partis, quadrato ex eadem dimidia ſua parte, & maiore ſegmento ſuo, tanquam ab vna recta.*

Fig. 283. NAm iſtud quadratum AM, rectæ AB ſectæ in C media & extrema ratione probauimus eſſe quadruplum rectæ AD dimidiæ totius AB; & quadratum EC, rectæ DAC compoſitæ ex DA dimidia AB rectæ, & AC maiore eius ſegmento, quintuplum eſſe oſtendimus quadrato rectæ DA: ergo quadratum rectæ AB, minus erit quadrato rectæ DAC, quadrato rectæ DA dimidiæ totius AB ſectæ lineæ media & extrema ratione.

COROLLARIVM NOSTRVM

I I I.

*Si ex maioris quadrati EC, lateribus DE, DC, detrahantur recta DS, DV, æquales lateribus AB, AL, quadrati AM; & perficiatur quadratum SV: (accipiendo quadrata prædicta huius propoſitionis) Gnomon TFX, erit æqualis quadrato IA.* Fig. 283.

CVm enim ſit oſtenſum quadratum AM, quadruplum quadrati IA; & quadratum EC, quintuplum eiuſdem quadrati IA: & ob æquales rectas AB, DS, ſint æqualia quadrata SV, AM; etiam quadratum SV erit quintuplum quadrati IA, per prop. 7. libr. 5. Ergo ſi detrahamus de quadrato maiore EC, quadratum minus SV, hoc de quintuplo quadruplum eiuſdem IA quadrati; relinquetur gnomon TFX æqualis ipſi quadrato IA.

## PROPOSITIO II.

Si recta linea ſui ipſius ſegmenti quintuplum poſſit: Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum, reliqua pars eſt eius, quæ à principio rectæ.

SVppoſitio. Recta linea DC diuiſa ſit in A, & tota DC poſſit quintuplum ſegmenti DA ſui proprij; & ACB dupla dicti ſegmenti DA, ita ſecta ſit extrema & media ratione in C, vt AC ſit maius eius ſegmentum: Dico quod hoc AC maius ſegmentum cum DA recta, componat rectam lineam DAC initio datam. Fig. 283.

Demonſtratio. Vel hæc recta DAC, eſt æqualis rectæ aſſumptæ DC, vel minor vt DV, vel maior vt DB. Imprimis per prop. præced. quia recta AB ſecta eſt extrema & media ratione in C, & maius eius ſegmentum eſt AC, quod ſi componatur cum AD dimidia parte totius, quintuplum poteſt dimidiæ ſuæ partis AD. Iam verò ſecunda poſitio adſtrui nequit; nam per eandem propoſ. recta DV quintuplum poteſt eiuſdem AD,

vnde

vnde æquales erunt DC, DV, pars & totum. Sed neque tertia poſitio aſſumi poteſt; nam ex eadem prop. recta DB quintuplum poteſt eiuſdem DA, ſicuti DC; ergo æquales erunt rectæ DC, DB, pars & totum. Ex duabus poſtremis poſitionibus ſequuntur abſurda, ergo ipſæ poſitiones erunt falſæ, ſecunda & tertia. Relinquitur ergo prima, hoc eſt vt aſſumptæ DAC rectæ compoſitæ ex ſegmento ſuo DA, & maiore dicto ſegmento AC, duplæ DA ſectæ media & extrema ratione, pars altera ab DA, ſit maius dictum ſegmentum AC.

## PROPOSITIO III.

Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur quadrati.

Fig. 284. SVppoſitio. Recta linea AB, ita ſecetur extrema & media ratione in C, vt maius eius ſegmentum ſit AC, & minus CB, & maius AC ſegmentum ſectum ſit in D biſariàm: Dico BCD, hoc eſt minus ſegmentum BC, & CD dimidium maioris AC, ſimul ſumpta, poſſe quintuplum eius quod à dimidia DC, maioris AC ſegmenti, deſcribitur quadrati.

Conſtructio. Per prop. 46. libr. 1. ſuper AB deſcribatur quadratum AE; & ex punctis D, C, rectæ AB, ponantur rectæ lineæ DH, CG, parallelæ, lateri BE, per prop. 31. lib. 1. ſecantes diametrum FB, quadrati facti AE, in punctis K, V, ex quibus tranſmittantur rectæ NKO, LVM, parallelæ ipſi AB: reſultabunt per lemma noſtrum 2. ad li. 2. quadratam LG, rectæ AC; & quadratum DO, rectæ DCB; & quadratum PQ, rectæ DC; & rectangula AM, AP, DV, VO.

Demonſtratio. Per prop. 36. libr. 1. rectangula AP, DV, ſuper æqualibus baſibus AD, DC, & inter parallelas AB, LM, ſunt æqualia; ſed & per prop. 43. libr. eiuſdem, rectangula DV, VO, ſunt æqualia; ergo per 1. ax. lib. 1. rectangula AP, VO, æqualia erunt: his poſtremis ſi addatur commune rectangulũ DM; erit totum rectangulum AM, gnomoni RST æquale. Et quia recta AB ſecta eſt media & extrema ratione in C, erit per def. 3. lib. 6. vt tota AB, ad maius eius ſegmentum AC, ita AC ad CB minus eius ſegmentum: ergo per prop. 17. libr. 6. rectangulum AM ſub AB & BM ſeu CB, æquale erit quadrato LG rectæ AC: ſed per coroll. noſtrum ad prop. 20. lib. 6. quadratum LG quadruplum eſt quadrati PQ, rectæ DC; ergo per prop. 7. libr. 5. gnomon RST, vel rectangulum AM, quadruplum erit quadrati PQ, rectæ DC: Igitur ſi gnomoni RST, addatur ipſum quadratum PQ, rectæ DC; totum quadratum DO, rectæ DCB compoſitæ ex CB & CD, quintuplum erit quadrati PQ, rectæ DC: hoc recta DCB compoſita ex minore ſegmento CB, & dimidio CD, maioris ſegmenti AC, totius rectæ ACB ſectæ media & extrema ratione, quintuplum poterit quadrati rectæ DC dimidiæ totius dicti maioris ſegmenti AC. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO IV.

Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: Quod à tota, quodque à minore ſegmento vtraque ſimul quadrata, tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati.

SVppoſitio. Recta linea AB, ita ſecta ſit in C, extrema & media ratione, vt AC ſit eius maius ſegmentum, & CB minus: Dico quadrata ſimul ſumpta, totius AB, & CB minoris ſegmenti, tripla eſſe quadrati ex AC maiore ſegmento. Fig. 285.

Conſtructio. Per prop. 46. libr. 1. ſuper recta AB, fiat quadratum AD; & per prop. 31. lib. eiuſdem, ducatur recta CF parallela lateri BD, ſecans diametrum EB in G, & latus ED in F; tùm alia recta IGH parallela ipſi AB, ſecans in I, latus AE, & latus BD in H: reſultabunt quadrata IF, CH, illud quidem rectæ AC maioris ſegmenti, iſtud vero rectæ CB minoris ſegmenti, tum rectangula AH, CD, per lemma noſtrum 2. ad librum 2. quæ duo rectangula AH, CD, erunt ſub tota AB, & minore ſegmento CB.

Demonſtratio. Quia datur recta AB, ſecta in C, extrema & media ratione, erit per def. 3. lib. 6. recta tota AB ad maius ſegmentum, vt ipſum maius ſegmentum AC, ad minus CB: quare per prop. 17. libr. 6. erit rectangulum AH ſub extremis AB, CB, æquale IF quadrato AC mediæ rectæ. Quod ſi iterum aſſumamus rectangulum CD ſub eiſdem extremis rectis AB, CB æquale etiam quadrato

IF, ipſius AC mediæ rectæ per cit. prop. 17. iſta duo rectangula AH, CD, ſub tota AB, & CB minore ſegmento CB, dupla erunt quadrati IF, ex recta AC maiore ſegmento totius. Inſuper ſi illis duobus rectangulis AH, CD, addatur quadratum IF, rectæ AC, erunt per 19. axioma libr. 1. æqualia quadratis AD, & CH, illo quidem totius AB, hoc verò minoris eius ſegmenti CB; quæ rectangula AH, CD, & quadratum IF, tripla erunt quadrati IF; ergo totum quadratum AD, & quadratum CH ſimul ſumpta, illud totius rectæ AB, hoc minoris eius ſegmenti CB, erunt per 7. prop. libr. 5. tripla quadrati IF ex recta AC maiore ſegmento totius AB. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO V.

Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio recta linea.

Fig. 286. SVppoſitio. Recta linea AB ſecta ſit media & extrema ratione, & ei in rectum apponatur AC maius ſegmentum, vel æquale illi BD, ita vt tota recta ſit ACBD: Dico hanc rectam ACBD, extrema & media ratione eſſe ſectam, maiuſque eius ſegmentum eſſe rectam AB datam.

Constructio. Super data AB fiat quadratum BE per prop. 46. libr. 1. & per prop. 31. libr. eiuſdem, ex puncto C ponatur parallela recta CG, lateri BF, ſecans obuiam diametrum AF in puncto H, & latus EF in G; tùm alia recta IHK, parallela ipſi AB, ſecans in I latus AE, & in K latus BF: denique producatur recta IK vltra K donec occurrat rectæ DL in L, parallelæ ipſi BF. Reſultabunt per lemma noſtrum 2. ad libr. 2. quadratum CI, rectæ AC; & quadratum GK, rectæ CB; & rectangulum EK ſub AB tota data recta, & CB minore eius ſegmento; & rectangulum AL ſub tota ACBD, & BD, ſeu AC ſegmento maiore datæ rectæ AB; & quadratum BL rectæ BD ſeu AC.

Demonſtratio. Quia datur recta AB ſecta in C, extrema & media ratione, erit per def. 3. lib. 6. recta AB ad AC maius eius ſegmentum, vt ipſum AC maius ſegmentum ad CB minus eiuſdem ſegmentũ: vnde per prop. 17. lib. eiuſdem 6. rectãgulum EK ſub extremis rectis AB, CB, erit æquale quadrato IC, vel BL, rectæ AC vel BD æqualibus: His æqualibus rectangulo EK, quadrato BL, ſi addatur commune rectangulum IB, fient ex vna parte quadratum EB totius rectæ datæ AB, & ex alia parte rectangulum AL ex tota ACBD, & BD ſeu AC, æqualia per 2. ax. libr. 1. ergo per prop. 17. libr. 6. erunt rres iſtæ rectæ proportionales ACBD, AB, BD: igitur ex def. 3. libr. 6. erit recta linea ACBD, ſecta media & extrema ratione in B, maiuſque eius ſegmentum erit recta AB ab initio data. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO VI.

Si recta linea Rationalis extrema & media ratione ſecetur: Vtrũq; ſegmẽtorum Irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome.

SVppoſitio. Recta AB Rationalis ſecta ſit in C, extrema & media ratione: Aſſero vtrumque ſegmentorum AC maius, & CB minus, eſſe lineas Irrationales, quæ vocantur Apotomæ. Fig. 287.

Conſtructio. Addatur in rectum maiori ſegmento AC, recta AD æqualis dimidiæ totius AB rectæ.

Demonſtratio. Per 1. propoſit. libri huius. Quadratum rectæ DAC quintuplũ eſt quadrati rectæ AD; ergo quadratũ illud ad quadratum iſtud proportionem habebit quam numerus ad numerum, hoc eſt quam 5 ad 1, vel 25. ad 5. ergo per 6. prop. lib. 10. commenſurabilia erunt quadrata rectarũ DAC, AD: ergo per defin. 3. libr. 10. commenſurabiles erunt ſaltem potentia ipſæ rectæ DAC, AD. Sed eſt Rationalis recta AD, quia eſt ſemiſſis totius Rationalis datæ AB; ergo & tota DAC Rationalis erit, per 6. def. lib. 10. Quia verò per coroll. prop. 24. libr. 8. quadrata rectarum DAC, AD, non habẽt proportionem quàm numerus quadratus ad numerum quadratum, nam illud eſt quintuplũ huius oſtenſum; erunt per prop. 9. libr. 10. rectæ DAC, AD, longitudine incommenſurabiles; & propterea Rationales tantum potentia commenſurabiles per 6. def. lib. 10. Iam verò ſi ex Rationali DAC dematur DA potentia tantum commenſurabilis, remanebit recta AC Irrationalis quæ vocatur Apotome, iuxta prop. 74. lib. 10. Denique applicato rectangulo AE ſub AB & CB, ad rectã AB: quia eſt per def. 3. li. 6. vt AB ad AC, ita AC ad CB; erit per 17. prop.

propoſ. lib. 6. rectangulum AE æquale quadrato ex AC: vnde quadratum Apotomæ AC, videlicet rectangulum AE, applicatum ſecundum lineam Rationalem AB, efficiet per 98. propoſ. lib. 10. alterum latus DE, nimirum CB illi æqualem, Apotomen primam. Demonſtrauimus ergo vtrumque ſegmentorum AC, CB, datæ rectæ AB Rationalis extrema & media ratione ſectæ in C, eſſe Apotomas.

## PROPOSITIO VII.

Si pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint; æquales fuerint: Æquiangulum erit ipſum Pentagonum.

Fig. 288. SVppoſitio. Pentagoni æquilateri ABCDE, tres anguli deinceps ſe mutuò conſequentes, A, B, C, ſint æquales; vel tres alij non ſe mutuò conſequentes A, C, D, ſint æquales: Dico æquiangulum eſſe pentagonum illud æquilaterum.

Conſtructio. Angulis dati pentagoni ſupponātur rectæ BE, AC, BD, CE, AD: & duæ BE, AC, ſe mutuo ſecent in F, & ducta ſit recta FD.

Demonſtratio. Cum dentur in primo caſu anguli tres deinceps BAE, ABC, BCD, æquales inter ſe, & latera eos comprehendentia æqualia; erūt baſes BE, AC, BD æquales per 4. prop. li. 1. in triangulis EAB, ABC, BCD: ſed etiam in ſingulis illis triangulis anguli ad baſes dictas erunt æquales inter ſe per prop. 5. libr. 1. Quod ſi ab duobus rectis quibus ſunt æquales anguli tres omnium triangulorum rectilineorum, per 32. propoſ. lib. 1. demantur illi anguli EAB, ABC, BCD, relinquentur in dictis triangulis duo anguli ad baſes ſimul, æquales duobus angulis huiuſmodi ſimul ad baſes aliorum, per 3. axio. libr. 1. horum vero ſemiſſes videlicet ſinguli anguli ad baſes dictas BE, AC, BD, erunt æquales per 7. ax. lib. 1. videlicet anguli AEB, ABE, BAC, BCA, CBD, CDB. Sed per propoſ. 5. libr. 1. in triangulo iſoſceli DBE, anguli ad baſim DE erunt æquales, videlicet anguli BED, BDE; quibus ſi addantur æquales anguli oſtenſi AEB, CDB; fient per 2. ax. lib. 1. anguli toti AED, CDE æquales. Quia vero probauimus duos angulos FAB, FBA, æquales eſſe, erunt latera FA, FB æqualia per 6. prop. libr. 1. quibus ſublatis ab totis BE, AC æqualibus, remanebunt æqualia FE, FC, per 3. axio. libr. 1. Quia verò in duobus triangulis FCD, FED, duo ſunt latera FC, CD, æqualia relatiuè duobus lateribus FE, ED, & baſis eſt communis FD, erunt per propoſ. 8. libr. 1. anguli FCD, FED, æquales; illis ergo ſi addantur æquales anguli probati BCA, AEB, fient per 2. axio. libr. 1. toti anguli æquales BCD, AED. Cùm igitur probauerimus duos angulos CDE, AED, eſſe æquales inter ſe, & angulum AED eſſe æqualem angulo BCD, cui ſūt dati anguli æquales ABC, EAB; erunt per 1. axio. libr. 1. omnes anguli pentagoni dati, æquales inter ſe, quod erat probandum in primo dato caſu. Accedamus ad ſecundum caſum. Cùm dentur anguli EAB, BCD, CDE, æquales, & latera circa illos æqualia, erunt per 4. prop. libr. 1. in triangulis eiſdem characteribus deſignatis, quibus anguli illi dati, baſes BE, BD, CE, æquales; & eodem diſcurſu quo in primo caſu, anguli AEB, ABE, CBD, CDB, DCE, DEC, æquales: Et quia oſtenſa ſunt latera BD, BE, æqualia, erunt anguli BED, BDE, ad baſim DE æquales per 5. prop. libr. 1. qui ſi addantur angulis æqualibus AEB, CDB oſtenſis, fient anguli totales AED, CDB, æquales per axio. 2. libr. 1. Eodem modo quia latera EB, EC, oſtenſa ſunt æqualia, erunt per 5. propoſ. libr. 1. anguli EBC, ECB, æquales, quibus ſi addantur anguli ABE, ECD probati æquales, fient per 2. axio. libr. 1. anguli ABC, BCD, æquales: Reliquos ergo angulos ABD, AED, oſtendimus æquales æqualibus datis inter ſe angulis BCD, CDE, & angulo tertio CAB; ergo per 1. axio. libr. 1. omnes anguli pentagoni æquilateri dati, erunt æquales in hoc altero caſu. Probauimus ergo intentum.

## PROPOSITIO VIII.

Si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuò ſecant; & maiora ipſarum ſegmenta, æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVppoſitio. Pentagoni æquilateri & æquianguli ABCDE, duos angulos BCD, CDE, deinceps ſe mutuò conſequentes, ſubtendant rectæ BD, CE, quæ ſe mutuo ſecent Fig. 289.

in F, nam vt altera ad lateris extremũ vnius efficientis angulum vnum è datis pertingat ab alterius lateris extremo eundem angulum efficientis, obuiam aliam chordam ſecabit: Dico quod hæ duæ rectæ ſe mutuo ſecant in F, extrema & media ratione, & quod maiora eorum ſegmenta BF, EF, ſunt æqualia pentagoni lateri.

Demonſtratio. Quia in triangulis BCD, CDE, duo latera BC, CD, ſunt æqualia duobus lateribus CD, DE, ex datis, anguloſque ex eiſdem datis æquales comprehendunt BCD, CDE, per 4. propoſ. libr. 1. erunt ipſa triangula æqualia, baſeſque BD, CE, erunt æquales, & reliqui eorum anguli erunt æquales, tùm per 5. propoſ. libr. 1. & 1. axio. lib. 1. Et quia ſunt anguli æquales ECD, CDB, nunc probati, erunt in triangulo CFD, latera FC, FD, æqualia per 6. propoſ. libr. 1. quæ ſi auferantur ab æqualibus rectis BD, CE, relinquentur æquales rectæ BF, EF. Quoniam autem duo triangula BCD, CDE, oſtenſa ſunt æqualia, erunt per propoſ. 39. lib. 1. inter eaſdem parallelas rectas BE, CD: quare per propoſ. 29. libr. 1. anguli BEC, DCE erunt æquales, tùm anguli EBD, BDC, ideoque per 1. axio. libr. 1. erunt anguli BEC, DCE, æquales inter ſe, & angulis CBD, DEC: ſed etiam in triangulis BAE, BCD, quia duo latera, angulos æquales BAE, BCD, comprehendentia, ſunt æqualia ex datis, erunt per 4. propoſ. lib. 1. & 5. prop. & ax. 1. anguli AEB, ABE, æquales angulis CBD, CDB, ideoque æquales angulis oſtenſis æqualibus BEC, EBD, aliis CBD, CDB. Quod ſi ex angulis æqualibus AED, BCD, datis, ſubtrahantur anguli æquales oſtenſi CED, ECD, relinquentur æquales AEC, BCE: eſt autem angulus AEC duplus anguli BEC, vel AEB, eo quod ſit æqualis illis ambobus, ergo angulus BCE duplus erit eiuſdẽ anguli BEC, vel AEB: ſed per propoſ. 32. libr. 1. angulus BFC, æqualis eſt duobus angulis FDC, FCD, æqualibus, ergo duplus erit vnius illorum; porrò quilibet illorum eſt oſtenſus æqualis angulo AEB, vel BEA; ergo cum angulorum quilibet BCF, BFC, ſit oſtenſus duplus anguli vnius ex dictis, ipſi erunt æquales inter ſe per 6. axio. libr. 1. latus ergo BF eſt æquale lateri BC pentagoni: ideoque etiam latus EF, nimirum ſegmentum maius rectæ BD, æquale ipſi BF, æquale erit lateri BC pẽtagoni dati. Deniq; quia BFE angulus æqualis eſt angulis duobus CBD, BCF, per citat. prop. 32. lib. 1. & angulus CBD, oſtenſus eſt æqualis angulo DCB, idem angulus BFE æqualis anguli totali BCD pentagoni dati: ſed per prop. 15. libr. 1. angulus CFD, æqualis eſt angulo BFE, & anguli CBD, FDC, CDB, FCD, ſunt oſtenſi æquales, æquiangula erunt duo triangula CFD, BCD: quare per 4. propoſ. lib. 6. erit BD ad DC, vel BF æqualem vt CD vel BF ad DF; ideoque per defin. 3. libr. 6. ſecta erit recta BD in C, extrema & media ratione, tùm etiam recta CE in F, maioraque earum ſegmenta BF, FE, erunt æqualia lateri pentagoni dati æquilateri & æquianguli.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I.

*Recta linea ſubtenſa anguli pentagoni æquilateri & æquianguli, parallela eſt lateri oppoſiti dicto angulo.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I I.

*Duæ rectæ ſubtenſæ angulis duobus deinceps ſe mutuo conſequentibus pentagoni æquilateri & æquianguli; efficiunt angulum in communi ſectione vnum oppoſitum angulo ipſius pentagoni, æqualem ipſi angulo, alterum verò deinceps æqualem angulo oppoſito maiori ſegmento alterutrius.*

## PROPOSITIO IX.

Si hexagoni latus & decagoni in eodem circulo deſcriptorum componantur: Tota recta linea, extrema ac media ratione ſecatur; & maius ſegmentum eſt hexagoni latus.

SVppoſitio. In circulo CBA, centrum D habente, ſit latus decagoni AB, & latus hexagoni BE compoſitum in rectum AB lateris decagoni prædictum: Dico totam rectam lineam EBA, eſſe ſectam in B, extrema & media ratione, & maius eius ſegmentum eſſe latus EB hexagoni. Fig. 290

Conſtructio. Ducatur CDA diameter circuli, tùm rectæ DE, DB. Imprimis ſemidiameter DB, vel DA erit æqualis lateri BE hexagoni dati in eodem circulo dato inſcripti, per corollar. prop. 15. libr. 4. Quare in triangulo EBD iſoſceli erunt per 5. propoſ. libr. 1. æquales anguli ad baſim ED: Similiter in triangulo ADB, anguli ad baſim AB, erunt æquales, quia eſt triangulum ADB iſoſceles.

Eſt

Eſt autem angulus CDB per prop. 32. libr. 1. æqualis duobus augulis DAB, DBA oſtenſis æqualibus, ergo erit duplus alterutrius, puta anguli DBA; ſed angulus DBA per cit. prop. eſt æqualis duobus angulis E, BDE oſtenſis æqualibus; ergo erit duplus anguli BDE: ergo angulus CDB, erit quadruplus anguli BDE, cùm ſit duplus dupli ABD anguli, huius BDE. Datur vero recta AB latus decagoni, ergo arcus AB erit decima pars totius circumferentiæ circuli, & quinta ſemicircumferentiæ CBA, quo ſublato ab ſemicircumferentia ipſa, relinquetur arcus CB, quadruplus arcus AB; quare per prop. 33. libr. 6. angulus CDB, quadruplus erit anguli ADB. Cùm igitur idem angulus CDB, ſit probatus quadruplus anguli BDE, & anguli ADB, ipſi anguli ADB, BDE, erunt æquales per 9. propoſ. libr. 5. Duplus ergo erit angulus totalis ADE, anguli E æqualis angulo BDE: Demonſtrauimus autem angulum ABD eſſe duplum anguli E, & angulum A eſſe æqualem angulo ABD, ergo per 1. axio. lib. 1. anguli A & ADE, erunt æquales. Habemus ergo triangula æquiangula AED, ADB; nam anguli E, ADB, ſunt probati æquales, tùm anguli A, ABD, ADE æquales.

Demonſtratio. in triangulis æquiangulis AED, ADB, per prop. 4. libr. 6. erit EA ad AD, vel EB æqualem, vt DA vel EB æqualis ad BA: hoc eſt tota EA ad maius eius ſegmentum EB, ita maius ſegmentum EB ad BA minus eius ſegmentum, ſed maius ſegmentum EB eſt æquale poſitum ſemidiametro DA, quod per corollar. citat. propoſ. 15. libr. 4. eſt æquale lateri hexagoni in circulo CBA inſcripti. ergo probauimus intentum, cùm iuxta defin. 3. lib. 6. ſecta ſit AE in B.

## PROPOSITIO X.

### Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur: Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

Fig. 191. SVppoſitio. In circulo ABCDE centrum F habente, ſit pentagonum æquilaterum inſcriptum: Dicoquodlibet eius latus, v. g. AB, poſſe latus hexagoni & decagoni in eodem circulo inſcripti; hoc eſt quadratum lateris AB eſſe æquale quadratis ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni in eodem circuli inſcriptorum.

Conſtructio. Ducatur diameter circuli ex aliquo angulo, puta A, pentagoni dati, ſitque AFG: & per propoſ. 30. lib. 3. Diuidatur arcus AB biſariàm in H; & arcus AH biſariàm in K; tùm ducantur chordæ BH, HK; & ſemidiametri EB, EH, EK; verum EH ſecet in I chordam BA obuiam; & EK eandem chordam BA obuiam ſecet in M, & aliam KA in L: vltimò tranſmittatur recta HM.

Demonſtratio. Per coroll. noſtrum ad propoſ. 29. lib. 3. chordæ HB, HA, ſubtenſæ æqualibus arcubus HB, HA, erunt æquales; ideoque in triangulo iſoſcele BHA, anguli HBA, HAB, erunt æquales per propoſ. 5. lib. 1. Et quia in triangulis BHF, AHF, duo latera HF, HB, ſunt æqualia duobus lateribus HF, HA, & baſes BF, AF, ſunt æquales, erunt per propoſ. 8. lib. 1. anguli BHF, AHF, æquales: ergo cùm in triangulis BHI, AHI, duo ſint anguli IBH, IHB, oſtenſi æquales duobus angulis IAH, IHA, reſpectiuè, erunt per coroll. noſtrum 3. ad propoſ. 32. libr. 1. anguli duo reliqui ad I deinceps æquales, & per defin. 10. libr. 1. recti ambo, & recta linea FIH ad angulos rectos chordæ AB, ducta ab centro F circuli ad H punctum medium arcus AB cui ſubtenſa eſt chorda AB: & propterea etiam, FLK, erit perpẽdicularis chordæ AH, & angulos rectos in L, ipſimet chordæ AH, eo quod ex centro F ducta ſit ad K punctum medium arcus AH: diuiſæque erunt chordæ AB, AH, biſariàm, illaque in I, iſta vero in L, per 3. propoſit. libr. 3. Et quia in triangulis LAM, LHM, duo latera LA, LM, ſunt æqualia duobus lateribus LH, LM, anguloſque continent æquales rectos in L, erunt per 4. prop. lib. 1. baſes MA, MH, æquales, & anguli LAM, LHM, æquales, ideoque per 1. ax. libr. 1. anguli LHM, HBA, erunt æquales, quia oſtenſi ſunt æquales tertio angulo BAH: Denique quia triangula ABH, AHM, angulos ABH, BAH, MHA, MAH, habent æquales, reliquos duos obtinebunt æquales BHA, AMH, per cit. coroll. noſtrum 3. ad prop. 32. libr. 1. ideoque triangula erunt æquiangula ABH. AHM: quare per 4. prop. libr. 6. erit BA ad AH, vt HA ad AM; & per propoſ. 17. libr. 6. rectangulum ſub extremis BA, AM, erit æquale quadrato mediæ rectæ AH. Præterea ſi ex ſemicircumferentiis æqualibus ABCG, AEDG, auferantur arcus æquales ABC, AED, per coroll. noſtrum ad prop. 28. libr. 3. quia eis ſubtenduntur rectæ AB, BC, AE, ED, æquales ſeu latera pentagoni dati æquilateri; relinquentur arcus æquales CG, DG, hoc eſt ſemiſſes arcus totalis CD æqualis arcui BA, æquales ſemiſſibus AH, BH, arcus totalis AB. Eſt autem angulus BAF vel

BAG, inſiſtens arcui BCG compoſito ex arcu vno quem ſubtendit latus vnum BC pentagoni, & ſemiſſe CG, totius CD alterius arcus; ergo angulus ABF illi æqualis per prop. 5. libr. 1. inſiſtet arcui æquali ipſi BCG iuxta noſtrum corollar. ad propoſ. 26. libr. 3. ſed angulus BFK inſiſtit arcui BHK dimidio totius BCG: ergo per propoſ. 33. lib. 6. ſubduplus anguli BFG, ideoque æqualis angulo BAF, vel ABF, nam per propoſ. 20. libr. 3. angulus BFG eſt duplus anguli BAF. Igitur in triangulis duobus ABF, FBM, cùm oſtenderimus MFB, FAB, eſſe æquales, angulumque FBA vel FBM communem obtineant, erunt reliqui anguli FMB, AFB æquales iuxta corollar. noſtrum 3. ad propoſ. 32. libr. 1. æquiangula igitur erunt triangula ABF, FMB, quare per 4. propoſ. libr. 6. erit AB ad BF, vt BF ad BM; vnde per propoſ. 17. lib. 6. erit rectangulum ſub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF, hoc eſt quadrato lateris hexagoni, nam per corollar. prop. 15. libr. 4. ſemidiameter circuli eſt æqualis lateri hexagoni in illo inſcripti. Quia igitur antea probauimus rectangulum ſub AB, AM, æquale eſſe quadrato rectæ AH ſeu lateris decagoni æquilateri in hoc circulo inſcripti, ſupponitur enim chorda AH ſemiſſi arcus AB pentagoni, vnde fit vt ſit chorda decagoni: & modo demonſtrauimus rectangulum AB, BM, eſſe æquale quadrato rectæ BF lateris hexagoni in hoc circulo inſcripti; & per prop. 2. libr. 2. quadratum totius AB lateris pentagoni, eſt æquale rectangulis ſub AB, AM, & ſub AB, BM; erit per 1. axio. libr. 1. quadratum rectæ AB ſeu lateris pentagoni, æquale quadratis laterum FB hexagoni, AH decagoni in eodem circulo inſcriptorum. quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM I.

*Recta linea è centro circuli ducta ad medium arcus eius punctum; chordam huius arcus biſariàm diuidit, & ad angulos rectos.*

### COROLLARIVM II.

*Diameter circuli educta ex angulo pentagoni æquilateri in eo inſcripti; latus pentagoni huius oppoſitum illi angulo, biſariàm diuidit, & ad angulos rectos, & arcum cui ſubtenditur hoc latus pentagoni biſariàm partitur.*

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*Si Pentagoni æquilateri & æquianguli in circulo inſcripti, AB arcus ſubtenſus lateri eius biſariàm ſecetur in H, & iterum AH arcus biſariàm ſecetur in K: rectæque ducantur BF, AF ad centrum F circuli, & recta FK ſecans chordam AB ſeu latus pentagoni in M: erit angulus BMF æqualis angulo AFB; & angulus MFB æqualis angulo BAF vel ABF æqualibus.* Fig. 291.

## PROPOSITIO XI.

### Si in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum deſcribatur: pentagoni latus, Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

SVppoſitio. In Circulo ABCDE, ſit pentagonum eiſdem characteribus dictis inſcriptum æquilaterum, habente diametrum AG Rationalem: Dico quod latus quodlibet huius pentagoni, verbi gratia AB, ſit linea Irrationalis quæ vocatur Minor. Fig. 292.

Conſtructio. Ex angulo A ducatur per centrum F circuli, diameter eius AFG, ipſa ſecabit in I ad angulos rectos, latus CD pentagoni dati oppoſitum angulo A, per coroll. 2. prop. præced. tùm arcum CD biſariàm in G, per idem coroll. Ducatur etiam ex angulo B pentagoni, alia diameter BFH circuli, quæ arcum DE ſecabit in H biſariàm, per cit. corollar. Præterea ducantur rectæ AC, AH, ſecetque AC, in K obuiam diametrum BFH. Et quia HFB diameter circuli, arcum ABC biſariàm ſecat in B, (eo quod latera omnia pentagoni æquilateri abſcindant è circulo arcus æquales iuxta coroll. noſtrum ad prop. 28. libr. 3.) ſecabit biſariàm & ad angulos rectos chordam AC in puncto K: ergo ſi per propoſ. 10. libr. 1. ſecetur KC biſariàm in M, erit CM quarta pars totius AC. Quod ſi etiam ſemidiameter FH ſecetur biſariàm in O; & eius ſemiſſis FO, biſariàm in L, erit FL quarta pars ipſius FH, & octaua totius BH diametri.

Demonſtratio. Quoniam BFH diameter circuli datur Rationalis, erunt per defin. 6. libr. 10. ſemiſſis eius BF, & FL octaua eius pars, Rationales: & tota BL compoſita ex BF, & FL, commenſurabilibus, (nam FL eſt quarta pars totius BF ſeu FH,) erit commenſurabilis vtrique ipſarum, per propoſ. 16. lib. 10.

10. ideoque per citat. defin. 6. erit Rationalis eadem BL. Iam verò quia triangula AIC, AKF, obrinent ex dictis in conſtructione angulos in I & K rectos æquales, communemque ſibi vendicant angulum CAI vel FAK; reliquos babebunt æquales angulos ACG, AFK, per corollar. noſtrum 3. ad propoſ. 32. libr. 1. vnde æquiangula erunt: ergo per 4. propoſ. libr. 6. erit IC ad CA, ita KF ad FA; & iuxta propoſ. 16. libr. 5. alternando vt IC ad KF, ita CA ad FA vel FH æqualem: Vt autem CA ad FH, ita CM quarta pars ipſius CA, ad FL quartam partem ipſius FH, per propoſ. 15. libr. 5. ergo per prop. 11. lib. 5. erit vt CI ad FK, ita CM ad FL; & permutando iuxta propoſ. cit. 16. libr. 5. vt CI ad CM, id eſt vt CD dupla ipſius CI ad CK duplam ipſius CM, per citat. prop. 15. libr. 5. ita FK ad FL: tùm per coroll. prop. 18. libr. 5. componendo, vt CD, CK, ſimul, ad CK, ita FK, FL ſimul, videlicet recta KL, ad FL: quare erit per propoſ. 22. libr. 6. vt quadratum rectæ compoſitæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratum rectæ KL ad quadratum rectæ FL. Quod ſi concipiatur recta ducta BD ſecans obuiam rectam AC, ſecaretur ipſa AC, extrema & media ſectione, maius eius ſegmentum per prop. 8. lib. huius, eſſet æquale lateri pentagoni dati, puta lateri CD; erit per 1. propoſ. libr. huius, quadratum rectæ compoſitæ ex CD maiori ſegmẽto, & CK ſemiſſe totius CA rectæ, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ totius CA: vnde quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL, per prop. 11. li. 5. quare quadratum rectæ KL commẽſurabile erit quadrato rectæ FL, per 1. def. li. 10. tùm per prop. 6. lib. 10. rectæ KL, FL, commenſurabiles erunt ſaltem potentia: ſed oſtendimus rectam FL eſſe Rationalem, ergo & KL recta erit Rationalis per 6. defin. libr. 10. Præterea quia qualium partium quatuor eſt BF, talium vna eſt FL per conſtructionem; tum qualium partium quinque eſt BL, talium vna eſt FL: erit quadratum rectæ BL talium partium 25. qualium vna eſt quadratum rectę FL, (vt in numeris hiſce videre eſt 1. 5. 25. nam quadrata habent portionem duplicatam laterum, per propoſ. 20. lib. 6.) Qualium vero partium vna eſt quadratum rectæ FL, talium quinque oſtenſum eſt quadratum rectæ KL: qualium igitur viginti quinque eſt quadratum rectæ BL, taliũ quinque eſt quadratum rectæ KL; vnde quadratum rectæ BL, quintuplũ erit quadrati rectæ KL. Quoniam igitur quadrata rectarum BL, KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt manifeſtum eſt ex coroll. propoſ. 24. libr. 8. eſt enim eorum proportio quæ 25 ad 5, vel 5 ad 1.) erunt rectæ BL, KL, longitudine incommenſurabiles per propoſ. 9. libr. 10. quare quia oſtendimus eas eſſe Rationales, erunt Rationales potentia tantum commenſurabiles per 6. defin. libr. 10. Quod ſi ex Rationali BL tollatur Rationalis KL, potentia tantum commenſurabilis, erit per propoſ. 74. libr. 10. reliqua BK Irrationalis quæ nuncupatur Apotome, ei vero congruens erit KL.

Nunc autem recta BL poſſit plus quàm recta KL, quadrato rectæ N. Quia igitur quadratum rectæ BL æquale eſt quadratis rectarum KL & N: qualium verò partium 5, fuit quadratum rectæ BL, talium 1, fuit quadratum rectæ KL; erit reliquum quadratum rectæ N, talium partium 4, qualium 5 eſt quadratum rectæ BL: proptereaque quadrata rectarum BL & N, proportionem obtinebunt quam numerus ad numerum; vnde per prop. 6. libr. 10. commenſurabilia erunt, & rectæ BL & N commenſurabiles ſaltem potentia: eſt verò BL recta probata Rationalis, ergo erit & Rationalis ipſa recta N, per defin. 6. libr. 10. Quoniam verò quadrata rectarum BL, & N: proportionem non habent quam numerus quadratus ad numerũ quadratum, iuxta coroll. propoſ. 24. libr. 8. eo quod proportio eorum ſit quæ 5 ad 4. erunt rectæ BL & N, longitudine incommenſurabiles, per prop. 9. libr. 10. quare Rationales erunt potentia tantum commenſurabiles. Quare cùm tota BL Rationalis, longitudine ſit commenſurabilis Rationali BH; (nam qualium partium 8 & BH, talium 5, BL) poſſitque plus quàm congruens KL, quadrato rectæ N, ſibi longitudine incommenſurabilis, vti probauimus; erit BK Apotome quarta, iuxta definitionem.

Denique, quoniam AB recta, eſt medio proportionalis inter BH, BK, per coroll. propoſ. 8. libr. 6. eo quod triangulum ABH obtineat angulum rectum, in A, per propoſ. 31. libr. 3. ex quo ad baſim BH demiſſa eſt perpendicularis AK; erit per propoſ. 17. libr. 6. quadratum rectæ AB æquale rectangulo ſub BH, BK. Quare cùm ſuperficiem contentam ſub Rationali BH, & Apotoma quarta BK, poſſit recta linea AB; erit AB linea Minor. Ergo ſi in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æqullaterum deſcribatnr: Pentagoni latus, Irrationalis erit linea quæ vocatur Minor, quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XII.

### Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur: Trianguli latus potentia triplum eſt eius lineæ quæ ex centro circuli ducitur.

Fig.293. SVppoſitio. In circulo centrum D habente, triangulum æquilaterum ABC ſit inſcriptum: Dico quod Trianguli huius quodlibet latus, v.g. AB, poſſit triplum ſemidiametri circuli huius: ſeu quod idem, dico quod quadratum lateris AB, ſit triplum quadrati ſemidiametri huius circuli.

Conſtructio. Ex angulo BAC, trianguli huius diameter ADE circuli tranſmittatur, quæ arcum BC biſariàm in E diuidet: nam per coroll. noſtrum ad prop. 28. libr. 3. latera trianguli æquilateri huius, arcus tres abſcindent æquales de tota circuli circumferentia; quare ſi de ſemicircumſerentiis æqualibus ABE, ACE, tollantur arcus æquales AB, AC, relinquentur arcus æquales BE, CE; vnde iuxta corollar. 1. prop. 10. libr. huius, recta BC chorda arcus BEC diuiſi biſariàm in E ab diametro ADE circuli, ſecabitur biſariàm in F, & ad angulos rectos, ab ipſa diametro ADE. Denique recta BE ducatur, quæ erit chorda hexagoni æquilateri in eodem circulo inſcripti, quia ſextæ parti totius circuli ſubtenditur, videlicet arcui BE qui eſt ſemiſſis tertiæ partis BEC ipſius circuli: vnde per corollar. propoſ. 15. lib. 4. ipſa chorda BE erit æqualis ſemidiametro circuli. Porrò reſultabit triangulum ABE rectangulum, ob angulum ABE rectum per prop. 31. lib. 3.

Demonſtratio. Per corollar. noſtrum ad prop. 20. lib. 6. quadratum totius rectæ ADE diametri circuli, quadruplum eſt rectæ BE æqualis ſemidiametro circuli ſubduplæ ipſius ADE: eſt autem per propoſ. 47. libr. 1. quadratum idem rectæ ADE æquale quadratis rectarum AB, BE; ergo per axio. 1. libr. 1. quadrata iſta duo rectarum AB, BE, ſimul ſumpta, erunt quadrupla quadrati rectæ BE. Igitur ſi demamus ex his duobus quadratis quadratum rectæ BE, relinquetur quadratum lateris AB, trianguli æquilateri in circulo inſcripti, triplum quadrati BE æqualis ſemidiametro circuli. quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM.

*Semidiameter DE circuli ſecatur biſariàm ab latere BC trianguli æquilateri* Fig.293.

NAm ducta BD ſemidiametro, quæ æqualis erit rectæ BE oſtenſæ æquali ſemidiametro ipſius circuli, reſultabit triangulum æquilaterum DBE, ſeu iſoſceles, cuius anguli duo in D & E erunt æquales ad baſim DE, per propoſ. 5. libr. 1. ſunt autem oſtenſi duo anguli ad F deinceps, recti, ideoque æquales; ergo per noſtrum coroll. 3. ad propoſ. 32. libr. 1. in triangulis BFD, BFE, reliqui duo anguli FBD, FBE, erunt æquales: æquiangula ergo erunt iſta duo triangula FBD, FBE; & per 4. propoſ. libr. 6. erit BF ad FD, vt BF ad FE; ideoque per propoſ. 9. libr. 5. æquales erunt rectæ FD, FE. ſecatur ergo DE biſariàm in F, ab latere BC.

### COROLLARIVM NOSTRVM

### I.

*Tota diameter ADE, quadrupla eſt recta FD, vel FE. Et ſemidiameter circuli huius dupla FD, vel FE. Et recta ADF, tripla recta DF vel FE. Et recta AF ſeſquilatera recta AD ſeu ſemidiametri.* Fig.293.

### COROLLARIVM NOSTRVM

### II.

*Latus trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt linea perpendicularis ab vno angulo ad oppoſitum latus deducta.*

IN triangulo æquilatero ABC demiſſa ſit recta perpendicularis AF ab angulo BAC ad oppoſitum latus BC; quod ſecabit in F, eſt angulum BAC biſariàm diuidet per coroll. noſtrum primum ad propoſ. 32. libr. 1. Dico latus AB eſſe potentia ſeſquitertium rectæ AF. Fig.293.

Nam per 4. propoſ. libr. 1. recta BC biſariàm ſecabitur in F ab recta AF, quia latera BA, AF, ſunt æqualia lateribus CA, AF, anguloſque continent æquales, ergo per 4. propoſ. citat. baſes BF, CF erunt æquales. Iam vero quia latus AB duplum eſt lateris BF, erit per noſtrum corollar. propoſ. 20. libr. 6. quadratum rectæ AB quadruplum quadrati rectæ BF: eſt autem quadratum rectæ AB æquale quadratis rectarum BF, AF, per propoſ. 47. libr. 1. Ergo ſi ſtatuamus quadratum lateris

lateris AB 4 partium æqualium, quadratum rectæ BF erit vnius talium partium, quod quadratum rectæ BF ſi detrahamus ex quadrato rectæ AB, relinquentur tres partes illarum 4. pro quadrato rectæ AF; eſt autem 4 ſeſquitertium numeri 3, ergo quadratum rectæ AB ſeſquitertium eſt quadrati rectæ AF, quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Si ab angulo trianguli æquilateri ad oppoſitum latus recta linea demittatur perpendicularis, ipſum ſecabit bifariam.*

HOc in explicatione præced. corollarij demonſtrandum eſt.

### COROLLARIVM NOSTRVM IV.

*Recta linea ducta ab angulo trianguli æquilateri circumſcripti circulo per centrum eius ad oppoſitum latus illi angulo, ſecat hoc latus ad angulos rectos & bifariam.*

HOc demonſtratum in conſtructione.

## PROPOSITIO XIII.

Pyramidem conſtituere, & data ſphæra complecti; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.

Fig.294. SVppoſitio clara eſt. Accedamus ad conſtructionem. Sphæra aliqua intelligatur ſecta plano per eius centrum L tranſeunte; ſectio communis erit circulus ACB centrum L commune habens cum ipſa ſphæra, iuxta corollar. noſtrum 1. ad propoſ. 17. libr. 12. tùm per propoſ. 9. libr. 6. ab diametro ALB ducta in hoc circulo ACB, auferatur BD tertia eius pars; relinquetur AD dupla ipſius BD; & tota AB tripla erit ipſius BD, & tota AB erit ſeſquialtera ipſius AD. Excitetur deinde per propoſ. 11. lib. 1. ex puncto D, recta DC perpendicularis diametro AB; & ducantur rectæ CA, CD, Iam verò ſumpta HE æquali ipſi DC; interualloque huius HE, centro H deſcribatur circulus FEG, in quo triangulum EFG inſcribatur per 2. propoſ. li. 4. tùm rectæ lineæ HE, HF, HF, immittantur, quæ erunt æquales inter ſe ex natura circuli. Præterea per propoſ. 12. libr. 11. ex centro H circuli facti EFG, excitetur ad planum ipſius circuli, recta linea HI perpendicularis, æqualiſque ponatur ipſi rectæ AD per 3. propoſ. libr. 1. Denique ex I ad angulos E, F, G, trianguli æquilateri prædicti tranſmittantur. Dico primo ſolidum contentum quatuor triangulis EFG, IEF, IFG, IGE, eſſe Pyramidem ſeu Tetraedrum definitum in defin. 26. libr. 11. Dico ſecundò hanc Pyramidem eſſe ſphæra comprehenſam cuius diameter ſit recta AB. Dico tertiò diametrum AB huius ſphæræ comprehendentis Tetraedrum prædictum iuxta defin. 31. vel 32. lib. 11. eſſe ſeſquialteram lateris EF, plani huius Tetraedri.

Demonſtratio. 1. aſſertionis. Quia in triangulis CDA, EHI, duo latera CD, DA, ſunt æqualia relatiuè duobus lateribus EH, HI, per conſtructionem; & angulus CDA rectus eſt, per conſtructionem, tùm angulus EHI per 3. defin. lib. 11. erunt per 4. propoſ. libr. 1. baſes AC, EI æquales. Eodem artificio probabuntur baſes AC, FI æquales, tùm baſes AC, GI. Præterea quia per coroll. prop. 8. libr. 6. Eſt AD ad DC, vt DC ad DB; erit per coroll. propoſ. 20. libr. 6. vt AD ad DB, ita quadratum rectæ AD ad quadratum rectæ DC; & componendo per corollar. prop. 18. libr. 5. vt AB ad DC, ita quadrata ſimul rectarum AD, DC, vel quadratum rectæ AC æquale illis per 47. propoſ. libr. 1. ad quadratum rectæ DC; ſed recta AB per conſtructionem tripla eſt rectæ DB, ergo etiam quadratum rectæ AC triplum erit quadrati rectæ DC; ſed per propoſ. præced. 12. quadratum rectæ EF, vel rectæ FG, vel rectæ GE, laterum trianguli æquilateri, triplum eſt quadrati rectæ DC, vel HE, vel HF, vel HG æqualium per conſtructionem; ergo quadrata rectarum AC, EF, vel FG, erunt æqualia per 6. axio. libr. 1. ideoque rectæ AC, EF, FG, GE, æquales erunt per noſtrum coroll. 4. ad propoſ. 46. libr. 1. Et quia oſtendimus rectas EI, FI, GI, eſſe æquales, erunt triangula quatuor EFG, EFI, FGI, GEI, æquilatera, & per coroll. propoſ. 8. libr. 1. æqualia: quæ cùm componant tetraedrum ſub illis ipſis quatuor triangulis, ipſum tetraedrum definitum 26. defin. 11. conſtruximus, vti fuit propoſitum.

Demonſtratio 2. aſſertionis. Producta intelligatur recta IH vltra H, & poſita HK æqualis ipſi DB, per propoſ. 3. lib. 1. erit tota IK

IK æqualis ipſi AB, nam ſi æqualibus poſitis antea IH, AD, æquales addantur HK, DB, fient ęquales totæ AB, IK; eſt autem per conſtructionem angulus EHI, rectus, vt angulus ADC, & rectæ DC æqualis poſita HE: quemadmodum ergo per corollar. propoſ. 8. libr. 6. tres rectæ lineæ AD, DC, DB, ſunt proportionales, erunt etiam tres illis æquales eodemque ordine erunt proportionales IH, HE, HK: & quia etiam oſtenſæ ſunt æquales HG, HF, ipſi HE vel DC, ſingulæ; & oſtenſæ perpendiculares ipſi IHK in H; erunt eodem modo tres iſtæ rectę proportionales IH, HG, HK, tùm iſtæ aliæ tres IH, HF, HK; quarum omnium mediæ HG, HF, HE, pèrpendiculares toti IHK cōpoſitæ & extremis IH, HK, ſicut media alia DC perpēdicularis eſt compoſitæ ADB, ab extremis AD, DC. Iam verò ſi circulus deſcribatur circa rectam IK compoſitam ex duabus extremis IH, HK, tranſibit per extrema E, F, G, rectarum HE, HF, HG, perpendicularium ipſi rectæ IK; quemadmodum recta DC æqualis cuilibet dictarum trium, perpendicularis rectæ AB æquali ipſi IK, & compoſitæ ab AD, DB, æqualibus prædictis IH, HK, admittit in ſuo extremo C circumferentiam circuli ACB, deſcripti circa totam AB: ſi enim circumferentia eiuſdem circuli circa diametrum IK deſcripti compoſitam ab duabus extremis rectis IH, HK, non tranſiret per extremum E, vel F, vel G, rectarum mediarum HE, HF, HG, inter prædictas duas IH, HK, perpendiculares totali IK in puncto H; fingendo rectam AD loco rectæ IH, & rectam DB loco rectæ IK, & rectam DC loco cuiuſuis rectarum HE, HF, HG, circuli circumferentia deſcripti circa AD, non tranſiret per C extremum ſed vel infra in M, aut ſupra in N; ſemper per propoſ. 31. libr. 3. angulus AMB vel ANB, in ſemicirculo eſſet rectus, ideoque per coroll. propoſ. 8. lib. 6. recta MD, vel ND eſſet media proportionalis inter rectas AD, DB, vt eſt oſtenſa DC; atque adeo per 17. propoſ. libr. 6. quadrata rectarum DC, DM, vel DN, eſſent æqualia rectāgulo eodem ſub AD, DB; ideoque æqualia inter ſe quadrata rectarum DC, DM, vel DN; & per corollar. noſtrum 4. ad propoſ. 46. lib. 1. æquales rectæ DC, DM vel DN, totum & pars, quod eſt abſurdum; ergo abſurda erit poſitio quod circuli circumferentia deſcripti circa rectam compoſitam ab duabus extremis rectis, non tranſeat per extremum mediæ rectæ proportionalis inter illas duas extremas, perpendicularis ipſi compoſitæ in extremo ipſis communi: idem ergo circulus deſcriptus circa IK incedet ſi circumuoluatur circa diametrum IK in[illegible]am, tranſibit per puncta E, F, G, I, quæ ſunt vertices triangulorum prædictorum quatuor æquilaterorum & æqualium EFG, EIF, FIG, GIE, termināntium tetraedrum prædictum factum; igitur ſphæra facta per hanc circumuolutionem, iuxta defin. 14. libr. 11. circumſcribet ſeu complectetur tetraedrum prædictum per defin. 32. lib. 11. quod erat ſecundo loco propoſitum ac demonſtrandum.

Demonſtratio 3. aſſertionis. Quia per 2. partem coroll. prop. 8. libr. 6. tres rectæ lineæ ſunt proportionales, AB, AC, AD; erit per coroll. propoſ. 20. libri eiuſdem 6. vt AB ad AD, videlicet per conſtructionem in proportione ſeſquialtera; ita quadratum rectæ AB ad quadratum rectæ AC, etiam in proportione ſeſquialtera: ſed oſtendimus diametrum ſphæræ comprehendentis tetraedrum factum eſſe æqualem diametro ſeu rectæ AB, & latus quoduis ipſius tetraedri eſſe rectam æqualem ipſi AC; ergo diameter ſphæræ huiuſmodi erit potentia ſeſquilatera lateris tetraedri in ea inſcripti, quod erat tertio loco propoſitum ac probandum.

### COROLLARIVM I.

*Diameter ſphæra circumſcribentis tetraedrum, eſt potentia quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri circuli baſim tetraedri circumſcribentis.*

NAm ex poſtrema aſſertione huius proportionis quadratum rectæ AB diametri ſphæræ datæ eſt ſeſquialterum quadrati rectæ AC æqualis lateri cuilibet tetraedri dati; & per propoſ. 12. libri huius, quadratum rectæ AC ſeu lateris EF trianguli æquilateri EFG circulo inſcripti cuius ſemidiameter eſt HE vel DC æqualibus per conſtructionem, & triangulum illud æquilaterum eſt vna è ſuperficiebus tetraedri dati: ergo cum quadratum rectæ AB ſeu diametri ſphæræ circumſcribētis tetraedrum datum, erit quadruplum ſeſquialterum quadrati DC vel ſemidiametri circuli circumſcribentis vnum è triangularibus planis tetraedri dati. Fig. 194.

### COROLLARIVM II.

*Recta perpendicularis ab centro ſphæra tetraedrum circumſcribentis ad planum triangulare huius tetraedri; eſt ſexta pars diametri ſphæra prædictæ, vel tertia ſemidiametri eius.*

CVm enim oſtenderimus diametrum ſphæræ huius corollarij eſſe æqualem ipſi rectæ AB, centrum L erit centrum vel Fig. 194.

loco

loco centri huius ſphæræ, cùm ſit centrum circuli ACB tranſeuntis per centrum huius ſphæræ;& cùm poſuerimus rectam HI æqualem ipſi AD; recta LD erit æqualis rectæ demiſſæ ab centro L ſphæræ ad planum EFG vnius triãgulare tetraedri dati vel facti. Iam vero probandum eſt ex dictis in demonſtratione huius propoſitionis rectam LD eſſe ſextam partem totius AB, vel tertiam LB. Quia in conſtructione poſuimus rectam AB totam eſſe triplam rectæ DB, ſi tria bifariàm ſecemus, quælibet pars erit LA vel LB $1\frac{1}{2}$; ex quarum alterutra puta LB ſi detraxerimus DB poſitam ſubduplam rectæ AD, relinquetur $\frac{1}{2}$ pro tertia parte ipſius LB vel LA ſemidiametri, vel $1\frac{1}{2}$;& pro ſexta parte totius diametri AB 3. ergo recta LD perpendicularis à centro ſphæræ huius ad planum triangulare tetraedri huius, erit tertia ſemidiametri, vel ſexta pars diametri ſphæræ prædictæ.

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Altitudo tetraedri eſt ſubſeſquialtera diametri ſphæra circumſcribentis ipſum.*

Fig.294. NAm IK oſtenſa æqualis diametro circuli circa diametrum AB æqualem diametro ſphæræ huius; & poſita HI altitudo tetraedri huius adæquans rectam AD poſitam ſubſeſquialteram totius AB; ergo altitudo tetraedri eſt ſubſeſquialtera diametri ſphæræ circumſcribentis ipſum.

COROLLARIVM NOSTRVM

I I.

*Qualium partium 9 ponetur quadratum diametri ſphæra huius, talium 4 erit quadratum altitudinis tetraedri huius.*

Fig.294. POnitur enim AB diameter ſphæræ, 3. partium, & altitudo tetraedri AD ſeu HI, duarum. harum quadrata ſunt 9,& 4.

COROLLARIVM NOSTRVM

I I I.

*Si fuerint tres recta linea proportionales, duæq; extrema poſita in directum, & media perpendicularis ipſi in puncto communi illarum extremarum: circulus factus circa compoſitam illam rectam ex dualus extremis, veluti circa diametrum, incedet per extremum aliud media recta.*

DEmonſtratio allata in probatione ſecundæ aſſertionis ſatisfacit huic corollario.

COROLLARIVM NOSTRVM

I V.

*Si triangula quatuor æquilatera æqualia fiant, iuxta adiunctam figuram, ita vt complicari poſſint, reſecta ferè toto ſubiecto horum triangulorum iuxta communes rectas lineas: conficietur Tetraedrum.*

NAm primum & tertium eleuata & inclinata ad inuicem, eorum duo latera AB, BC, æqualia, adæquabuntur, puncta A & C confluent manente immoto ſecundo: tùm inclinando quartum ad partem vacuam, latera EF,ED æqualia etiam adæquabuntur, & latera etiam CF, AD; punctaque F & D confluent in vnum; atque ita comprehenſum erit ſpatium ſub quatuor æquilateris & æqualibus triangularibus planis, quod eſt per def.26.libr.11.tetraedrum. Fig.295.

COROLLARIVM NOSTRVM

V.

*Si triangula alia quatuor æquilatera & æqualia fiant, ſecundum hanc aliam figuram, ita vt complicari poſſint ſecundum latera communia medio; conficietur Tetraedrum.*

NAm ad ſe inuicem inclinabuntur tria medium inutile circumſtantia eorumque latera duo quia æqualia adæquabuntur, verticeſque illorum A, B, C, in vnum punctum quod erit vertex tetraedri vnum, reliqua vero tria erunt anguli trianguli medij. Fig.296.

## PROPOSITIO XIV.

Octaedrum conſtituere, & ſphæra complecti quâ & pyramidem ſeu tetraedrum: & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri?

CVm ſit clara propoſitio, ſuppoſitio non eget. Sit itaque conſtructio propoſiti. Fig.297.
Aſſumatur ſphæræ comprehendentis tetraedrum, diameter AB, circa quam ſit ſemicirculus

erit duplum quadrati lateris ipſius octaedri. quod erat concludendum.

COROLLARIVM I.

Fig.297. *Tres diametri KL, EG, FH, octaedri, ſe mutuò ſecant ad angulos rectos in I, communi puncto.*

COROLLARIVM II.

*Octaedrum diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales, baſim communem quadratam habentes, & æquales altitudines.*

Fig.297. NAm oſtendimus quatuor triangularia plana illorum eſſe æqualia & ſimilia, ergo per defin. 10. libr. 11. erunt ſimiles & æquales illæ duæ pyramides octaedri, quarum altitudines IK, vel IL, oſtendimus eſſe æquales.

COROLLARIVM III.

*Tetraedri latus eſt potentia ſeſquitertium lateris octaedri in eadem ſphæra inſcriptorum.*

SI enim ponatur quadratū diametri ſphæræ eſſe ſex partium æqualium, erit per præced. propoſ. 13. quadratum latus tetraedri quatuor illarum partium, videlicet ſubſeſquialterum. Et quia per hanc propoſ. diameter eiuſdem ſphæræ eſt potentia dupla lateris octaedri, quadratum lateris octaedri trium partium, qualium eſt ſex quadratum diametri ſphæræ. quare quadratum 4, ad quadratum 3 erit ſeſquitertium hoc eſt latus tetraedri erit potentia ſeſquitertia lateris octaedri in eadem ſphæra inſcriptorum.

COROLLARIVM IV.

*Plana oppoſita octaedri erunt parallela.*

Fig.297. QVia enim in quadrato EFGH, recta EH eſt parallela rectæ FG, quia eſt parallelogrammum quadratum; & quadrilatera figura ELGK eſt quadrata, nam anguli circa I ſunt oſtenſi æquales recti facti ab duabus diagonalibus KIL, EIG, & rectæ IE, IK, IG, IL, oſtenſæ ſunt æquales, erunt æquales anguli ad baſes æquales KG, KE, EL, LG oſtenſas æquales, per 4. propoſ. & 1. ax. libr. 1. ideoque ſemirecti omnes per 2. coroll. propoſ. 32. libr. 1. erunt dicti anguli omnes ſemirecti; component ergo duo ex illis angulos rectos quadrilateri prædicti ELGK, quod cùm ſit oſtenſum æquilaterum, erit per defin. 29. libr. 1. quadratum, cuius latera duo oppoſita EK, GL, erunt ex dictis parallela: ergo per propoſitionem 15. libr. 11. planum triangulare EHK incedens per duas rectas EH, EK, erit parallelum plano triangulari FGL ducto per rectas duas FG, GL, & ſic de reliquis planis triangularibus oppoſitis octaedri erit philoſophandum.

COROLLARIVM NOSTRVM I.

*In quadrato duæ diametri ſunt æquales inter ſe, & ſe mutuò ſecant biſariàm, & ad angulos rectos, & ſegmenta harum diametrorum ſunt æqualia, ex puncto ſectionis mutuæ.*

COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Si octo triangula æquilatera & æqualia fiant iuxta hanc formam, in aliqua materia plicatili in lateribus ipſis communibus; component octaedrum.*

COmplicando enim latera communia BF, CF, EF, & applicando latus EI lateri FG ita vt puncta I & G confluant in vnum, reſultabit pyramis vna verticem habens F, comprehenſa ab quatuor triangularibus planis ſecundò tertiò quartò & quintò, & ab baſi quadrata laterum iſtorum quatuor BC, CG, BE, EI vel EG, confluentibus punctis I & G in vnum. Quod plana triangulari primum & ſextum inclinentur ad inuicem concurrentibus punctis A & D in vnum; tùm octauum inclinetur ita vt punctum K incidat in punctum B; tùm inclinetur ſeptimum concurrente pūcto H cum puncto E, concludetur ſpatium ſolidum ſubhis octo planis triangularibus æquilateris & æqualibus, quod erit per defin. 27. libr. 11. octaedrum. Fig.298

## PROPOSITIO XV.

**Cubum conſtituere, ſeu Hexaedrum: & ſphæra complecti, qua & priores figuras: & demonſtrare quod ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.**

SVppoſitio clara eſt. Conſtructio ſit huiuſmodi: Sit AB diameter ſphæræ comprehendentis tetraedrum & octaedrum; & Fig.299.

 circa

circa hanc diametrum AB ſit ſemicirculus ACB, & per propoſ.9. libr.6 auferatur totius AB, pars tertia BD; erit AB tota tripla ipſius BD, & AD dupla ciuſdem BD. Præterea per propoſ.11.lib.1. excitetur in D, recta DC perpendicularis toti AB, ſecanſque ſemicirculum in C, ex quo tranſmittantur rectæ CA, CB, quæ cum AB efficient triangulum ACB rectangulum, ob angulum ACB rectum per prop.31. lib.3. Ad hæc per prop. 46.lib.1. ſuper recta EF æquali ipſi BC, fiat quadratum EFGH; & per prop.12.lib.11.ex ſingulis eius angulis educantur ad eius planum rectæ lineæ perpẽdiculares EI, FK, GL, HM, quæ fiant æquales ipſi BC per prop. 3. lib.1. denique tranſmittantur rectæ ML, LK, KI, IM, erunt per 1.ax.libr.1. æquales inter ſe & quatuor rectis quadrati EFGH. Iam verò quoniam per conſtructionem duæ rectæ EI, FK, ſunt perpendiculares eidem plano EFGH, erunt per propoſ.6.libr.11.parallelæ inuicem; & quia ſunt æquales oſtenſæ; erunt rectæ EF, IK, parallelæ & æquales per prop. 33.libr.1.parallelogrãmum ergo erit EIKF, cuius latera tria EI, IK, KF, cùm ſint probata ęqualia lateri EF, erit parallelogrãmum iſtud quadratum, ob angulos rectos EFK, IEF, per conſtructionẽ, & alios eis oppoſitos etiam rectos per prop. 34. lib.1. Ex eiſdem principiis oſtendentur eſſe quadrata FGHK, GLMH, AMIE. Et quia duæ rectæ lineæ HE, EF, ſunt parallelæ duabus rectis lineis MI, IK, reſpectiuè, erunt per prop.15.libr.11.parallela plana HF, MK, per illas applicata: Eadem ratione oſtendentur plana EM, FL, parallela; tùm plana EK, HL. Solidum ergo habemus ſex planis comprehenſum, ergo per prop.24.libr.11. aduerſa eius duo plana HF, MK, erunt parallelogramma ſimilia & æqualiá; eſt autem planum HF quadratum, ergo aliud MK planum, erit etiã quadratum. Hoc verò ſolidum comprehenſum ſex illis planis HF, MK, EM, FL, EK, HL, Dico primò eſſe cubum. Secundò includi in ſphæra in qua tetraedrum & octaedrum præcedentia. Tertiò ſphæræ huius diametrum eſſe potentia triplum lateris huius cubi vel hexaedri.

Demonſtratio primæ aſſertionis. Oſtendimus ſex illa plana comprehendentia ſolidum hoc factum, eſſe quadrata; & æqualia ſunt per corollar.3. noſtrum ad propoſ.46.lib.1. quia ſunt ſub rectis æqualibus oſtenſis: ergo per definitionem 25.lib.11. ſolidum hoc factum erit cubus ſeu hexaedrum.

Demonſtratio ſecundæ aſſertionis. Quia quadrati diametri ſunt æquales inter ſe per corollar. noſtrum primum ad propoſit. præcedent. & diametri quadratorum æqualium ſunt æquales, per applicationem prop.4. libr. 1. ſit vt quadratorum æqualium continentium cubum, diametri MG, HL, IF, EK, ſint æquales inter ſe; ideoque ſemiſſes illarum æquales ab puncto communi in quo ſe mutuò ſecant in eodem quadrato, vel æqualibus quadratis, & ad angulos rectos, per citat. corollar. noſtrum. Si ergo quadrata æqualia iſtarum diametrorum æqualium addantur quadratis æqualibus laterum æqualium quadratorum æqualium, fient duo quadrata ſimul æqualia duobus quadratis ſimul per 1. axio. libr. 1. erunt quadrata rectarum MG, GF, æqualia quadratis rectarum IF, FG, & quadratis rectarum LH, HG, & quadratis rectarum KE, EH; quæ ideò erunt æqualia inter ſe, per 1. axio. libr.1. Ergo per propoſ. 47.libr.1. quadrata rectarum MF, GI, HK, EL, oppoſitarum angulis rectis quos efficiunt per defin. 3. libr.11. latera quadratarum baſium cubi orthogoniarum aliis baſibus eiuſdem cubi quibus adhærent, applicatarum ad latera perpendicularia ipſis, iuxta propoſ.18. libr. 11. æqualia illis duobus quadratis ſimul ſumptis, erunt æqualia inter ſe, per 1. axio. libr.1. ipſæque diagonales cubi EL, HK, MF, GI, æquales erunt per coroll. noſtrum 4. ad propoſ.46.libr.1. & quia per coroll. propoſ. 39. libr. 11. diametri omnes cubi, videlicet EL, HK, MF, GI, ſe mutuò ſecant bifariàm in vno puncto P, ſemiſſes illarum æqualium oſtenſarum erunt æquales, videlicet PM, PF, PI, PG, PH, PK, PL, PE. Ergo ſi ſemicirculus concipiatur factus centro P, interuallo PL, tranſibit per extremũ æqualis PE totius rectæ EPL; & ſi concipiatur reuolui manente diametro EPL, integra reuolutione, tranſibit per extrema rectarum aliarum æqualium ab eodem centro P egredientium prædictarum PM, PF, &c. hoc eſt per angulos omnes cubi, & ſic cõprehendetur ab ſphæra iuxta def.31. vel 32.lib.11. effecta iuxta def.14. libri eiuſdem. Iam verò quia in triangulo rectangulo EFK quadratum rectæ EK æquale eſt per propoſ.47. libr.1. quadratis rectarum æqualium EF, FK, ideoque æqualibus per coroll. noſtrum 3. ad propoſit. 46. libr. 1. duplum erit quadratum rectæ EK quadrati rectæ EF, vel BC æqualium: ergo ſi quadrato rectæ EK addamus quadratum rectæ KL æqualis ipſi BC, duo quadrata ſimul rectarum EK, EL, ſumpta, erunt tripla quadrati rectæ KL vel BC; eſt autem in triangulo rectangulo EKL, quadratum rectæ EL æquale quadratis rectarum EK, KL; ergo per 11.prop.lib.5. quadratum rectæ EK erit triplum quadrati rectæ KL vel BC. Sed per coroll. propoſ.8. libr.6. cùm ſit AB ad BC

vt

vt BC ad BD; & per conſtructionem ſit AB ad BD tripla, erit per coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt AB ad BD; ita quadratum ſuper AB ad quadratum ſuper BC; hoc eſt quadratum ex AB triplum erit quadrati ex BC. Cùm igitur quadrata rectarum EL, AB, ſint tripla quadrati ex BC, erunt per propoſ. 9. lib. 5. æqualia quadrata rectarum EL, AB; ideoque per coroll. noſtrum 4. ad prop. 46. lib. 1. rectæ lineæ AB, EL, erunt æquales, atque adeo circuli circa illas æquales per defin. 1. libr. 3. & ſphæræ ex illis effectæ æquales ex dictis in definit. 14. libr. 11. ſed ſphæra diametri AB, comprehendebat tetraedrum & octaedrum, & ſphæra huic æqualis ſub diametro EL æquali ipſi AB, comprehendit cubum. ergo æqualis ſphæra comprehendit tetraedrum, octaedrum, & cubum. quod erat concludendum.

Demonſtratio tertiæ aſſertionis iam allata eſt, cùm oſtenderimus diametrum EL ſphæræ circumſcribentis cubum factum eſſe potentia triplum latis LK, vel BC, cubi facti.

## COROLLARIVM I.

*Diametri omnes cubi ſunt inter ſe æquales, & ſe mutuo biſariàm ſecant in vno communi puncto, quod eſt centrum ſphæræ circumſcribentis ipſum.*

Fig. 299. PRima pars oſtenſa eſt in diametris EL, HK, MF, IG, æqualibus, ſe mutuò ſecantibus in vno puncto P communi iuxta coroll. propoſ. 39. libr. 11. & quia probauimus ſe mutuò ſecare biſariàm in dicto puncto P, quod eſſe centrum ſphæræ cubum iſtum circumſcribentis oſtendimus, manifeſtum erit corollarium iſtud.

## COROLLARIVM. II.

*Potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi; æqualis eſt potentiis laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis.*

Fig. 299. NAm per prop. 13. qualium partium eſt quadratum diametri ſphæræ, 9, talium eſt 6, quadratum lateris tetraedri, illud exiſtens ſeſquialterum huius; & per iſtam propoſitionem cùm ſit quadratum diametri ſphæræ huius triplum quadrati lateris cubi, ſi ponatur 9 partium earundem quadratum diametri ſphæræ ſeu cubi, talium erit 3, quadratum lateris cubi: Iam verò ſi 6 & 3 addantur, cùm efficiant nouem, manifeſtum eſt hoc corollarium ſecundum.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Quadratorum æqualium diametri omnes ſunt æquales inter ſe, & ſemidiametri item æquales.*

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Quatuor plana cubi conſiſtunt ad angulos rectos ſupra baſim eius.*

NAm ad angulos quatuor baſeos cubi E, F, G, H, ereximus quatuor rectas EI, FK, HM, GL, perpendiculares ipſi baſi quadratæ EFGH; vnde plana quatuor MG, LF, IF, EM, applicata ad has perpendiculares, erunt per propoſ. 18. libr. 11. perpendicularia ipſi baſi EFGH. Fig. 299.

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Si ſex æqualia quadrata iuxta figuram illam in materia plicatili aliqua in lateribus eorum communibus, fiant: ex iis componetur cubus ſeu hexaedrum.*

ELeuando enim ad angulos rectos quadrato ſecundo, circumſtantia quadrata 1, 5, 6, & 3, congruent latera eorum æqualia, & puncta, AL, confluent in vnum; tùm in aliud puncta K, N; tùm in aliud puncta M, D; tùm in aliud puncta G, O: & complicando quartum, ſecundum latus DG, punctum E cum punctis L & A, concurret; & punctum F cum punctis K & N; & ſic ſolidum comprehendent, quod iuxta defin. 25. libr. 5. erit Cubus ſeu hexaedrum. Fig. 300.

## PROPOSITIO XVI.

### Icoſaedrum conſtituere, & ſphæra complecti, qua & antedictas figuras: & demonſtrare quod Icoſaedri latus eſt linea Irrationalis, quæ vocatur Minor.

SVppoſitio clara eſt ex propoſitione, ad conſtructionem veniamus. Sphæræ quæ prædictas figuras tetraedrum, octaedrum, & Fig. 301.

hexaedrum comprehendit, ſit diameter AB, circa quam ſemicirculus ACB. Ex hac recta AB, auferatur per 9. propoſ. lib. 6. pars quinta BD; tota AB quintupla erit rectæ BD; & ipſa tota AB ſeſquiquarta erit ipſius AD; & ipſa AD quadrupla recta BD. Tùm ex prop. 11. libr. 1. erigatur ex D puncto, recta DC ad angulos rectos ipſi AB, ſecans circuli circumferentiam in C; & rectæ AC, BC, tranſmittantur, quæ cum AB recta, triangulum conficient rectangulum ACB, ob angulum rectum ACB per prop. 31. libr. 3. Iam verò ad interuallum EF rectæ æqualis ipſi BC, fiat circulus ex centro E, in quo per propoſ. 11. libr. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribatur FGHIK: tùm per propoſ. 30. lib. 3. diuidantur bifariàm in L, M, N, O, P, arcus laterum pentagoni prædicti, qui cùm ſint æquales inter ſe per coroll. prop. 28. libr. 3. ſemiſſes eorum erunt æquales; & ſi iſtis arcubus decem æqualibus circuli, chordæ ſubtendantur, ipſæ erunt æquales per coroll. noſtrum ad prop. 29. libr. 3. & ideo decem laterum ſeu decagonum æquilaterum & æquiangulum conſtituent. Deinde ex centro E circuli prædicti, & punctis L, M, N, O, P, circumferentiæ circuli prædicti, erigantur per propoſ. 12. libr. 11. perpendiculares rectæ lineæ, eodē ordine quo puncta prædicta, EQ, LR, MS, NT, OV, PX, ponendæ æquales ipſi rectæ EF vel BC, per prop. 3. lib. 1. quæ ideo erunt æquales inter ſe per 1. ax. lib. eiuſdem 1. ſed & parallelæ erunt inter ſe per prop. 6. lib. 11. ergo per propoſ. 33. lib. 1. rectæ duæ lineæ duas quaſcumque ex illis connectentes erunt inter ſe æquales & parallelæ, diſtinctæ commatibus, EL, QR: EM, QS: EN, QT: EO, QV: EP, QX: Et quia rectæ EL, EM, EN, EO, EP, ſunt ex natura circuli æquales ſemidiametro EF circuli facti, vel rectæ BC, erūt æquales inter ſe per 1. axio. libr. 1. tùm etiam ipſis æquales prædictæ QR, QS, QT, QV, QX, erunt æquales inter ſe, & ſemidiametro EF, vel rectæ BC. Quoniam autem per prop. 15. libr. 11. planum per rectas QR, QS, ductum, parallelum eſt plano FGHIK incedenti per rectas EL, EM; tùm planum per rectas QS, QT ductum, parallelum eſt plano eidem FGHIK tranſeunti per rectas EM, EN: contenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per rectas QS, QT, in recta QS: ſi non ſuſtententur iſta duo plana prædicta, vnum incedens per rectas QR, QS; alterum per rectas QS, QT; communem tamen obtinentia rectam QS; in eodem plano RSTQ; cùm ſint oſtenſa parallela plano eidem FGHIK; ipſa ſi concipiatur producta circumquaque in infinitum, ſe mutuò ſecabunt in recta illa communi linea QS: quandoquidem non datur medium in duobus planis cōmunem lineam habentibus, & non ſuſtentatis in eodem plano. Iam verò quia eadē duo plana ſunt oſtenſa parallela plano eidem FGHIK, cùm ipſo non conuenient vlla ratione, iuxta defin. 8. libr. 11. atque adeo ipſum non ſecabunt: ergo ſi per propoſ. 11. libr. 11. ex puncto aliquo plani tranſeuntis per rectas QR, QS, quod non ſit in recta QS, demittatur aliqua recta linea perpendicularis ad planum RSTQ; hæc recta producta in infinitum perforabit obuium planum incedens per rectas QS, QT; tunc autem ex puncto aliquo rectæ QS, ad duo puncta in quibus perforantur plana illa duo, per rectas QS, QR, & QS, QT, ab hac perpendiculari recta, ducantur duæ rectæ lineæ, quarum vna ſuſtentabitur in vno ex illis duobus planis ſe mutuò ſecantibus, altera in alio, & cum perpendiculari prædicta recta, triangulum efficient habens duos angulos rectos ad baſim quæ eſt portio prædictæ perpendicularis rectæ: Recta enim linea perpendicularis vni plano parallelo alteri plano, eſt etiam perpendicularis huic plano parallelo, vt modò probabimus, ergo per 3. def. libr. 11. erit perpendicularis iſta recta ad angulos rectos dictis rectis lineis aliis duabus ſeu lateribus trianguli facti prædicti: hæc porrò conſecutio quod hoc triangulum habeat duos angulos æquales duobus rectis, eſt contra propoſ. 17. libr. 1. falſa ergo erit poſitio vnde procedit, videlicet prædicta duo plana vnum tranſiens per rectas QR, QS, alterum per rectas QS, QT, communem habentia rectam QS, & parallela eidem plano RSTQ, non eſſe in directum, ſeu non ſuſtentari in eodem plano, ſeu ſe mutuò ſecare in dicta recta QS: erunt igitur in eodem plano.

Probemus autem aſſumptum, ſint duo plana AB, CD, parallela, & recta linea FE perpendicularis plano AB; dico quod erit etiam perpendicularis plano CD: Nam ſi concipiatur planum aliquod applicatur ad rectam EF perforantem plana data parallela, AB, CD, & ſecans illa, ſectiones erunt rectæ lineæ GH, IK, parallelæ iuxta propoſ. 16. libr. 11. in quas incidit recta EF; & cùm per def. 3. lib. 11. recta EF ſit ad angulos rectos ipſi GH recta, alter angulus IFE vel KFE, erit per prop. 28. libr. rectus: Quod concipiatur idem planum applicatum rectæ EF, reuolutum circa illam, & ſecans eadem data plana in aliis rectis LM, ON, parallelis, erunt anguli OFE, NFE, tàm recti quàm alij duo LEF, MEF, ex eiſdē citatis principiis; Cùm igitur habeamus rectam EF, rectam lineam EF, rectis duabus lineis IK, ON, ſe mutuò ſecantibus in F, in Fig. 302.

puncto

puncto F ſectionis, ad angulos rectos inſiſtentem, erit per prop. 4. recta EF, ad angulos rectos ipſi plano CD ſuſtentanti dictas rectas IK, ON, quod erat oſtendendum.

Fig. 301. Eodem artificio probabimus planum per rectas QT, QV, & planum per rectas QR, QS, QT, vnum conſtituere planum; & hoc planum conſtitutum ex illis prædictis, vnum efficere planum cum plano per rectas QV, QX, & cum plano per rectas QX, QR: Quare rectæ lineæ quinque, QR, QS, QT, QV, QX, in eodem ſuſtinebuntur plano. Iam verò ſi ex centro Q, interuallo QR, circulus deſcribatur in plano prædicto ſuſtentante illas quinque rectas lineas ex Q procedentes æquales, circumferentia illius tranſibit per alia puncta S, T, V, X, iuxta 25. axio. libr. 1. eritque hic circulus æqualis circulo FGHIK, per 1. def. lib. 3. Porrò puncta R, S, T, V, X, nectantur hiſce rectis RS, ST, TV, VX, XR. Nunc autem quia LR, PX, æquales ſunt & parallelæ, per propoſ. 6. libr. 11. ſi concipiatur ducta LP recta, erunt per 33. prop. libr. 1. parallelæ & æquales rectæ lineæ RX, LP; quæ iuxta prop. 28. lib. de circulis æqualibus detrahent arcus æquales; ſed recta LP ſubtenditur quintæ parti circuli FGHIK: ergo etiam recta alia RX, ſubtendetur quintæ parti circuli alterius æqualis RSTVX prædicto: & eadem ratione oſtendemus alias rectas RS, ST, TV, VX, ſubtendi quintis partibus eiuſdem circuli; quare pentagonum erit æquilaterum RST VX in dicto circulo inſcriptum. Præterea immittantur ex angulis pentagoni huius ad angulos pentagoni alterius FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quoniam ergo recta perpendicularis LR æqualis poſita eſt diametro EF, ſeu lateri hexagoni circuli FGH IK, & recta LF eſt per conſtructionem latus decagoni, in eodem circulo inſcripti, erit per propoſ. 10. libr. huius, quadratum lateris pentagoni æquale quadratis rectarum LR, LF; eſt verò per propoſ. 47. lib. 1. eiſdem quadratis quadratum rectæ FR æquale, eo quod in triangulo FLR, angulus in L ſit rectus per defin. 3. libr. 11. ergo quadratum rectæ FR, æquale eſt quadrato lateris pentagoni; quare recta FR, æqualis erit pentagoni lateri LP, vel FG, vel rectæ RX æquali oſtenſæ ipſi LP. Simili modo concludentur reliquæ rectæ lineæ RG, SG, SH, &c. prædictæ, reliquis lateribus vtriuſque pentagoni æquales. Vnde decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erũt, & inter ſe æqualia per coroll. prop. 8. lib. 1. Inſuper recta linea EQ, in vtramque partem producatur, & per propoſ. 3. libr. 1. ſumantur in ea, rectæ lineæ æquales QY, EZ, æquales lateri FL decagoni, & connectantur rectæ lineæ VQ, VY, XQ XY, GE, GZ, HE, HZ. Quia igitur QX eſt ſemidiameter circuli RSTVX, hoc eſt latus hexagoni, & QY eſt latus decagoni eiuſdē circuli, erit per 10. prop. libr. huius, quadratum XV lateris pentagoni æquale quadratis rectarum QX, QY; ſed eſt per propoſ. 47. lib. 1. eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, eo quod angulus VQY rectus ſit per def. 3. libr. 11. (cùm enim plana circulorum FGHIK, RSTVX, ſint parallela oſtenſa, ſitque EQ perpendicularis plano FGHIK per conſtructionem, erit ex antedictis etiam orthogonia alteri circulo RSTVX, recta EQ, ideoque ad angulos rectos ipſi rectæ QX:) ergo quadratum rectæ XY æquale erit quadrato rectæ XV, & rectæ ipſæ æquales per coroll. noſtrum 4. ad prop. 46. libr. 1. ſimili ratione probabuntur rectæ XV, VY, æquales; quare triangulum VYX, æquilaterum erit. Quod ſi ducerentur rectæ lineæ RY, SY, TY, quas ob confuſionem vitandam in figura non duximus, eodem artificio demonſtrabantur quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera & æqualia triangulo VYX; & etiam anterioribus decem triangulis enumeratis, quandoquidem omnium illorum latera ſint æqualia lateribus pentagoni. Simili ratiocinio æquilaterum probabitur triangulum GZH; (quia EG eſt latus hexagoni, ſeu ſemidiameter, & EZ latus decagoni, anguluſque GEZ rectus per defin. 3. libr. 11.) tùm etiam quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, quorum tamen latera omnia, ne cõfunderetur delineatio, non duximus; quæ omnia antedictis quindecim triangulis æquilateris, æqualia erunt ob cauſam allatam. Quia ergo viginti triangula huiuſmodi, æqualia & æquilatera, vniuntur per lineas rectas quæ ſunt eorundem latera, & ob id ſpatium ſolidum comprehendant; conſtituent ex def. 29. lib. 11. Icoſaedrum.

Age verò, demonſtremus hoc Icoſaedrum ſphæra diametri AB comprehendi, qua & alia corpora, videlicet Tetraedrum, octaedrum, & hexaedrum.

Secetur per propoſ. 19. libr. 1. recta EQ bifariàm in A, & tranſmittantur rectæ AF, AX, AV. quandoquidem latera AQ, QV, trianguli AQV, ſunt æqualia lateribus AQ, QX, trianguli AQX, nam QV, QX, ſunt ſemidiametri circuli RSTVX, & anguli AQV, AQX, ſunt æquales, vtpotè recti per defin. 3. libr. 11. erunt per 4. prop. libr. 1. baſes AV, AX, æquales. Quod ſi ducerentur omnes rectæ ex puncto A, & ex puncto Q, ad R, S, T, probarentur ex eiſdē principiis æquales inter

 ſe,

ſe, & ipſis AV, AX. Inſuper quoniam latera AQ,QX, trianguli AQX, æqualia ſunt lateribus AE,EF, triãguli AEF, nam QX,EF, ſunt ſemidiametri circulorũ prædictorum æqualium, & EQ diuiſa eſt bifariàm in A; & ſunt anguli AQX, AEF, æquales, videlicet recti ex defin. 3. lib. 11. erunt etiam per propoſ. 4. lib. 1. baſes AX, AF, æquales. Pari modo ſi ex A & E, ducantur rectæ ad G,H,I,K, probabuntur æquales AG, AH, AI, AK, & ipſi rectæ AX; quare decem rectæ lineæ ductæ ad angulos decem F,G,H,I,K,R,S,T,V,X, erunt æquales. Quia verò recta QE eſt ſemidiameter, ſeu latus hexagoni circuli FGHIK, iuxta coroll. propoſ. 15. lib. 4. & recta EZ eſt latus decagoni eiuſdem circuli, erit per 9. prop. libr. huius recta QZ diuiſa in E, extrema & media ratione, maiuſque ſegmentum erit recta QE; vnde minus ſegmentum ZE, aſſumens EA, dimidium maioris ſegmenti, hoc eſt AZ, poterit per 3. propoſ. libri huius, quintuplum eius quod ex EA deſcribitur quadrati: ſed recta AF, quintuplum poteſt eiuſdem quadrati rectæ AE; (cùm enim quadratum rectæ EF, quadruplum ſit quadrati rectæ AE, iuxta noſtrum coroll. ad propoſ. 20. lib. 6. quod recta EF dupla ſit rectæ EA; erunt quadrata rectarum EF, EA, ſimul quintupla quadrati rectæ EA: cùm ergo quadratis rectarum EF, EA, æquale ſit quadratum rectæ AF, per propoſ. 47. libr. 1. erit quoque quadratum rectæ AF, quintuplum quadrati rectæ EA.) Igitur æqualia ſunt quadrata rectarum AZ, AF, & per noſtrũ coroll. 4. prop. 46. lib. 1. ipſæ rectæ AZ, AF, æquales erunt. Iam verò cùm recta ZY, ſecetur in A, bifariàm, eo quod ſi æqualibus rectis AE, AQ, rectæ æquales addantur EZ, QY, totæ ZA, YA, æquales erunt per 2. axio. libr. 1. erunt ergo omnes rectæ lineæ ductæ ad omnes angulos Icoſaedri ex A, æquales. Quare ſphæra deſcripta ſit circa diametrum ZY, ex centro A; per omnes angulos, icoſaedri, hoc eſt per extrema duodecim rectarum linearum æqualium oſtenſarum, ex puncto A procedentium, tranſibit; illudque circumſcribet ſeu comprehendet. Quod autem icoſaedrum duodecim tantùm angulos ſolidos obtineat, probatur. Viginti quinque triangulis æquilateris & æqualibus continetur, quæ ſingula tres angulos ſibi vendicant; quare in hiſce viginti triangulis, ſexaginta plani anguli rectilinei continebunt: & quia angulus ſolidus icoſaedri, componitur ex quinque planis angulis rectilineis, ſi ſexaginta angulos illos planos diuidantur per quinque, quotus numerus erit duodecim, pro numero angulorum ſolidorum ipſius icoſaedri.

Hæc porro ſphæra ſic deſcripta ab ſemicirculo habente diametrum ZY, oſtendenda eſt æqualis ſphæræ factæ ab ſemicirculo habente diametrum AB; hoc eſt diametros ZY, & AB, eſſe æquales.

ZA dupla eſt ipſius EA, & QE dupla eiuſdem EA; & YZ dupla ipſius ZA, ſicuti probatum fuit in antecedentibus; ergo per propoſit. 15. libr. 5. erit ZA ad EA, ſicuti YZ ad QE: ergo per propoſit. 22. libr. 6. erit quadratum rectæ ZA, ad quadratum rectæ EA, vt quadratum rectæ YZ ad quadratum rectæ QE. Verum oſtendimus quadratum rectæ ZA, quintuplum eſſe quadrati rectæ EA; ergo quadratum rectæ YZ, quintuplum erit quadrati rectæ QE, hoc eſt per propoſ. 7. libr. 5. quadrati rectæ BC, nam recta QE æqualis eſt poſita ſemidiametro EF, & hæc BF poſita æqualis rectæ BC: ſed etiam quadrati rectæ BC, quintuplum eſt quadratum rectæ AF, (eſt enim per corollar. propoſit. 8. libr. 6. vt AB ad BC, ita BC, ad BD; ergo iuxta propoſit. 20. libr. 6. corollarium, erit vt AB ad BD, ita quadratum rectæ AB ad quadratum rectæ BC; quia verò recta AB quintupla rectæ BD; erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC: Quadrata ergo rectarum YZ, AB, æqualia erunt per 9. propoſit. libr. 5. quare per coroll. noſtrum 4. ad propoſit. 46. libr. 1. rectæ YZ, AB, æquales erunt, ideoque per defin. 1. libr. 3. ſemicirculi ſub his rectis æqualibus, vti diametris, æquales erunt; & ſphæræ factæ ex illis ſemicirculis æqualibus æquales erunt, ex dictis in defin. 14. lib. 11.)

Vltima pars propoſitionis demonſtratur hac ratione. Quia oſtendendum eſt latus Icoſaedri deſcripti eſſe Irrationalem rectam lineam quæ vocatur Minor, reſpectu diametri ſphæræ AB, ipſa AB erit Rationalis per defin. 5. libr. 10. & ipſa AB, probata eſt quintuplum poſſe quadrati rectæ BC, vel EF æqualium rectarum; erit etiam Rationalis ſemidiameter EF circuli FGHIK, per cit. defin. quia quadrata rectarum AB, EF, habent proportionem inter ſe, vt numerus ad numerum, videlicet 5 ad 1, vel 10 ad 2. vnde erunt dicta quadrata commenſurabilia inter ſe per 6. propoſ. libr. 10. vnde etiam dictæ rectæ lineæ AB, EF, erunt commenſurabiles inter ſe, ſaltem potentia. Cùm ergo EF ſemidiameter circuli FGHIK ſit Rationalis, tota diameter eiuſdem circuli erit Rationalis; ſed oſtendimus latus FG pentagoni in illo circulo inſcripti eſſe latus Icoſaedri facti, ergo per propoſ. 11. libri huius, FG recta ſeu latus Icoſaedri facti erit linea recta Irrationalis, quæ vocatur Minor. quod erat vltimò demonſtrandum.

COROL-

### COROLLARIVM I.

*Sphæra diameter eſt potentiâ quintupla ſemidiametri circuli ambientis quinque latera Icoſaedri, & per quinque angulos ſolidos eius incedentis.*

Fig. 301. NAm probauimus quadratum diametri AB quintuplum eſſe quadrati rectę BC, ſeu ſemidiametri EF, circuli FGHIK, ambientis quinque latera FG, GH, HI, IK, KF, icoſaedri facti.

### COROLLARIVM II.

*Sphæra diameter comprehendentis Icoſaedrum, componitur ex latere hexagoni, duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli.*

Fig. 301. NAm YZ diameter ſphæræ comprehendentis Icoſaedrum factum, componitur ex EQ latere hexagoni, ſeu EF ſemidiametro circuli FGHIK, & duobus QY, EZ, lateribus decagoni, in prædicto circulo inſcripti.

### COROLLARIVM III.

*Latera Icoſaedri oppoſita, ſunt parallela.*

Fig. 301. NAm exempli gratia oſtendemus latera RX, HI, eſſe parallela; quia iam probauimus rectas RX, LP, eſſe parallelas: & inter rectas LP, HI, intercipiuntur æquales arcus LGMH, PKOI, videlicet tres arcus decagoni æquilateri, inſcripti in circulo FGHIK, ergo ſi concipiatur recta linea LI traducta, angulus ILP, æqualis erit angulo HIL, per coroll. noſtrum ad propoſ. 27. lib. 3. ergo per propoſ. 27. libr. 1. erunt parallelæ rectæ lineæ LP, HI: ergo per prop. 9. libr. 11. rectæ lineæ RX, HI, oſtenſæ parallelæ eidem rectæ LP, erunt inter ſe parallelæ. Et ſic de reliquis huiuſmodi oppoſitis lateribus Icoſaedri.

### COROLLARIVM NOSTRVM

### I.

*Si duo plana communem habentia rectam lineam, fuerint parallela tertio alicui plano; ſuſtentabuntur in eodem plano, ſeu erunt in directum, ſeu vnum planum conſtituent.*

### COROLLARIVM NOSTRVM

### I I.

*Si fuerint duo plana parallela, & recta linea fuerit vni eorum perpendicularis, perforans aliud, vel incidens in aliud prædictum planum, erit etiam ipſi perpendicularis.*

### COROLLARIVM NOSTRVM

### I I I.

*Icoſaedrum continet angulos ſolidos duodecim, ſingulos compoſitos ex quinque planis angulis æqualibus.*

### COROLLARIVM NOSTRVM

### I V.

*In circulo ſi inter duas chordas, arcus æquales intercipiantur, ipſæ erunt parallelæ.*

### COROLLARIVM NOSTRVM

### V.

*Si deſcribantur huiuſmodi viginti triangula æquilatera æqualia, in materia aliqua plicatili ſecundùm latera communia: reſultabit Icoſaedrum.*

NAm 1.2.3.4. & 5. triangulorum latera disiuncta ſi complicentur, & inclinentur eorum vertices ad inuicem, ipſa latera quia æqualia congruent, & vertices confluent in vnum; ſimili modo latera quinque poſtremorum æqualia congruent, & vertices in vnum concurrent: & ſic ſpatium ſolidum reſultabit concluſum viginti triangulis planis æqualibus & æquilateris, quod per defin. 29. libr. 11. erit Icoſaedrum. Fig. 303.

## PROPOSITIO XVII.

Dodecaedrum cõſtituere; & ſphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonſtrare quod Dodecaedri latus, eſt Irrationalis linea, quæ vocatur Apotome.

SVppoſitio clara eſt, ad conſtructionem veniamus. Sit quadratum ABCD, vna è Fig. 304

 baſibus

baſibus cubi cōprehenſi data ſphæra; & huic quadrato inſiſtat ad rectos angulos aliud æquale quadratum ADEF, ita vt communis amborū ſectio ſit recta AD; oſtendimus enim in corollario noſtro ſecundo ad prop. 15. lib. huius, quatuor plana inſiſtentia baſi quadratæ cubi, eumque efficientia, eſſe perpendicularia ipſi baſi quadratæ. Diuidantur per propoſ. 10. libr. 1. ſingula latera horum duorum quadratorum, bifariàm in G, H, I, K, L, M, N; & in ſingulis quadratis iſta puncta diuiſionum propria, rectis vniantur lineis, ſe mutuò ſecantibus in O quidem in baſi ABCD, & in P puncto in alio quadrato ADEF: Imprimis reſultabunt in ſingulis biſce triangulis parallelogrammata AH, KC; nam æquales AK, BH, rectæ, vtpotè æqualium laterum quadrati ABCD, dimidia, & parallelæ inuicem, quia per coroll. noſtrum 1. ad propoſ. 46. libr. 1. eſt omne quadratum parallelogrammum, reuinciuntur æqualibus & parallelis rectis AB, KH, per propoſ. 33. libr. 1. ſimili modo probabuntur æquales & parallelæ KH, DI, & parallelogrammum KC: tùm etiam parallelogramma AI, GC; quorum quatuor parallelogrammorum cùm anguli duo ſint recti, videlicet communes quadrato toti ABCD, erunt reliqui eorum anguli oppoſiti per 34. propoſ. lib. 1. vnde etiam reſultabunt quatuor parallelogramma rectangula AO, CO, KI, HG, quæ quia duo latera circa angulos quadrati ABCD habent æqualia, videlicet ſemiſſes æquales laterum æqualium dicti quadrati, alia etiam ipſis oppoſita, erunt æqualia per citat. propoſ. 34. libr. 1. quare ex natura quadrati, erunt ipſa dicta quatuor parallelogramma AO, CO, KI, HG, quadrata, in quæ reſoluitur quadratum ABCD, ex ductu dictorum rectarum GI, KI, ſe mutuò ſecantium in O. Quod ſi concipiantur ductæ diametri AO, CO, DO, BO, illorum quadratorum, quia ſubtenentur angulis rectis ipſorum, contentis ab lateribus æqualibus ipſorummet quadratorum æqualium, ob latera eorum æqualia, erunt ipſæ diagonales prædictæ per propoſ. 4. lib. 1. æquales, procedentes ab communi puncto O; igitur per axio. 25. libr. 1. circulus deſcribendus ex O vti centro, & interuallo cuiuſlibet dictarum diametrorum, puto OA, tranſibit per extrema, B, C, D, aliarum; ideoque centrum circuli deſcribendi circa quadratum aliquod, erit in ſectione communi O, dictarum rectarum GI, KI, ductarum ex mediis punctis laterum ipſius quadrati, & parallelarum ipſius lateribus. Quæ diximus in quadrato iſto ABCD, intelligenda ſunt etiam in quadrato ADEF, nam P ſectio communis rectarum MK, NL, parallelarum lateribus eius, eductarum ex mediis eorum punctis, erit centrum circuli circumſcribentis ipſum quadratum ADEF. Iam verò per propoſ. 30. libr. 6. rectæ OK, PL, PN, ſecentur extrema & media ſectione in Q, R, S, ita vt maiora ſegmenta ſint ab punctis O, P; & ex illis punctis Q, R, S, ad plana quadratorum emittantur rectæ lineæ perpendiculares QT, RV, SX, iuxta propoſ. 12. lib. 11. quæ per propoſ. 3. libr. 1. fiant æquales maioribus ſegmentis OQ, PR, PS, quæ erunt æqualia inter ſe, eo quod totæ PN, PL, OK, ſint æquales inter ſe, cùm enim ex defin. 3. libr. 6. ſit tota PN ad maius ſuum ſegmentum PS, ita tota PL, ad ſuum maius ſegmentum PR, & ita tota OK ad maius ſuum ſegmentum OQ; & totæ illæ ſint æquales, erunt per 14. propoſ. libr. 5. maiora earum ſegmenta PS, PR, OQ, æqualia, quæ detracta ab illis totis relinquentur minora earum ſegmenta SN, RL, QK, æqualia: deinde rectæ tranſmittantur AT, AX, DT, DV, VX. Dico reſultans pentagonum ATDVX, eſſe vnum è duodecim planis pentagonis æquilateris & æquiangulis Dodecaedri conſtituendi.

Quia rectæ RV, SX, ſunt perpendiculares poſitæ ad quadratum ADEF, ipſæ per 6. propoſ. libr. 11. erunt parallelæ inter ſe; & quia ſunt æquales inter ſe, eo quod ſint poſitæ æqualibus PR, PS; rectæ lineæ RS, VX, eas coniugantes æquales inter ſe & parallelæ per propoſ. 33. libr. 1. Sed eſt recta AD, parallela ipſi SR oſtenſa, ob parallelogrammum ND, ergo per propoſit. 9. libr. 11. rectæ AD, VX, erunt parallelæ; ergo per propoſ. 7. libr. 11. rectæ lineæ AX, DV, in eodem erunt plano cum aliis duabus parallelis AD, XV; ideoque trapezium ADVX, in vno ſuſtentabitur plano: ſed eſt etiam per 2. propoſit. libr. 11. ATD, in vno plano. Verùm ex puncto P, ducatur per propoſ. 31. libr. 1. recta PY parallela ipſi RV, quæ per propoſ. 8. lib. 11. erit perpendicularis ad quadratum AE, vt eſt perpendicularis eidem quadrato recta RV per conſtructionē; quæque æqualis erit ipſi RV, per propoſ. 34. libr. 1. eo quod ſit parallelogrammum PYVR; & rectæ aliæ duæ tranſmittantur KT, KY, quas oſtendemus vnam efficere rectā lineam TKY, hoc modo: Quia eſt per defin. 3. libr. 6. vt OK ad OQ, ita OQ ad QK; eſt verò KP æqualis ipſi OK, quia ſunt laterum æqualium quadratorum ſemiſſes, vel latera quadratorum æqualium; eſtque etiam PY æqualis oſtenſa ipſi RV æquali poſitæ ipſi OQ; tùm recta QT æqualis poſita ipſi OQ: ergo per propoſ. 7. libr. 1. coroll. noſtrum, erit vt KP ad PY, ita QT ad QK: quamobrem cùm triangula PKY, QTK, obtineant

obtineant duo latera æqualia duobus lateribus proportionalia, ſintque ad angulũ vnum compoſita in puncto K, ita vt homologa latera ſint parallela, videlicet PK, QT, ( nam QT per conſtructionem eſt perpendicularis ipſi plano quadrati AC, & quia quadratum AE etiam per conſtructinnem perpendiculare eidem quadrato AC, eorumque communis ſectio eſt recta AD, ad quam recta PK perpendicularis ex natura rectangulorum AM, MD, ideoque eadem PK perpendicularis erit eidem plano quadrati AC, per defin. 4. libr. 11. vnde per propoſ. 6. libr. eiuſdem duæ rectæ PK, QT, perpendiculares plano quadrati AC, erunt inter ſe parallelæ. ) tùm etiam duo alia latera homolnga PY, QK, per cit. prop. 6. quia ſunt eidem plano quadrati AE ad angulos rectos: ergo per prop. 32. libr. 6. erunt in directum duæ rectæ lineæ KY, KT, ſeu vnam cõponent rectam YKT. Cùm igitur recta linea YKT puncta duo habeat T, K, in plano trianguli ATD, & duo puncta K, Y, in plano trapezij ADVX, ipſa duo plana ATD, ADVX, vnum planum conſtituent, ſeu erunt in directum, ſeu in vno plano ſuſtentabuntur: ſi enim duo plana eſſent ad inuicem inclinata, rectæ lineæ YKT, pars quędam YK, eſſet in ſubiecto plano ADVX, pars verò alia KT, in ſublimi, vel contrà; quod repugnat 1. propoſ. libr. 11. igitur duo illa plana vnum conſtituunt planum quinquelaterum ATDVX, quod erat demonſtrandum.

Iam verò probare nos oportet hoc pentagonum eſſe æquilaterum. In triangulo ANS, latera duo AN, NS, ſunt æqualia relatiuè duobus lateribus AK, KQ, trianguli AKQ: nam prima ſunt quadratorum æqualium latera æqualia, & ſecunda ſunt rectarum æqualium minora ſegmenta, ſectarum extrema & media ſectione; & anguli contenti ab illis lateribus ſunt recti: ergo per 4. propoſ. libr. 1. baſes AQ, AS, erunt æquales. Et quia in triangulis ASX, AQT, ſunt latera duo AS, SX, relatiuè æqualia duobus lateribus AQ, QT, anguloſque rectos continent æquales per 3. defin. libr. 11. erunt per 4. propoſ. libr. 1. baſes eorum æquales AX, AT. Quod ſi traiiciatur recta DQ, eodem artificio oſtendemus rectas AQ, DQ, eſſe æquales; tùm etiam rectas AT, DT. Et ſi tranſmittatur recta DR, ſimili modo probabimus rectas DR, DQ, eſſe æquales, & rectas alias DV, DT, eſſe æquales. Quare per 1. axio. libr. 1. habebimus quatuor latera XA, AT, TD, DV, quinquelateri prædicti æqualia. Reſtat oſtendendum latus VX quintum eſſe æquale cuilibet dictorum: Per 4. propoſ. libr. huius, quadratum rectæ PS vel SX eſt ſubtriplum quadratorum rectarum PN, NS; & quadrata rectarum PN, AN, ſunt æqualia inter ſe per noſtrum coroll. 3. ad prop. 46. libr. 1. ergo quadrata rectarum AN, NS, ſunt ſimul tripla quadrati rectæ SX: ſed per propoſ. 47. libr. 1. quadratis rectarum AN, NS, eſt æquale quadratum rectæ AS; ergo quadratum rectæ AS, triplum erit quadrati rectæ SX: ergo quadrata rectarum AS, SX, ſimul ſumpta, quadrupla erunt eiuſdem quadrati rectæ SX: ergo quia per cit. propoſ. 47. libr. 1. quadratis rectarum AS, SX, æquale eſt quadratum rectæ AX; hoc quadratum rectæ AX: erit quadruplum quadrati rectæ SX, vel rectæ PS, vel rectæ XY, æqualium; nam per propoſit. 34. libr. 1. in parallelogrammo SY oſtenſo, rectæ PS, XY ſunt æquales, & per conſtructionem ſunt æquales rectæ PS, SX. Et quia recta SR dupla eſt rectæ PS; & recta XV, æqualis eſt rectæ SR; & recta PS, ipſius XV æqualis; reliqua PR æqualis erit, reliquæ YV; igitur ſicut PR eſt ſemiſſis totius SR, etiam Y ſemiſſis erit totius XV; ergo etiam tota XV dupla erit ipſius YV, ſicut ipſa PR eſt ſubdupla totius SR: ergo per coroll. noſtrum ad propoſ. 20. libr. 6. quadratum totius rectæ XV, erit quadruplum quadrati rectæ YV, vel XV æqualium, vel etiam rectæ SX æqualis cuilibet illarum: Igitur quia quadrata rectarum AX, XV, ſunt diuiſim ſumpta quadrupla quadrati rectæ SX, ipſa erunt æqualia per 7. propoſ. libr. 5. & ipſæ rectæ AX, XV, æquales, per coroll. noſtrum 4. ad propoſ. 46. lib. 1. Demonſtrauimus ergo quinquelaterum ATDVX, eſſe æquilaterum.

Quod autem ſit æquiangulum ſic adſtruetur. Tranſmiſſis rectis lineis AV, AR; quia PN ſecta eſt media & extrema ratione in S, eique adiuncta PR maius illius ſegmentum, vel æqualis maiori eius ſegmento PS; erit tota NR, ſecta media & extrema ratione in P, maiuſque illius ſegmentum, iuxra 5. prop. libri huius; ergo per 4. propoſ. lib. huius, quadrata rectarum NR, RP, ſimul tripla erunt quadrati rectæ NP, vel AN æqualium rectarum. Sed eſt per coroll. noſtrum 3. ad prop. 46. lib. 1. quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP, ergo & quadrata rectarum NR, RV, AN, ſimul quadrupla erunt quadrati rectæ AN: Sed per propoſ. 47. libr. 1. quadrata rectarum NR, AN, æqualia ſunt quadrato rectæ AR, ergo & quadrata rectarum RV, AR, quadrupla erunt quadrati rectæ AN: Quandoquidem igitur quadratis rectarum AR, RV, eſt æquale quadratum rectæ AV, per prop. 47. libr. 1. erit quadratum rectæ AV, quadrati rectæ AN, quadruplum.

ſed

dratum ſemidiametri ſphæræ cubum continentis; quia eſt per 15. propoſ. libr. 5. vt diameter ad latus cubi, ita eſt ſemidiameter ad dimidium lateris, & per propoſ. 22. libr. 6. eſt vt quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratum ſemidiametri ad quadratum dimidij lateris: Quoniam igitur per propoſ. 15. libr. huius, quadratum diametri triplum ſit quadrati lateris, erit etiam quadratum ſemidiametri triplum quadrati dimidij lateris. Ergo quadratum rectæ ZX, æquale erit quadrato ſemidiametri ſphæræ ſeu cubi; & inde ipſa ZX æqualis ſemidiametro. Simili methodo probabitur recta ZV æqualis ſemidiametro eidem prædictæ. Sunt autem & rectæ ZA, ZD, ad angulos cubi, ſemidiametro ſphæræ æquales ex dictis: igitur iam obtinemus quatuor rectas ex Z centro ſphæræ ad quatuor angulos A, D, V, X, æquales ſemidiametro ſphæræ.

Fig. 305. Iam verò vt probetur recta ducta ZT ad quintum angulum T, ſemidiametro ſphæræ æqualis; concipiatur deſcriptus circulus circa pentagonum ATDVX æquilaterum & æquiangulum, vt eſt in hac figura particulari, & ad planum eius ex Z centro ſphæræ demittatur perpendicularis Zι per 11. propoſit. libr. 11. & tranſmittantur ex ι, rectæ ιA, ιT, ιD, ιV, ιX. Quia verò per propoſ. 47. lib. 1. quadratum rectæ ZA, æquale eſt quadratis Zι, ιA, & quadratum rectæ ZX, æquale eſt quadratis rectarum Zι, ιX; (nam recta Zι, eſt per defin. 3. libr. 11. perpendicularis rectis Aι, ιX, ιT, tùm ιV, & ιD) ſunt autem quadrata rectarum Zι, ιA, æqualia quadratis rectarum Zι, ιX, eo quod rectæ ZA, ZX, ſint oſtenſæ æquales: ergo & quadrata rectarum Zι, ιA, æqualia ſunt quadratis rectarum Zι, ιX; quare ſi dematur ex illis commune quadratum rectæ Zι, relinquentur æqualia quadrata rectarum ιA, ιX; vnde rectæ ιA, ιX, æquales erunt. Similiter probauimus rectas ιV, ιD, æquales eſſe inter ſe, & rectis ιA, ιX, eo quod rectæ ZV, ZD æquales ſint oſtenſæ rectis ZA, ZX: Igitur quia ex ι, plures ductæ ſint quàm duæ rectæ lineæ ad circumferentiam circuli, æquales, punctum ι erit centrum circuli, per propoſ. 9. libr. 3. Quare ιT recta erit æqualis reliquis ex centro circuli rectis ad eius circumferentiam ductis; vnde quadrata rectarum Zι, ιA, æqualia, erunt quadratis rectarum Zι, ιT, ſed illis duobus quadratis, eſt æquale quadratum rectæ ZA; his verò quadratum rectæ ZT, per propoſ. 47. libr. 1. igitur erunt æqualia quadrata rectarum ZA, ZT, & rectæ ipſæ ZA, ZT, æquales per corollar. noſtrum 4. ad propoſ. 46. libr. 1. Ergo ſphæra complectens cubum ex centro Z deſcripta, attinget ſua ſuperficie angulos pētagoni ATDVX, & reliqua pentagona huiuſmodi dodecaedri facti, & ipſum dodecaedrum complectetur: ſed & hęc ſphęra continens cubum modo prædicto & dodecaedrum, continet etiam ex præcedentibus propoſitionibus, tetraedrum octaedrum, & icoſaedrum: ergo ſphæra iſta comprehendente reliqua corpora cubum, tetraedrum, octaedrum, & icoſaedrum, oſtendimus comprehendi dodecaedrum factum.

Poſtrema pars propoſitionis ſupereſt demonſtranda hoc modo. Quia eſt NP ad PS, vt PS ad SN, erit per propoſ. 15. libr. 5. NL dupla ipſius NP ad RS duplam ipſius PS, vt RS dupla ipſius PS, ad rectam compoſitam ex SN, RL, videlicet ad duplam ipſius SN. Iam verò ſi cubi latus NL, vel ei æqualis recta, ſecetur extrema & media ratione, maius eius ſegmentũ erit SR; ſed tota NL ita ſecta, eſt Rationalis, nam quadratum eius commenſurabile eſt quadrato diametri ſphæræ, quæ Rationalis ponitur, cùm illud ſit tertia pars huius ex propoſ. 15. libr. huius: ergo per propoſ. 6. libr. huius, maius ſegmentum SR, nimirum latus Dodecaedri XV illi æquale, erit linea Irrationalis quæ vocatur Apotome, quod erat vltimò demonſtrandum. Fig. 304.

## COROLLARIVM I.

*Si latus cubi ſecetur extrema & media ratione; maius eius ſegmentum erit latus Dodecaedri in eadem ſphæra qua & cubus deſcripti.*

HOc enim oſtendimus in latere LN æquali lateri Cubi, & in RS æquali lateri Dodecaedri: & in RS portione maiore totius LN, extrema & media ratione ſectæ. Fig. 304.

## COROLLARIVM II.

*Latus cubi ſphæra comprehenſi, eſt æquale rectæ lineæ ſubtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi.*

HOc probauimus in recta AD, quæ eſt latus cubi, & ſubtenditur angulo T pentagoni ATDVX, dodecaedri; & æqualis rectis aliis AV, DX, ſubtendentibus alios angulos X, & V, eiuſdem pentagoni. Fig. 304. & 305.

COROL-

## COROLLARIVM III.

*In dodecaedro ſunt ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela planis cubi proprij & eorum lateribus, tadem ſphæra inſcripti: bifariamq́, ſecantur, & ad angulos rectos à tribus rectis lineis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariàm quoque & ad angulos rectos ſecantibus.*

Fig.304. EXempli gratia, duo ex dictis lateribus ſunt VX,& TF,quæ ſunt parallela lateribus EF, AB, cubi: aliaque huiuſmodi quatuor reperiuntur ſuper alias quatuor reliquas baſes cubi:quorum quæ ſunt ſuper baſes cubi parallelas oppoſitas, parallela ſunt, ſecanturque ex oſtenſis bifariàm & ad angulos rectos ab lineis,quæ cētra baſium cubi oppoſitarum connectunt, vt ſunt rectæ YZ, κZ,&c. quæ ſe mutuò ſecant in Z centro vti probatum eſt. Et quidem bifariàm ſe ſecant, quia cùm rectæ PZ,OZ,æquales ſint ſemiſſi lateri cubi; & YP, κO, æquales maioribus ſegmentis æqualibus PS,OQ: erunt totæ YZ,κZ æquales. Similis methodo reliquæ rectæ ex Z ad ſectiones oppoſitorum laterum traiectæ, æquales erūt. Vnde totæ tres rectæ lineæ ſunt æquales, ſeq́ue mutuò ſecent bifariàm in centro Z. Denique quod ſe mutuò ſecent ad angulos rectos, ſic probabitur: In parallelogrammo KOZP, angulus OZP rectus eſt, quia opponitur recto OKP, per propoſ. 34. libr.1. Eademq́ue ratione reliquæ rectæ lineæ centra baſium coniugantes efficient angulos rectos; omnes enim parallelæ ſunt lateribus cubi parallelis rectos angulos efficientibus. manifeſtum eſt igitur corollarium.

## COROLLARIVM IV.

*Si recta linea diuidens oppoſita latera Dodecaedri bifariàm & ad angulos rectos, ſecetur extrema & media ratione; maius ſegmentum eſt latus cubi, minus verò latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi.*

Fig.304. CVm oſtenſa ſint quadrata rectarum ZY, YP,tripla quadrati rectę PZ,erit ZY ſecta in P,extrema & media ratione, maiuſque ſegmentum PZ,vti conſtat ex propoſ. 4.libri huius. quare erit vt ZY ad ZP, ita ZP, ad PY; vnde per propoſ.15. libr.5. vt dupla ipſius ZY, videlicet recta linea diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariàm, ad duplam ipſius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipſius ZP, ad duplam ipſius PY,hoc eſt ad latus Dodecaedri. Quamobrem recta linea diuidens oppoſita latera Dodecaedri bifariàm, ſecta extrema & media ratione, maius ſegmentum eius efficit latus cubi, & minus eiuſdem ſegmentum, latus Dodecaedri in eadem ſphæra inſcriptorum.

## COROLLARIVM I.
## NOSTRVM.

*Si quadrati alicuius latera bifariàm ſecentur; & rectæ vniant hæc media puncta parallela lateribus ipſius quadrati: diuidetur totum quadratum in quatuor æqualia quadrata; quorum diametri erunt æquales, & centrum circuli circumſcribentis ipſum quadratum erit in communi ſectione dictarum rectarum parallelarum.*

## COROLLARIVM NOSTRVM
## II.

*Diuiſis rectis æqualibus extrema & media ratione; earum ſegmenta maiora erunt æqualia, & minora etiam æqualia.*

## COROLLARIVM NOSTRVM
## III.

*Si vna recta linea puncta habeat diuerſa in planis diuerſis, duo vel plura in vno, & alia duo vel plura in alio: ipſa plana erunt in directum, ſeu in vno ſuſtentabuntur plano.*

HÆc tria noſtra corollaria abundè explicata ſunt in contextu demonſtrationis huius propoſitionis.

## COROLLARIVM NOSTRVM
## IV.

*Si conficiantur in aliqua materia iuxta hanc formam, duodecim pentagona æquilatera & æquiangula, & inter ſe æqualia, & complicentur ſecundum latera communia, & inclinentur ad inuicem verſus vnam partem: reſultabit Dodecaedrum.*

NAm reliqua latera ſeparata æqualia confluent & congruent, ſpatiumq́ue comprehendent ſolidum, quod erit ex definitione 28. libr.11. Dodecaedrum. Fig.306.

PRO-

## PROPOSITIO XVIII.

### Latera quinque figurarum in eadem ſphæra inſcriptorum præcedentium exponere, & inter ſe comparare.

Fig.307. CONſtructio. Eſto ſphæræ diameter, recta AB, & ſemidiametri eius AC, BC: & per prop.9. lib.6. ex tota AB, auferatur tertia pars BD, & quinta BE: Tùm ex centro C deſcripto ſemicirculo AFB, interuallo CA, vel CB, ex punctis C, D, E, excitentur per prop.11.lib.1. rectæ perpendiculares diametro AB, quæ ſecent circumferentiam ſemicirculi facti in F, G, H; & tranſmittantur rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Prætereà per propoſ.3. libr. 1. ex recta AH quæ maior eſt quàm chorda decagoni, quia maior eſt quàm chorda AF quadrantis, detrahatur recta HI æqualis chordæ ſeu lateri decagoni in circulo inſcripti cuius ſemidiameter ſit recta BH. Denique per prop.30.lib.6. ſecetur recta BG extrema & media ratione, & traiiciatur recta BI & ſegmentum BK ſit maius dictæ BG ſectæ.

Ad expoſitionem laterum quinque ſolidorum propoſitorum in eadem ſphæra inſcriptorum deſcendamus. Aſſero rectam AG eſſe latus Tetraedri, AF latus Octaedri, BG latus Cubi, BI latus Icoſaedri, BK latus Dodecaedri.

Prima aſſertio probatur. Per corollar.propoſ.8.lib.6. Eſt BA ad AG, vt AG ad AD; ergo per coroll.propoſ.20.libri eiuſdem, erit vt BA ad AD, ita quadratum rectæ BA ad quadratum rectæ AG: ſed eſt per conſtructionem BA recta ſeſquialtera rectæ AD, ergo quadratum rectæ BA erit ſeſquialterum quadrati rectæ AG; igitur per propoſ.13.libri huius, cùm ſit diameter AB ſphæræ potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri, erit recta AG latus Tetraedri.

Secunda aſſertio explicatur. Per citatum coroll.prop.8.lib.6. eſt BA ad AF, ſicut AF ad AC; ergo per coroll.cit.prop.20.eiuſdem libri, erit vt BA ad AC, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AF: eſt verò recta BA per cõſtructionem dupla rectæ AC, ergo quadratum rectæ AB erit duplum quadrati rectæ AF: ideoque per prop.14. libri huius, erit recta AF latus Octaedri, vel recta BF ei æqualis.

Tertia aſſertio demonſtratur. Per cit. corollar. propoſ.8.libr.6. eſt AB ad BG, vt BG ad BD; ergo per corollar. cit. propoſ. 20.lib. 6. erit vt AB ad BD, ita quadratum rectæ AB ad quadratum rectæ BG: ſed per conſtructionem recta AB eſt tripla rectæ BD, ergo quadratum rectæ AB erit triplum quadrati rectæ BG: igitur per propoſ. 15. libri huius, erit BG latus Cubi.

Quarta aſſertio oſtenditur. Ex eiſdem corollariis citatis propoſitionum 8.& 20.lib.6. eſt BA ad BH vt BH ad BE; & vt BA ad BE, ita quadratum rectæ BA ad quadratum rectæ BH: ſed per conſtructionem recta BA eſt quintupla rectæ BE, ergo quadratum rectæ BA erit quintuplum quadrati rectæ BH. Iam verò cùm ſphæræ diameter ſit potentiâ quintupla ſemidiametri circuli ambientis quinque latera Icoſaedri, iuxta corollar. 1. propoſ. 16. libri huius, erit recta BH ſemidiameter dicti circuli, ſeu per corollar.prop. 15. libr. 4. latus hexagoni in eo circulo inſcripti; eſt autem HI latus decagoni eiuſdem circuli per conſtructionem; ergo latus pentagoni in eodem circulo inſcripti, poterit & BH, & HI ſimul, per propoſ. 10. libri huius; & inde quia per propoſ. 31. libr. 3. angulus BHA eſt rectus, triangulum erit IHB rectangulum, & per propoſ.47.libr.1. quadratum rectæ BI erit æquale quadratis rectarum BH, HI; erit latus pentagoni dicti circuli eiuſdem. Ergo iuxta propoſ.16. libri huius, recta BI erit latus Icoſaedri.

Quinta aſſertio ſic manifeſta fiet. Cùm per conſtructionem latus BG Cubi ſectum ſit in K, extrema & media ſectione, maiuſque eius ſegmentum ſit BK latus Dodecaedri in eadem ſphæra inſcripti, per coroll.1.prop.17. libri huius, manifeſta erit hæc vltima aſſertio quinta. & expoſuerimus latera quinque ſolidorum prædictorum in eadem ſphæra inſcriptorum.

Age verò comparemus latera iſtorum quinque ſolidorum in eadem ſphæra inſcriptorum, quod vltimò propoſitum fuit.

Quia oſtendimus diametrum ſphæræ eſſe potentiâ ſeſquialteram lateris Tetraedri, duplamque potentiâ lateris Octaedri, triplamque potentiâ lateris Cubi: manifeſtum eſt ſi ponamus quadratum diametri ſphæræ eſſe 6 partium, talium fore 4, quadratum lateris Tetraedri, & talium 3 quadratum lateris octaedri, & talium 2, quadratum lateris Cubi: Et proinde latus Tetraedri eſſe potentia ſeſquitertium lateris octaedri, potentiâ verò duplum lateris Cubi: Tùm latus octaedri eſſe potentia ſeſquialterum lateris cubi: Quare quadrata ex lateribus harum trium figurarum ſolidarum, Tetraedri, Octaedri & Cubi ſeu hexaedri, tum ex diametro ſphæræ illa

comprehendentis, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Ex quibus ſequitur per propoſit. 6. libr. 10. diametrum ſphæræ & latera dictarum ſolidorum trium, eſſe lineas rectas inter ſe commenſurabiles per defin. 1. libr. 10. Et quia ſphæræ diameter ponitur Rationalis, erunt dictarum trium figurarum latera, Tetraedri Cubi & Octaedri, ex defin. 6. lib. 10. Rationalia. Verùm quia dicta quadrata non obtinent proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vti manifeſtum eſt per corollar. propoſ. 24. libr. 8. erunt ex propoſ. 9. libr. 10. diameter ipſius ſphæræ, latus tetraedri, latus cubi, & latus octaedri, longitudine incommenſurabiles, indeque Rationales potentia tantum commenſurabiles iuxta defin. 6. libr. 10. Et quia latera Icoſaedri & Dodecaedri oſtenſa ſunt eſſe lineas Irrationales, illud quidem Minorem, hoc verò Apotomen, nulla ratione, id eſt nec longitudine nec potentia commenſurabilia erunt lateribus prædictarum figurarum: ſi enim commenſurabilia eſſent latera harum poſtremarum figurarum lateribus prædictarum trium; quia latera iſtarum trium prædictarum ſint diametro ſphæræ commenſurabilia, eſſent quoque latera iſtarum poſteriorum eidem diametro commenſurabilia per propoſ. 12. lib. 10. quare cùm ſit diameter Rationalis, eſſent ipſa latera Icoſaedri & dodecaedri Rationalia per def. 9. li. 10. quod abſonum eſt, nam demonſtrata ſunt Irrationalia. Sed neque ipſa latera Icoſaedri & Dodecaedri inter ſe commenſurabilia erunt: ſi enim ponantur commenſurabilia longitudine, cùm latus Dodecaedri ſit Apotome, erit etiam per propoſ. 104. lib. 10. latus Icoſaedri Apotome; tùm cùm latus Icoſaedri ſit linea Minor, erit per prop. 106. libr. 6. latus Dodecaedri linea quæ vocatur Minor: Quod ſi ponantur illa duo latera, tantum potentiâ commenſurabilia, erit per citatas propoſitiones 106. libr. 10. latus Dodecaedri linea vocata Minor, quia latus Icoſaedri eſt per 16. propoſ. libri huius, linea vocata Minor, quod abſurdiſſimum eſt: conſtat enim ex coroll. noſtro ad prop. 112. libr. 10. Apotomen & Minorem lineas eſſe lineas Irrationales planè inter ſe differentes, ita vt neutra conueniat cum altera.

Oſtendamus autem quod Latus Tetraedri ſit maius latere Octaedri, & quod latus Octaedri ſit maius latere Cubi, & quod latus Cubi ſit maius latere Icoſaedri, & quod latus Icoſaedri ſit maius latere Dodecaedri.

Primum ſic oſtenditur. Latus AG Tetraedri eſt chorda maioris arcus AG, quam chorda AF latus Octaedri quæ ſubtenditur minori arcui AF, in eodem circulo, ergo per coroll. noſtrum 1. ad prop. 8. libr. 12. maius erit latus Tetraedri quàm latus Octaedri.

Secundum ſic explicatur. Arcus BF, maior eſt arcu BG, in eodem circulo; ergo per coroll. citat. poſtremo loco: chorda BF maior erit quàm chorda BG: ſed oſtenſa eſt chorda BF latus Octaedri, & chorda BG latus Cubi; ergo latus octaedri maius erit latere Cubi.

Tertium ſic probatur. Quia recta AB diameter ſphæræ eſt tripla rectæ BD per conſtructionem, & per prop. 20. libr. 6. quadrata habent proportionem duplicatam laterum; erit quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BD; quia noncupla proportio ſit duplicata proportionis duplæ, vt videre eſt in hiſce numeris 1. 3. 9. Vnde qualium partium 9 ponetur quadratum diametri AB, talium 1, erit quadratum rectæ BD: & qualium partium 9 eſt quadratum rectæ AB, talium 3 erit quadratum rectæ BG, eo quod per propoſ. 15. libr. huius, illud huius triplum ſit; quare etiam talium quoque 3 erunt quadrata rectarum GD, BD, eo quod æqualia ſint quadrato GB per propoſ. 47. libr. 1. Ergo ſi auferatur quadratum rectæ BD partium 1 talium, relinquetur talium partium 2, quadratum rectæ GD. Et quia oſtendimus quadratum rectæ AB eſſe quintuplum quadrati rectæ BH, erit quadratū rectæ BH minùs quàm talium partium 2, nam 9 ad 2 habet minorem proportionem quintupla, quia 10 ad 2 quintupla ſunt; eritque ideò per propoſ. 10. libr. 5. numerus ad quem 9 habet proportionem quintuplam, minor quàm 2. vnde quadratum rectæ GD maius eſt quadrato rectæ BH, indeq; recta GD maior quàm recta BH. Inſuper quoniam diameter AB ſphæræ, componitur ex BH ſemidiametro circuli ex quo conficitur Icoſaedrum, & ex linea dupla lateris decagoni HI eiuſdem circuli per coroll. 2. propoſ. 16. libri huius, manifeſtum eſt latus decagoni HI minus eſſe tertia parte rectæ AB, hoc eſt minus recta BD. Si enim recta HI ponatur tertia pars rectæ AB, erit dupla ipſius HI æqualis ipſi AD duplæ ipſius BD tertiæ partis totius AB; ideoque BH erit æqualis ipſi BD: & cùm quadratum rectæ AB noncuplum ſit probatū quadrati rectæ BD, erit idem quadratum rectæ AB noncuplum quadrati rectę BH, quod abſonum eſt, & contra demonſtrata, videlicet quintuplum eſſe quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BH: igitur recta HI nō erit tertia pars totius AB. Sed neque erit eadem recta HI maior tertia parte ipſius AB: ſi enim poneretur maior tertia parte rectę AB, & proinde dupla ipſius HI maior duabus tertiis eiuſdem AB, nimirum

rum maior quàm AD ; eſſet BH minor quàm tertia pars BD; vnde quadratum rectæ AB maius erit quàm noncuplum quadrati rectæ BD, quod magis repugnat rationi: ergo recta HI non poſſet eſſe maior tertia parte ipſius AB. Itaque cùm anteà oſtenderimus non poſſe eandem rectam HI, æqualem tertiæ parti rectæ AB; & nunc non poſſe maiorem eadem tertia parte: relinquitur vt recta HI ſit minor quàm tertia pars ipſius AB, hoc eſt quàm BD. Habemus igitur rectæ GD, DB, ſimul maiores eſſe duabus ſimul rectis BH, HI; ergo illarum quadrata ſimul maiora erũt quadratis ſimul iſtarum: ſed per propoſ. 47. libr. 1. quadratum rectæ BG eſt æquale quadratis rectarum GD, BD; & quadratum rectæ BI eſt æquale quadratis rectarum BH, HI; ergo quadratum rectæ BG erit maius quadrato rectæ BI: igitur recta BG quæ eſt latus Cubi erit maior quàm recta BI quæ eſt latus Icoſaedri.

Quartum denique ſic demonſtratur. Recta BG diuiſa eſt per conſtructionem extrema & media ratione, & maius ſegmentum eius BK, & minus GK; rectangulum ſub BG, BK, maius erit rectangulo ſub BG, GK; tùm etiam rectangula ſub BG, BK, & ſub BG, GK, ſimul maiora duplo rectanguli ſub BG, GK: ſed eſt per propoſ. 2. libr. 2. quadratum rectæ BG æquale quadratis rectarum BG, BK; & duobus rectangulis ſub BG, GK, æqualia ſunt duo quadrata rectæ BK: (eſt enim per defin. 3. lib. 6. BG ad BK, vt BK ad GK; quare per propoſ. 17. libr. 6. erit quadratum rectæ BK æquale rectangulo ſub BG, GK; indeque duo quadrata rectæ BK æqualia ſunt duobus rectangulis ſub BG, GK;) Igitur maius eſt quadratum rectæ BG duobus quadratis rectæ BK; ideoque maiora erunt tria quadrata rectæ BG, ſex quadratis rectæ BK: ſed quadratis tribus rectæ BG æqualia ſunt quinque quadrata rectæ BH; (nam quadratum rectæ AB triplum eſt quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectæ BH, ergo erunt tria quadrata rectæ BG, & quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB; quare tria illa quadrata erunt his quinque quadratis æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ BH, maiora erunt ſex quadratis rectæ BK. (nam ſi æquale eſſet quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus, forent quinque quadrata rectæ BH minora ſex quadratis rectæ BK, quod repugnat demonſtratis.) Quare & recta ipſa BH erit maior quàm recta BK. Sed & per propoſ. 19. libr. 1. recta BI maior eſt quàm BH, ergo recta BI latus Icoſaedri maior erit quàm recta BK quæ eſt latus Dodecaedri, quod erat concludendum. Tota ergo propoſitio demonſtrata eſt.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Latera Tetraedri, Octaedri, Cubi, ſunt inter ſe & diametro ſphæra illa corpora circumſcribentis, potentiâ ſolum commenſurabilia.*

*Longitudine verò incommenſurabilia; ac proinde Rationalia, potentiâ ſolum commenſurabilia.*

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Latera Icoſaedri & Dodecaedri ſunt incommenſurabilia longitudine & potentia inter ſe, & lateribus Tetraedri, Octaedri, cubi, & ſphæra diametro, illa omnia corpora circumſcribentis: ideoque Irrationalia.*

HÆc duo corollaria noſtra in contextu demonſtrationis huius propoſitionis explicata ſunt.

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Præter has quinque figuras ſolidas contentas ſuis propriis planis æqualibus, æquilateris, & æquiangulis, vnde iuxta definitionem 33. libri vndecimi Regulares appellantur: nulla alia conſtitui poſſunt & fingi, eodem modo terminata planis æqualibus, æquilateris & æquiangulis.*

PRimùm enim ſolidus angulus ex duobus planis angulis quibuſcumque conſtitui nequit iuxta defin. 2. anguli ſolidi allatam in defin. 11. libr. 11. quare nulla figura ſolida conſtare poterit ex duobus triangulis etiam quibuſcumque æqualibus, æquilateris, & æquiangulis, quandoquidem angulos ſolidos eius duo anguli plani quilibet efficere non poſſunt. Prætereà ſi aſſumantur tria triangula æquilatera, & æquiangula, & æqualia, conſtabit Tetraedri angulus, & ipſum Tetraedrum per propoſ. 13. libri huius, & non aliud corpus diuerſum. Tertiò ex quatuor triangulis etiam æquilateris & æquiangulis & æqualibus, fiet octaedri angulus & ipſum octaedrum ex octo illis triangulis, per propoſ. 14. libri huius, & non aliud ab eo diuerſum ſolidum. Quartò ex quinque triangulis æquilateris etiam & æquiangulis & æqualibus, reſultabit Icoſaedri angulus, & ip-

ſum Icoſaedrum, ex 20. illis triangulis per propoſ.16.libri huius, & non aliud ab eo diuerſum corpus. Quintò ſi aſſumantur ſex triangula æquilatera, & æquiangula, & æqualia, ex eorum ſex angulis reſultabunt quatuor recti, vt videre eſt in ſexilatero inſcripto in circulo reſoluto in triangula ſex æquilatera, quorum ſex anguli in centro circuli, ſunt æquales duobus rectis iuxta coroll. noſtrum 2. ad propoſ.13. lib.1. & quia per propoſ.20. libr. 11. quilibet angulus ſolidus cõponitur ex angulis planis minoribus quàm quatuor recti, ideò iſtiuſmodi ſex anguli ſolidum angulum efficere non poſſunt; & multò minùs ex quocumque alio maiore numero huiuſmodi angulorum triangulorum æquilaterorum: Quare nullum corpus conſtitui poterit angulos habens ex ſex illis angulis & maiore numero quàm ſex. Sextò, ſicuti in primò probauimus nullos duos angulos planos ſiue ſint triangulorum æquilaterorum ſiue ſint quadratorum ſiue pentagonorum æquilaterorum, ſiue hexagonorum, ſiue aliarum quarumcumque figurarum planarum æquilaterarum & æquiangularum, vt ibi in vniuerſum oſtendimus; ita etiam nullum corpus ſolidum confici poterit ex duabus quibuſcumque huiuſmodi figuris planis æquilateris & æquiangulis & æqualibus. Septimò ex tribus angulis quadratorum conſtabit angulus cubi ſeu hexaedri, vnde reſultabit hexaedrum, vti conſtat ex propoſ. 15. libri huius, & nullum aliud corpus ab hexaedro. Octauò ex quatuor angulis quadratorum, & multò minùs ex pluribus huiuſmodi angulis quadratorum, nullus angulus ſolidus effici poterit; quia per propoſ.cit.20. libr. 11. omnis ſolidus angulus conſtare debet ex angulis planis minoribus quatuor rectis; atque adeò nullum corpus effici poterit terminatum pluribus planis quàm ſex quadratis quod eſt cubus. Nonò ex tribus angulis pentagoni æquilateri & æquianguli reſultabit angulus dodecaedri per propoſ.18. libri huius; non autem effici poterit ex pluribus huiuſmodi angulis; nam cùm ſint maiores ſinguli quàm recti, ſequeretur angulus ſolidus fieri ex angulis maioribus quàm quatuor recti. Hoc argumentum probat, angulum ſolidum effici non poſſe ex tribus angulis hexagoni vel heptagoni, & aliarum huiuſmodi figurarum plurium angulorum æqualium, qui omnes ſunt maiores quatuor rectis, vel maiores tribus angulis hexagoni æquilateri & æquianguli, quorum ſinguli ſunt æquales duobus angulis trianguli æquilateri & æquianguli, vti conſtat ex reſolutione hexagoni in circulo inſcripti æquilateri reſoluti in triangula ſex æquilatera & æquiangula: quare etiam nullum ſolidum conſtare poteſt ex hexagonis vel heptagonis & plurium laterum æqualium & æqualium angulorum. Manifeſtum igitur fecimus nulla alia corpora ſolida regularia fingi poſſe ab prædictis quinque.

## COROLLARIVM NOSTRVM IV.

*Latera omnia quinque corporum regularium inuenire.*

PRopoſiti regularis ſolidi baſes multiplicentur per numerum laterum vnius baſeos, & producti numeri dimidium aſſumatur; hæc ſemiſſis erit numerus laterum ſolidi propoſiti. Nam cùm ſingulæ baſes copulentur aliis, fit vt quodlibet-latus earum ſit commune duabus, quare dimidium producti numeri prædicti, erit numerus laterum corporis propoſiti. Exempli gratiâ, quia Tetraedrum conſtat ex quatuor triangulis æquilateris, ſi numerus hic 4, ducatur in 3 numerum laterum trianguli; progignetur numerus 12, cuius dimidium videlicet 6, erit numerus laterum Tetraedri. In hexaedro ſiue cubo terminato ſex quadratis; ſi numerus 6, multiplicetur per 4, numerum laterum vnius quadrati; producetur numerus 24, cuius ſemiſſis 12 erit numerus laterum Cubi. Item in Octaedro conſtante octo triangulis, ſi numerus 8, ducatur in 3, fiet numerus 24, cuius dimidium 12 erit numerus laterum octaedri. Præterea pro dodecaedro ſi numerus 12 baſium multiplicetur per 5 numerum laterum baſeos; procreabitur numerus 60; cuius dimidium 30, erit numerus laterum Dodecaedri. Denique pro Icoſaedro, ſi numerus 20 baſium triangularium ducatur per numerum 3, laterum trianguli; producetur numerus 60, cuius ſemiſſis erit 30, pro numero laterum Icoſaedri.

## COROLLARIVM NOSTRVM V.

*Angulos omnes ſolidos cuiuſcumque propoſiti corporis Regularis definire.*

MVltiplica baſes corporis dati per numerum angulorum vnius è baſibus, & productum diuide per numerum angulorum efficientium vnũ angulum ſolidum illius corporis; quotus numerus dabit numerum angulorum

lorum ſolidorum quæſitũ. Cùm enim totus numerus angulorum omnium baſium illius corporis habeatur, & fiat diuiſio illorum per numerum angulorũ conſlantium vnum ſolidum corporis; quotus numerus dabit numerum ſolidorum angulorum illius corporis effectorum ab numero dato diuidente. Inductio in exemplis omnibus. Tetraedrum quia quatuor baſes obtinet triangulares, quarum ſingulæ tres angulos habent, ſi multiplicetur numerus 4, per 3, producetur numerus 12 angulorum omnium baſium illius: ergo ſi diuidatur hic numerus factus per 3, numerum angulorum planorum efficientium vnum ex eius angulis ſolidis; quotus numerus 4, dabit angulos ſolidos Tetraedri. Et quia Cubus ſiue hexaedrum, ſex baſes obtinet quadratas, quarum ſingulæ habent quatuor angulos, ſi ducatur numerus 6, per numerum 4, fient 24, qui diuiſus numerus per 3, numerum videlicet angulorum planorum conficientium vnum ſolidum angulum Cubi; quotus numerus 8, dabit numerum angulorum ſolidorum Cubi. Tùm etiam quia Octaedrum ſibi vendicat octo triangula plana, ſi multiplicetur hic numerus 8, per numerum 3, angulorum vnius trianguli, procreabitur numerus angulorum planorum huius corporis, videlicet 24, qui ſectus ab numero 4, angulorum planorum conficientium vnum eius angulum ſolidum; quotus numerus 6, dabit numerum angulorum ſolidorum illius. Dodecaedrum verò quia continetur ſub duodecim planis pentagonis, ſi ducatur numerus 12 per numerũ 5 angulorum vnius pentagoni, producetur numerus 60, qui diuiſus ab numero 3, angulorum planorum pentagoni efficientium angulum vnum ſolidum Dodecaedri; quotus numerus 20, erit numerus angulorum ſolidorum Dodecaedri. Denique quia Icoſaedrum comprehenditur ab viginti triangulis, ſi numerus 20 multiplicetur per 3, numerum angulorum vnius trianguli, & numerus 60 productus diuidatur per numerum 5, angulorum planorum conſlantium vnum angulum ſolidum huius corporis; quotus numerus 12, erit numerus angulorum ſolidorum Icoſaedri. Porrò numerus tàm planorum comprehendentium corpora iſta, quàm angulorum planorum vnum ex eorum angulis ſolidis, habetur ex propoſitionibus præcedentibus huius libri, Tetraedri videlicet, prop. 13. hexaedri propoſ. 15. Octaedri 14. Dodecaedri 17. Icoſaedri 16.

## COROLLARIVM NOSTRVM VI.

*Numerum omnium angulorum planorum corporum quinque præcedentium Regularium ſingillatim inuenire.*

MVltiplica baſes omnes corporis dati Regularis, ſeu numerum illarum, per numerum angulorum vnius, producetur numerus quæſitus. Hoc iam explicatum in præcedente corollario.

## COROLLARIVM NOSTRVM VII.

*Tetraedrum ſolum è dictis corporibus Regularibus, tot numero angulos ſolidos obtinet quot baſes.*

## COROLLARIVM NOSTRVM VIII.

*Cubus & Octaedrum, reciproca ſunt in numero baſium & angulorum ſolidorum.*

NAm cubus octo angulos ſolidos ſibi vendicat, quot baſes obtinet Octaedrum: & octaedrum ſibi vendicat ſex angulos ſolidos, quot baſes poſtulat Cubus.

## COROLLARIVM NOSTRVM IX.

*Dodecaedrum & Icoſaedrum, reciproca ſunt quoad numerum baſium & angulorum ſolidorum.*

NAm Dodecaedrum poſtulat viginti angulos ſolidos, quot Icoſaedrum baſes: & Icoſaedrum duodecim angulos ſolidos, quot baſes Dodecaedrum. quæ omnia conſtat ex præcedentibus corollariis noſtris, & citatis in eis propoſitionibus.

## COROLLARIVM NOSTRVM X.

*Tetraedrum tot latera ſibi vendicat, quot baſes hexaedrum.*

### COROLLARIVM NOSTRVM
### X I.

*Octaedrum tot latera poſtulat, quot baſes Dodecaedrum.*

### COROLLARIVM NOSTRVM
### X I I.

*Hexaedrum tot latera requirit, quot baſes Dodecaedrum.*

### COROLLARIVM NOSTRVM
### X I I I.

*Octaedrum & Hexaedrum tot numero latera ſibi vendicant.*

### COROLLARIVM NOSTRVM
### X I V.

*Dodecaedrum & Icoſaedrum, tot numero latera requirunt.*

### COROLLARIVM NOSTRVM
### X V.

*Hexaedrum & Octaedrum tot numero angulos licet diuerſos obtinent planos.*

### COROLLARIVM NOSTRVM.
### X V I.

*Dodecaedrum & Icoſaedrum tot numero angulos planos habent licet diuerſos.*

### COROLLARIVM NOSTRVM
### X V I I.

*Quantitas quorumlibet angulorum planorum, Tetraedri, Octaedri, & Icoſaedri, eſt eadem; videlicet vnius anguli Trianguli æquilateri.*

### COROLLARIVM NOSTRVM
### X V I I I.

*Anguli plani omnes ſimul ſumpti in Octaedro; ſunt dupli angulorum planorum omnium ſimul ſumptorum in Tetraedro.*

### COROLLARIVM NOSTRVM
### X I X.

*Hexaedrum tot latera habet, quot Icoſaedrum angulos ſolidos.*

### COROLLARIVM NOSTRVM
### X X.

*Octaedrum tot latera obtinet, quot angulos ſolidos Icoſaedrum.*

### COROLLARIVM NOSTRVM
### X X I.

*Tetraedrum tot latera habet, quot angulos ſolidos Octaedrum.*

### COROLLARIVM NOSTRVM
### X X I I.

*Numerus angulorum planorum cuiuſcumque corporis Regularis, duplus eſt numeri laterum ſuorum.*

HÆc omnia corollaria poſtrema manifeſta ſunt ex præcedentibus, comparatione inuentorum facta.

COM-

# COMMENTARIVS IN ISIDORVM DE INCLINATIONE PLANORVM QVINQVE CORPORVM REGVLARIVM.

## PROPOSITIO I.

**Angulum inclinationis duarum Tetraedri baſium, vnius ad alteram inuenire, & in plano exhibere.**

Fig.308. SVPPOSITIO. Tetraedri ABCD, duarum baſium ABD, CBD, ad inuicem, angulus inclinationis ut reperiendus.

Cõſtructio. Latus vnum, putà BD, bifariàm in E ſecetur per prop. 10. li. 1. & ex angulis A & C, oppoſitis huic lateri BD communi duobus triangulis ABD, CBD, rectæ lineæ tranſmittantur AE, CE, quæ erunt ad angulos rectos ipſi lateri BD; nã in triangulis AEB, AED, cùm ſit latus commune AE, & æqualia alia EB, ED, per hanc conſtructionem, & baſes AB, AD, æquales, ex natura triãguli ABD æquilateri, vnius è baſibus Tetraedri; erunt per prop. 8. lib. 1. anguli deinceps ad E æquales, ideoque per def. 10. lib. 1. ambo recti. Simili ratione, probabuntur recti anguli BEC, DEC, ſed & rectæ AE, CE, æquales erunt, quia in triangulis rectangulis AED, CED, cùm per propoſ. 47. libr. 1. ſint duo quadrata ſub AE, ED, ſimul æqualia quadrato rectæ AD; & duo quadrata ſimul, rectarum CE, ED, æqualia quadrato rectæ CD; & quadrata rectarum æqualium AD, CD, ſint æqualia; erunt per 1. ax. lib. 1. duo illa quadrata, duobus iſtis quadratis æqualia, dempto ergo communi quadrato rectæ ED, relinquentur quadrata rectarum AE, CE, æqualia; ac proinde ipſæ rectæ AE, CE, æquales. Iam verò aſſero angulum AEC eſſe angulum acutum quæſitum inclinationis baſium ABC, CBD, ad inuicem, Tetraedri: Quod angulus AEC ſit acutus ſic probatur, ſit ſi fieri poſſit rectus, tunc per propoſ. 47. libr. 1. quadratum rectæ AC erit æquale quadratis ſimul ſumptis rectarum ęqualium AE, CE; hoc eſt quadratum rectæ AD æqualis ipſi AC, erit æquale quadratis duobus rectæ AE: ſed per coroll. noſtrum ſecundum ad propoſ. 12. libr. 13. Eucl. quadratum rectæ AD ſeu AC, potentia eſt ſeſquitertium rectæ AE; ergo ſi ſtatuamus quadratum rectæ AE eſſe trium partium, erit etiam trium earundem quadratum rectæ CE; vnde quadratum rectæ AC erit quatuor talium partium: debet autem eſſe ex cit. propoſ. 47. lib. 1. Elem. 6 partium; Cùm ergo 6 & 4 non conueniant, abſurda erit poſitio anguli AEC recti; non igitur erit rectus angulus AEC. Eſto verò ſi fieri poſſit obtuſus angulus AEC, tunc per propoſ. 12. lib. 2. quadratum lateris AC maius erit quadratis ſimul ſumptis rectarũ AE, CE; ſed ex oſtenſis ſi ponamus ſingula quadrata rectarum illarum AE, CE, 3 partium; duo ſimul quadrata illa erunt 6 partium; & quadratum rectæ AC, quatuor talium partium iuxta corollar. noſtrum cit. 2. ad prop. 12. libr. 13. Euclidis. & ſic quadratum rectæ AC minus erit quàm duo ſimul quadrata rectarum AE, CE, contra cit. propoſ. 12. libr. 2. elem. igitur angulus

AEC non poterit eſſe obtuſus. Cùm oſtenſus ſit non poſſe eſſe rectus, vel obtuſus, erit acutus. Huic verò angulo AEC angulum æqualem in plano exhibebimus hac ratione. Super recta FG æquali lateri AC, dati Tetraedri, fiat per propoſ.1. libr.1. triangulum æquilaterum FHG, cuius latus FG bifariàm ſectus ſit I per propoſ. 10. libr.1. rectaque HI ducatur, quæ erit ad angulos rectos in I, ipſi FG, vti iam probauimus per 8.propoſ.lib.1. Tùm interuallo HI, & centris F & G, fiant duo arcus circulorum ſe mutuò ſecantes in K, nam per propoſ.19. libr.1.latus HI maius eſt latere FI. quia opponitur angulo totali HFG, cùm aliud latus FI opponatur parti illius anguli, quandoquidem per coroll.prop. 6. libr. 1. triangulum æquilaterum FHG ſit æquiangulum: quare per prop.22.lib.1.poterit fieri triangulum ex tribus rectis FG, FK, GK, quãdoquidem duæ poſtremæ ſunt ſimul maiores tertia FG. Dico autem angulum FKG eſſe angulum inclinationis quæſitæ, æqualem angulo AEC prædicto acuto.

Demonſtratio. Quandoquidem duorum triangulorum ADE,HFI,duo anguli mediis litteris ſignati ſunt æquales videlicet ſinguli vna tertia duorum rectorum, in triangulis æquilateris ADB, HFG; & per conſtructionem ſunt latera duo AD, HF, æqualia per 1. axio. libr. 1. quia æqualia eidem lateri FG, per conſtructionem; tùm alia duo latera DE, FI, ſunt æqualia, vtpotè ſemiſſes laterum æqualium; erunt per propoſ.4.libr.1.baſes eorum HE, HI, æquales: Eodem modo probabuntur æquales baſes CE, HI, æquales in triangulis CDE, HGI. Ergo quia in triangulis AEC, FKG, duo latera AE, CE, ſunt æqualia duobus lateribus FK, GK, quia æqualia eidem HI, per 1.axio. libr.1. & baſes AC, FG, ſunt æquales per conſtructionem, erunt per propoſ. 8. libr. 1. anguli eorum AEC,FKG æquales: ſed per defin.6.lib.11. quia duæ rectæ lineæ AE,CE, ductæ ſunt in vtroque planorum ABD, CBD, ad idem punctum E, ſectionis BD, mutuæ dictorum planorũ, perpendiculares, erit angulus AEC acutus oſtenſus inclinationis dictorum planorum ABD,CBD; ergo angulus FKG, huic æqualis & in plano effectus, erit etiam acutus angulus dictæ inclinationis. Reperimus ergo propoſitum.

## COROLLARIVM.

*Omnes inclinationes baſium Tetraedri, ſunt inter ſe æquales.*

Fig.308. NAm anguli inclinationum illarum, ſunt anguli facti ab duabus rectis vt AE, CE, æqualibus ſubtenſi ab vno latere æqualium baſium æquilaterarum, vti ab AC: ergo per propoſ.8. lib.1. erunt æquales omnes iſti anguli inclinationum.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Diuiſis duabus baſibus duorum triangulorum æquilaterorum æqualium, bifariàm: recta linea ab angulis oppoſitis ducta ad hæc media puncta, erunt æquales.*

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Si trianguli æquilateri omnia latera bifariàm ſecentur: & rectæ lineæ ab angulis ipſis oppoſitis ducantur ad hæc media puncta, erunt æquales inter ſe.*

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

*In triangulis rectilineis ſi quadratum vnius lateris fuerit minus duobus quadratis ſimul reliquorum duorum laterum: angulus illi lateri ſubtenſus erit acutus.*

## PROPOSITIO II.

### Angulum inclinationis duarum Octaedri baſium, vnius ad alteram reperire, & in plano exhibere.

SVppoſitio. Octaedri ABCDEF duarum baſium ABE, ADE, vnius ad alteram, angulus inclinationis ſit reperiendus. Fig.309.

Conſtructio, & demonſtratio. Commune latus AE, duarum dictarum baſium triangularium æquilaterarum & æquiangularum ABE,ADE, bifariàm in G ſecetur, per propoſ.10. libr. 1. & rectæ ducantur BG, DG, quæ per coroll. noſtrum 1. ad propoſ.1. libri huius erunt perpendiculares ipſi AE lateri communique ſectioni dictarum baſium duarum; & per coroll. noſtrum 2. eiuſdem citat. propoſ. erunt æquales inter ſe, ipſæ BG, & DG: & iuxta def.6. libr.11. elem. continebunt angulum BGD inclinationis dictarum baſium: eritque ille angulus BGD obtuſus. Nam per propoſ.14. libr.13. elem. diameter

BD

BD octaedri dati, ſiue ſphæræ illud comprehendentis, eſt potentia dupla lateris AB ipſius octaedri: & per corollarium noſtrum 2. ad propoſ. 12. libr. eiuſdem citat. 13. quadratum lateris AB, eſt ſeſquitertium quadrati rectæ BG. Qualium igitur partiũ octo aſſumetur quadratum lateris BD ſeu diametri, talium erit quatuor, quadratum lateris AB; & talium trium quadratum rectæ BG: quare cùm rectæ BG, DG, ſint oſtenſæ æquales, quadrata earum erunt æqualia, & ſingula trium talium prædictarum partium; & ſimul ſumpta erunt ſex talium earundem partium: Cùm autem poſitum ſit quadratum rectæ B, octo earundem partium; In triangulo BGD, quadratum lateris BD, maius erit duobus ſimul quadratis laterum BG, DG. Iam verò ſi angulus BGD non ſit obtuſus, ſed rectus, vel acutus; ſi rectus, erunt per propoſ. 47. lib. 1. elem. quadrata ſimul ſumpta rectarum BG, DG, æqualia quadrato rectæ BD, contra demonſtrata; ſi acutus, erit quadratum rectæ BD, minus quadratis ſimul ſumptis rectarum BG, DG, per propoſ. 13. libr. 2. elem. contra oſtenſa: relinquitur ergo vt ſit obtuſus angulus inclinationis BGD duarum baſium ABE, ADE.

Huic porrò angulo BGD, ponemuſ in plano angulum æqualem MON, hac methodo: Per propoſ. 22. libr. 1. elem. ex tribus rectis lineis BD, BG, DG, triangulum BGD efficientibus, fiat ſupra MN rectam æqualem ipſi BD, triangulum MON, ita vt horum triangulorum ſint baſes BD, MN. Cùm duo latera BG, DG, ſint æqualia per conſtructionem duobus lateribus MO, NO, & baſes BD, MN, ſint æquales; erunt per propoſ. 8. libr. 1. elem. anguli BGD, MNO, æquales: ſed angulus BGD obtuſus oſtenſus eſt inclinationis quæſitus, ergo in plano poſuerimus angulum MON æqualem angulo inclinationis quæſitæ. Fecimus ergo imperatum.

### COROLLARIVM.

*Omnes inclinationes baſium Octaedri ſunt æquales.*

Fig. 309. NAm omnes diametri octaedri vtpotè eiuſdem ſphæræ ſunt ęquales; & omnes dictæ lineæ perpẽdiculares vt BG, DG, ſunt æquales; ergo per propoſ. 8. libr. 1. elem. angulos continebunt æquales: qui erunt anguli dictarum inclinationum, vti probauimus de angulo BGD.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*In triangulis rectilineis ſi quadratum vnius lateris fuerit maius quadratis ſimul ſumptis reliquorum duorum laterum: angulus iuxta lateri oppoſitus, erit obtuſus.*

## PROPOSITIO III.

### Angulum inclinationis duarum cubi baſium, vnius ad alteram inuenire; & in plano exhibere.

SVppoſitio. Cubi ABCDEFGH, duarum baſium ABCD, ADEF ad inuicem, angulus inclinationis ſit reperiendus, & in plano exhibendus. Fig. 310.

Dico angulum EDC, vel FAB, rectos ambos, eſſe angulum inclinationis duarum dictarum baſium.

Demonſtratio. Cùm enim ad rectam AD, quæ eſt communis ſectio dictarum baſium, duæ rectæ ED, CD, ſint perpendiculares ſeu ad angulos rectos, ex natura quadratarum baſium cubi; vel duæ rectæ FA, BA; erit per defin. 6. libr. 11. elem. angulus EDC rectus: vel angulus FAB rectus, angulus inclinationis dictarum baſium cubi. Quare quilibet angulus rectus rectilineus in plano exhibitus, erit angulus inclinationis duarum baſium cubi.

### COROLLARIVM.

*Omnes anguli inclinationum duarum baſium cubi quarumlibet, ſe mutuò ſecantium in vna recta communi linea, ſunt æquales inter ſe; quia recti omnes ex demonſtratis.*

## PROPOSITIO IV.

### Angulum inclinationis duarum baſium Icoſaedri, vnius ad alteram inuenire, & in plano exhibere.

SVppoſitio. Vna ex pyramidibus Icoſaedri, ſit ABCDEF, & reperiendus angulus inclinationis duarum eius baſium BAF, EAF, ad inuicem, ſe mutuò ſecantium in communi AF recta linea. Fig. 311.

Conſtructio. Triangulorum ABF, EAF, æquilaterorum & æquiangulorum & æqualium,

ſint ductæ in planis duobus pentagonarum baſium dodecaedri, ad idem N punctum ſectionis communis linearis KL illarum, perpendiculares eidem rectæ KL, comprehendent angulum inclinationis duarum datarum baſium, per defin.6.lib.11.element. Et quia in triangulis HNB, OQP, ſint per conſtructionem duo latera ęqualia HN, BN, duobus lateribus OQ, PQ, baſeſque HB, OP, æquales, comprehendent illa latera æqualia, angulos HNB, OQP, æquales, per propoſ.8. lib.1. fecerimus ergo imperatum.

Quod autem angulus ille HNB inclinationis ſit obtuſus, ſeu illi ęqualis factus OQP, ſic probatur. In pentagono ABRLK recta KB, per noſtrum coroll.7.ad propoſ.18.libr. 12.elem. parallelà erit lateri RL, tùm etiam recta BD parallela erit lateri RS, & recta DF parallela erit lateri ST, & recta FH parallela erir lateri TV, & recta HK parallela erir lateri VL. Sed & omnes rectæ KB, BD, DF, FH, HK, ſunt æquales inter ſe, per propoſ.4. libr. 1. eo quod ſint baſes triangulorum æqualia latera pentagonorum æquilaterorum & æquiangulorum & æqualium, æqualeſque angulos continentia. Ergo quia duæ rectæ KB, BD, ſunt parallelæ duabus rectis LR, RS, in diuerſiſque planis exiſtunt, angulus KBD æqualis erit angulo LRS, pentagoni LRSTV, per propoſ.10.lib.11.elem. Simili modo probabitur angulus BDF æqualis angulo RST, & angulus DFH æqualis angulo STV, & angulus FHK æqualis angulo TVL, & angulus HKB ęqualis angulo VLR. Præterea per propoſ.15.lib.11.elem. quia anguli KBD, ERS, contenti ab dictis parallelis KB, BD, & LR, RS, relatiuè, ſunt æquales; parallela erunt plana triangularia KBD, LRS: & per eandem propoſ. citat. eademque principia, erunt parallela plana triangularia BDF, RST: Cùm ergo habeamus duo plana triangularia KBD, BDF, commune latus BD habentia, plano eidem pentagono LRSTV ſuſtentanti prædicta alia duo triangularia plana LRS, RST, parallela; erit per coroll. noſtrum 1.ad propoſ.16.lib.13.elem. in eodem plano duo triãgularia plana KBD, BDF: ideoque eriam tres rectæ lineæ iſtæ KB, BD, DF, ſuſtentabuntur in eodem plano. Tùm ex eiſdem principiis modò allatis, aliæ duæ rectæ lineæ FH, HK, ſuſtentabuntur in eodem plano prædicto rectarum alium trium KB, BD, DF: atque adeò quinquelaterum erit KBDFH æquilaterum, nam oſtendimus illas quinque lineas rectas eſſe æquales; ſed etiam erit æquiãgulum, ob angulos eius oſtenſos æquales angulis pentagoni æquilateri & æquianguli LRSTV, quod vna eſt è baſibus Dodecaedri. Atque hoc modo demonſtrabimus reliqua omnia huiuſmodi deſcripta pẽtagona in ſuperficie dodecaedri eſſe æquilatera & æquiangula, & æqualia eſſe inter ſe ob larera æqualia & ęquales angulos. Et quia angulus pentagoni in circulo inſcripti inſiſtit tribus quintis totius circumferentiæ illius, & angulus quadrati in eodem circulo inſcripti inſiſtit in ſemicirculo per propoſ. 31. libr.3. elem. maioreſque ſunt tres quintæ circumferentiæ circuli ſemicircumferentia eiuſdem, ideò per prop.33.libr.6.elem. maior erit angulus pentagoni quam rectus quadrati. Ergo ſi in plano ſupra dictam rectam OP æqualem cuilibet rectæ HB, vel BF, & ſimilibus ſubtenſis angulis pentagoni KBDFH, vel aliorum pentagonorum huiuſmodi æqualium prædictorum in ſuperficie Dodecaedri deſciptorum, æqualibus demonſtrandis per 4. prop.libr.1.elem. ob latera æqualia circa dictos æquales angulos pentagonorum prædictorum, fecerimus triangulum OYP, æquale triangulo HKB, habens latera OY, PY, æqualia lateribus HK, BK, ad eaſdem partes aliorum laterum OQ, PQ, triangulo OQP; quia oſtendimus latera HK, BK, eſſe maiora lateribus HN, BN, etiam latera OY, PY, maiora erunt lateribus OQ, PQ. Iam vero vel iſta latera OY, PY, cadent in lateribus larerum OQ, PQ; vel intra triangulum OQP, vel extra triangulum iſtud ſupra Q punctum; vel confluent in eaſdem rectas OQ, PQ. Non vltimum iſtud, nam maiora eſſent æqualia maioribus. Non in laterum QO, PQ, puncto aliquo, neque intra triangulum OQP, nam per propoſ.21.lib.1.elem. latera illa maiora eſſent ſimul minora duobus minoribus OQ, PQ; quæ cùm ſint abſurda, poſitiones vnde profluunt, falſæ erunt: relinquitur ergo vt cadant in puncto extra triangulum OQP, ſupra punctum Q; tunc verò per propoſ. cit. 21. libr.1. elem. angulus OPQ erit maior angulo OYP. Sed angulus OQP eſt æqualis angulo inclinationis quæſitæ, & angulus OYP eſt æqualis angulo maiore quàm rectus, ergo angulus inclinationis quæſitæ eſt obtuſus. quod erat concludendum.

## COROLLARIVM.

*Omnes inclinationes baſium dodecaedri duarum ad inuicem ſunt aquales.*

NAm ſiunt ſupra baſes æquales, ab duobus lateribus æqualibus, quare per propoſ.8.libr.1.elem. anguli comprehenſi ab duobus illis lateribus æqualibus aliis omnibus huiuſmodi lateribus aliarum inclinationum huiuſmodi, erunt æquales.

COROL-

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Recta omnes linea in pentagonis ducta ab angulo vno ad medium oppoſitorum laterum, ſunt perpendiculares illis.*

Fig.312. HOc oſtendimus in recta BN, ducta ab angulo B oppoſito lateri KL ad medium punctum N, huius lateris.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*In pentagonis æquilateris, & æquiangulis, recta ſubtenſæ angulis illorum terminata in extremitatibus laterum efficientium angulos illos; ſunt æquales,*

Fig.312. HOc probauimus in rectis KB, BD æqualibus ſubtenſis angulis KAB, BCD, pentagonorum KABRL, BCDSR, æqualium.

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

*In pentagonis æquilateris, & æquiangulis; recta linea ducta ab angulis illorum ad media puncta laterum illis oppoſitorum, ſunt æquales inter ſe.*

HOc demonſtrauimus in rectis BN, HN. Fig.312.

## COROLLARIVM NOSTRVM IV.

*Recta linea ducta ab vno angulo pentagoni ad oppoſitum eius latus perpendicularis; medium huius lateris punctum cadit, ſeu illud biſariàm ſecat.*

VEluti recta BN, quæ non poteſt eſſe perpendicularis ipſi lateri KL producto, nec ad eius extremum in K vel L, neque ad vllum aliud punctum ex intermediis præter medium; nam diuiſo latere KL in N bifariàm, recta BN eſſet per 1. noſtrum coroll. ſuperiùs perpendicularis ipſi KL, & alia ex aduerſario, ergo in triangulo reſultante eſſent duo anguli recti contra prop. 17. libr. 1. elem. igitur cadet in medium eius punctum N. Fig.312.

COM-

# COMMENTARIVS IN LIBRVM PRIMVM HYPSICLIS ALEXANDRINI

## ET RECENTIORVM DE QVINQVE CORPORIBVS REGVLARIBVS.

### PROPOSITIO I.

Quæ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpẽdicularis ducitur; dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul; & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti. Eſt Hypſiclis.

Fig.313. SVPPOSITIO. In circulo cuius centrũ A, ſit inſcriptum pentagonum æquilaterum & æquiangulum, BC latus obtinens; & ex centro dicto A in hoc BC latus ſit perpendicularis AE ducta, quæ per propoſ.3.lib.3. elem. ipſum latus BC bifariàm in E ſecabit; & arcum BFC lateris BC ſecabit ſi producatur vltra E in F punctum circũferentiæ, nam in triangulis rectangulis FEC, FEB, ob angulos rectos ad E ad verticem æquales aliis deinceps rectis AEB, AEC per prop.15.lib.1.elem. cùm latera FE, EC, ſint æqualia lateribus FE, EB, baſes erunt rectæ lineæ FC, FB ducendæ æquales, per prop.4.lib.1.elem. ideoque arcus FC, FB, erunt æquales per coroll. noſtrum ad prop.28. libr.3.elem. quare recta FC, erit chorda decimæ partis circumferentiæ circuli dati circumſcribentis pentagonum datum, nam arcus BFC, eſt quinta pars eiuſdem circumferentiæ totius circuli; quare recta FC erit latus decagoni in eodem circulo inſcripti; & ſi ducatur ſemidiameter AC, eiuſdem circuli, erit æqualis lateri hexagoni in eodem circulo inſcripti iuxta coroll. prop.15.libr.4.elem. Dico autem quod recta AE ſit dimidium totius rectæ lineæ compoſitæ ex AC latere hexagoni & FC latere decagoni eidem circulo inſcripti.

Conſtructio. Quia ſunt duo triangula rectangula FEC, AEC, erit in primo quadratum rectæ FC æquale quadratis duobus ſimul ſumptis rectarum FE, EC; tùm in ſecundo quadratum rectæ CA, erit ęquale quadratis ſimul ſumptis rectarum CE, EA, per propoſ.47.libr.1.elem. Et quia per noſtrum coroll.1.ad prop.8.lib.12.elem. recta AC latus hexagoni maior eſt quàm recta FC, latus decagoni in eodem inſcriptorum, erit quadratum rectę AC, maius quàm quadratum rectæ FC; ergo ſi ex his inæqualibus quadratis ſubtrahatur commune quadratum rectæ CE, relinquetur quadratum rectæ EA maius quàm quadratum rectæ FE; quare ipſa recta EA maior erit quàm recta FE; ergo per 3. prop. libr.1.elem. poterimus detrahere de maiore recta EA, rectam EG æqualem minori FE. denique traducenda erit recta CG.

Demonſtratio. Quia in triangulis FEC, GEC, duo latera FE, EC, ſunt æqualia duobus lateribus GE, EC, anguloſque rectos comprehendunt æquales, erunt per prop. 4. lib.1.elem. baſes eorum FC, GC æquales, & anguli eorum EFC, EG, æquales; & quia FC

eſt latus decagoni, erit etiam GC, latus decagoni in dato circulo inſcripti. Qualium autem tota ſemicircumferentia FCD, circuli, eſt quinque partium æqualium, talium erit FC arcus vnius, videlicet arcus lateri FC decagoni ſuppoſitus, & talium erit quatuor, arcus reliquus CD; ergo per propoſ. 33. libr. 6. elem. vt arcus CD quadruplus eſt arcus CF, etiam angulus CAD quadruplus erit anguli CAF. Et quia per prop. 20. lib. 3. elem. angulus CAD duplus eſt anguli AFC, ille angulus AFC erit dimidium anguli CAD; vnde angulus ipſe AFC erit duplus anguli CAF; ſed angulus CGF oſtenſus eſt æqualis angulo AFC vel GFC, ergo etiã angulus CGF eſt duplus anguli CAF per 7. prop. libr. 5. elem. ergo CAF angulus erit dimidium anguli CGF. Eſt autem per prop. 32. lib. 1. elem. angulus CGF æqualis angulis duobus CAG, ACG, & angulus CAG vel CAF, oſtenſus eſt eſſe dimidium anguli CGF; ergo reliquus angulus ACG erit etiam dimidium alterum anguli CGF: quare duo anguli CAG, ACG, erunt æquales per 7. ax. libr. 1. elem. vnde per 6. prop. libri eiuſdem 1. elem. duo latera CG, AG erunt æqualia, & AG æquale ipſi CG, erit æquale lateri FC decagoni oſtenſo ęquali ipſi CG, per 1. ax. lib. 1. elem. Quod ſi ad has æquales rectas CF, AG, addantur æquales rectæ FE, GE oſtenſæ, fient per 1. axio. lib. 1. elem. duæ rectæ CF, FE, æquales toti rectæ AGE quare omnes ſimul iunctæ, hoc eſt AGE, EF, FG, ſeu AF, FC, erunt duplæ ipſius AGE videlicet perpendicularis rectæ AE ab centro A ductæ ad latus BC pentagoni circulo inſcripti centrum A obtinenti: ſed rectæ AF, FC, ſunt latera hexagoni & decagoni in eodem dicto circulo inſcripti, ergo dicta recta AE, erit ſemiſſis laterum hexagoni & decagoni ſimul ſumptorum, in dato circulo inſcriptorum. quod erat concludendum.

### COROLLARIVM I.

*Linea recta perpendicularis ab centro circuli ducta ad chordam eius, ſecat arcum eiuſdem chordæ biſariàm.*

Fig. 313. HOc oſtenſum eſt in recta AE perpendiculari ad rectam BC chordam, ſecante arcum BC biſariàm.

### COROLLARIVM. II.

*Linea perpendicularis ex centro circuli circumſcribentis pentagonum æquilaterum & æquiangulum ad latus huius pentagoni, æqualis eſt vtrique lineæ ſimul, & ei quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni eidem circulo inſcripti.*

NAm per coroll. prop. 12. libr. 13. elem. recta linea ex centro circuli perpendicularis ad latus trianguli æquilateri in illo inſcripti, æqualis eſt dimidio ſemidiametri: ergo cùm per iſtam prop. recta linea ex eodem centro circuli prædicti ad latus pentagoni ſit dimidia duarum ſimul rectarum, ſemidiametri videlicet circuli prædicti, & lateris decagoni in eo inſcripti; dimidium huius lineæ, nimirum ſemidiameter vel prædicta linea ex centro eiuſdem circuli ad latus trianguli dicti æquilateri orthogonia, & ſemiſſis lateris decagoni, æqualia erunt ſimul ſumpta dictæ lineæ ex centro circuli eiuſdem prædicti ad latus pentagoni.

## PROPOSITIO II.

Si binæ rectæ lineæ extrema & media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones. Eſt Hypſiclis.

SVppoſitio. Sint duæ rectæ lineæ AB, CD, quarum prima in E, & ſecunda in F, ſecta ſit per prop. 30. lib. 6. elem. extrema & media ratione. Dico ipſas ſectas eſſe in eaſdem rationes; hoc eſt eſſe vt AB ad CD, ita AE ad CF; tùm eſſe vt AE ad EB, ita CF ad FD. Fig. 314.

Demonſtratio. Nam per def. 3. lib. 6. elem. eſt vt AB ad AE, ita AE ad EB; & vt CD ad CF, ita CF ad FD; erit ergo per prop. 17. lib. 6. cit. tàm rectangulum ſub AB, EB, æquale quadrato rectæ AE; quàm rectangulum ſub CD, FD, æquale quadrato rectæ CF; ac proptereà proportio æqualitatis in illis duabus cõparationibus. Prætereà per coroll. noſtr. ad prop. 22. libr. 5. elem. poſitis prædictis erit vt quadruplum rectãguli ſub AE, EB, ad rectæ AE quadratum, ita quadruplum rectanguli ſub CD, FD, ad quadratum rectæ CF: & iuxta coroll. prop. 18. lib. 5. cit. componendo erit, vt quadruplum rectanguli ſub AB, EB,

& qua-

& quadratum rectæ AE, ad ipſum quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectâguli ſub CD, FD, & quadratum rectæ CF, ad quadratum ipſius rectæ CF: verùm per prop. 8. libr. 2. elem. rectangulum quater comprehenſum ſub AB, EB, & ſimul quadratum rectæ AE, æqualia ſunt quadrato rectæ AEB; & etiam rectangulum quater comprehēſum ſub CD, FD, & ſimul quadratum rectæ CF, æqualia ſunt quadrato rectæ CFD; ergo cùm ſit in hiſce comparationibus proportio æqualitatis, erit per prop. 11. lib. 5. elem. vt quadratum rectæ compoſitæ ex AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita etiam quadratum rectæ compoſitæ ex CD, FD, ad quadratum rectæ CF: quare per propoſ. 16. lib. 6. elem. erit vt recta cōpoſita ex AB, EB, ad rectam AE, ſic recta compoſita ex CD, FD, ad rectam CF: tùm iuxta coroll. cit. propoſ. 18. libri 5. elem. erit componendo, vt rectæ ſimul AB, EB, AE, vtpotè dupla ipſius AB, ad rectam AE, ita rectæ ſimul CD, FD, CF, videlicet dupla ipſius CD, ad rectam CF; & permutando iuxta 16. propoſ. lib. 5. elem. erit vt dupla ipſius AB ad duplam ipſius CD, ita AE ad CF: ſed per prop. 15. libr. cit. 5. eſt vt dupla ipſius AB ad duplam ipſius CD, ita ipſa AB ad ipſam CD; ergo per prop. 11. lib. cit. 5. erit vt AB ad CD, ita AE ad CF: Quare cùm ſit vt tota AB, ad totam CD, ſic ablata AE ad ablatam CF; erit per prop. 19. lib. cit. 5. reliqua EB ad reliquam FD, vt tota AB ad totam CD; & per prop. 11. lib. cit. vt AE ad CF, ita EB ad FD; & permutando, erit vt AE ad EB, ita CF ad FD. & ſic per omnes argumentandi modos libri quinti elem. demonſtrauimus ergo intentum.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Latus hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum, eandem proportionem habet, quam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipſius pentagoni.*

NAm per 9. prop. libr. 13. elem. latus hexagoni & decagoni ſimul efficiunt rectam lineā media & extrema ratione ſectam; cuius maius ſegmentum eſt latus hexagoni, & minus latus decagoni; & per 8. prop. eiuſdem libr. recta ſubtendens lineā angulum ſecta media & extrema ratione, ſegmentum habet maius æquale lateri ipſius pentagoni. Ergo per iſtam propoſitionem erit latus hexagoni ad latus decagoni, hoc eſt maius ſegmentum totius compoſitæ ex illis, ad minus ſegmentum, ſicut recta ſubtendens angulum pentagoni ad ſegmentum eius maius videlicet latus pentagoni.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta, ſecetur extrema & media ratione: maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ; minus verò æquale eſt dimidio lateris decagoni eidem circulo inſcriptorum*

EX centro A circuli ad BC latus pentagoni in eo inſcripti ducta ſit perpendicularis AD, ſectaque in E extrema & media ratione: Dico maius eius ſegmentum AE eſſe æquale ſemiſſi ſemidiametri ADF circuli, quæ per coroll. prop. 12. libr. 3. elem. æqualis eſt rectæ perpendiculari ductæ ab eodē centro A ad latus trianguli ęquilateri in hoc circulo inſcripti; tùm dico minus ſegmentum ED eſſe æquale dimidio lateris FC decagoni in hoc eodē circulo inſcripti: quandoquidem arcus BFG ſit quinta pars circuli, & recta ADF ſecet bifariàm hunc arcum in F, per coroll. propoſ. 1. libri huius; vnde arcus FC erit dimidium illius BFC, proindeque decima pars circuli, & chorda FC, latus decagoni. Fig. 315.

Tota ex AF, FC, compoſita, per 9. prop. lib. 13. elem. ſecta eſt extrema & media ratione in F, & huius totius dimidiū eſt recta AD per 1. prop. libr. huius. Ergo quia eſt ſecta recta AD in E, extrema & media ratione; erit per iſtam propoſitionem, vt AD ad AFC, ita AE ad AF, & ita ED ad FC: ſed AD eſt oſtenſa ſemiſſis totius AFC; ergo etiam AE erit ſemiſſis ipſius AF ſemidiametri; ideoque æqualis ſemidiametro AF, vel perpendiculari rectæ ex centro A ad latus trianguli æquilateri; tùm ED erit ſemiſſis ipſius FC lateris decagoni.

## PROPOSITIO III.

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur: quod ex latere pentagoni, & quod ex ea quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur quadrati. Eſt Hypſiclis.

318.

ptum pentagonum æquilaterum & æquiangulum KLMNP, ex quo fit Icoſaedrum iuxta prop.16. libr.13. elem. & per prop.14. libr.4. elem. circumſcribatur circulo dictum pentagonum: tùm ex centris circulorum, P, Q, R, quæ ſunt per coroll. noſtrum 7. ad prop. 4. lib.4. elem. intra figuras ipſas proprias traiiciantur ſemidiametri PE, QH, RM, ad angulos figurarum pentagonarum & trianguli ſuperiorum. Tùm per propoſ. 30. lib.6. elem. ſecetur in 5, ſemidiameter RM, extrema & media ratione, ita vt RS ſit maius illius ſegmentum, quod per 4. prop. libr. huius erit latus decagoni in hoc circulo KLMNO inſcripti, in quo per coroll. prop. 15. libr.4. elem. ipſa recta RM, erit latus hexagoni. Denique recta CF ducatur, quæ per 2. coroll. prop. 17. libr.13. elem. erit latus cubi in eadem ſphæra inſcripti qua & dodecaedrum & icoſaedrum prædicta.

Demonſtratio. Quia per coroll. 1. prop. 17. libr. 13. elem. BF latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris cubi CF, ſecti media & extrema ratione; erit per 2. prop. lib. huius, vt tota CF ad totam RM, ita BF maius ſegmentum ad RS maius ſegmentum: vnde iuxta prop.16. lib.6. elem. erit vt quadratum rectæ CF ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF ad quadratum rectæ RS: & per noſtrum coroll. ad prop.22. libr.5. elem. erit vt triplum quadrati rectę CF ad quintuplũ quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF ad quintuplum quadrati rectæ RS: Eſt verò triplum quadrati rectæ CF lateris cubi, æquale quintuplo quadrati rectæ RM, (nam ex propoſ. 15. lib.13. elem. tàm triplum quadrati lateris CF cubi, quàm quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex corollar. 1. prop.16. libr.13. elem. æquale quadrato ex A diametro ſphæræ poſita) ergo & triplum quadrati rectæ BF, erit æquale quintuplo quadrati rectæ RS. Quoniam autem lateris MN pentagoni quadratum eſt æquale quadrato lateris RM hexagoni, & quadrato rectæ RS decagoni, iuxta propoſ. 10. libr. 13. elem. erunt etiam quinque quadrata ſimul rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. ergo & quinque quadrata rectæ MN, æqualia erunt tribus quadratis rectæ CF (quia probata ſunt æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt oſtenſa quinque quadratis rectæ RS. Quia verò per propoſ. 3. libr. huius, quadrata rectarum CF, BF, ſint æqualia quinque quadratis ſemidiametri PE; Et quia tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectæ MN, ſunt æqualia quindecim quadratis rectæ QH ſeu ſemidiametri QH, (cùm enim MN æqualis ſit lateri GH icoſaedri, ſeu trianguli æquilateri, & per propoſ. 12. libr. 13. elem. ſit quadratum ipſius GH æquale tribus quadratis ſemidiametri QH; erunt quinque quadrata rectæ GH vel MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH:) erunt etiam quindecim quadrata rectæ PE æqualia quindecim quadratis rectæ QH: ideoque vnum quadratum rectę PE, vni quadrato rectæ QH, æquale; quare per noſtrum coroll. 4. ad prop.46. libr. 1. rectæ ipſæ PE, QH, æquales; & per def. 1. libr. 3. elem. ipſi circuli circumſcribentes dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra inſcriptorum, æquales erunt: vel idem circulus illud pentagonum & triangulum circumſcribet, ſicuti fuit propoſitum.

## PROPOSITIO VI.

Si ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni: Erit quod ſub dicto latere & perpendiculari comprehẽditur rectãgulum trigeſies ſumptum, Dodecaedri ſuperficiei æquale. Eſt Hypſiclis.

Svppoſitio. Sit vnum è pentagonis dodecaedri, ABCDE, circulo circũſcriptum; *Fig.319.* ex cuius centro F quod per coroll. noſtrum 7. ad prop.4. lib.4. elem. erit intra ipſum triangulum, ad vnum CD latus, recta linea FG demiſſa ſit ad angulos rectos. Dico quod rectangulum trigeſies ſumptum ſub hac perpendiculari FG, & latere CD, ſit æquale ſuperficiei dodecaedri.

Conſtructio. Hæc perpendicularis FG, cadet per noſtrum coroll. 4. ad prop. 5. Iſidori de inclinatione baſium quinque corp. reg. in medium G punctum, lateris CD: quare ſi per prop. 31. li. 1. elem. per centrum F circuli ducatur recta HFI parallela rectæ ipſi CD; & per prop. 11. lib. eiuſdem excitentur rectæ lineæ CH, DI, perpẽdiculares ipſi CD, occurrentes in H & I, ipſi rectæ HFI; erunt per 28. prop. lib. eiuſdem, parallelæ ipſæ CH, DI: vnde reſultabit parallelogrammum CI, rectangulum, ſub CD, & FG; nam etiam per citat. prop. 28. parallelæ erunt rectæ FG, ID; vnde

per prop. 34. libr. eiuſdem, æqualia erunt latera FG, ID.

Demonſtratio. Dodecaedrum duodecim conſtat pẽtagonis æqualibus dato ABCDE, quæ omnia reſoluentur in quinque triangula æqualia: quare tota ſuperficies dodecaedri conſtabit ex ſexaginta triangulis æqualibus ipſi CFD triangulo: ſed eò quòd triangulum CFD, & rectangulum CI, eãdem obtineant baſim CD, & ſint inter eaſdem parallelas rectas HFI, CD, rectangulum CI duplum erit trianguli CFD: ergo trigeſies tale rectangulum ſub latere pentagoni CD, & perpendiculari prædicta FG, erit æquale ſexaginta huiuſmodi triangulis æqualibus, quibus æqualis eſt tota ſuperficies dodecaedri: quare triginta huiuſmodi rectangula æqualia erunt ſuperficiei dodecaedri. quod erat concludendum.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Rectangulum ſub dicta perpendiculari & ſemiſſe lateris pentagoni, ſexageſies ſumptum; erit æquale ſuperficiei Dodecaedri.*

Fig. 319. SI enim huius rectanguli GI, duplum CI, trigeſies ſumptum æquale eſt ſuperficiei dodecaedri: ſemiſſis eius videlicet rectangulum GI, ſub dicta perpendiculari FG, & GD dimidio totius lateris CD pentagoni, ſexageſies ſumptum, æquale erit eidem ſuperficiei Dodecaedri. Quod autem GI, ſit dimidium CI, patet ex 1. propoſ. libr. 6. elem. ſe enim habent vt baſes CD, GD, quarum prima eſt dupla ſecundæ, ſeu ſecunda eſt ſemiſſis primæ.

## PROPOSITIO VII.

Si ex centro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribẽtis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli: Erit quod ſub dicto latere & perpendiculari comprehenditur rectangulum trigeſies ſumptum, Icoſaedri ſuperficiei æquale. Eſt Hypſiclis.

Fig. 320. SVppoſitio. Icoſaedri Triangulum ABC vnum è ſuis viginti æquilateris & æquiangulis & æqualibus, circulus ABC circumſcribat, è cuius centro D, quod intra ipſum triangulum erit, per corollar. noſtrum 7. ad prop. 4. libr. 4. elem. ad latus BC ipſius trianguli, recta linea DE perpendicularis ducta ſit, quæ per 3. propoſ. lib. 3. elem. ipſum latus bifariàm ſecabit in E. Dico quod rectangulum ſub iſta DE & latere BC trigeſies ſumptum, ſit æquale ſuperficiei Icoſaedri, ſeu viginti prædictis triangulis adæquantibus eius ſuperficiem.

Conſtructio. Ex centro D circuli ad angulos A, B, C, trianguli, rectæ lineæ ducantur, quæ erunt æquales inter ſe per def. 15. libr. 1. elem. & reſoluent triangulum in tria triangula ADB, ADC, BDC, quæ quoniam duo latera habebunt æqualia, videlicet ſemidiametros circuli, & baſes æquales, nimirum latera æqualia trianguli æquilateri, erunt per coroll. prop. 8. libr. 1. elem. æqualia inter ſe. Iam verò per propoſ. 31. libr. 1. elem. per centrum D circuli ducatur recta FDG parallela lateri BC; & per prop. 11. libr. eiuſdem, erigantur ex punctis B & C, rectæ lineæ BF, CG, perpendiculares ipſi BC, occurrentes in F & G, alteri rectæ FDG; iſtæ BF; CG, erunt per prop. 28. lib. cit. elem. parallelæ; ideoque parallelogrammum BG, & parallelogrammum BD, & parallelogrammum EG; omniaque rectangula per prop. 34. libr. eiuſdem. & æquales DE, GC.

Demonſtratio. Rectangulum BG ſub latere BC, & recta GC æquali ipſi DE, duplum erit trianguli BDC, per prop. 41. lib. 1. elem. quia eſt inter eaſdem parallelas FG, BC, ſupra eandem baſim BC: æquale ergo erit idem rectangulum BG duobus triangulis BDC, ADB, æqualibus oſtenſis, hoc eſt duabus tertiis totius trianguli ABC: Igitur tria rectangula huiuſmodi, ſeu ter rectangulum ſub BC, DE, æquale erit duobus triãgulis æqualibus ipſi ABC. Sumendo autem multiplex decuplum horum duorum triangulorum æqualium ipſi ABC, erit 20, pro numero triangulorum æqualium adæquantium totam ſuperficiem Icoſaedri, igitur ſi multiplicauero tria illa rectangula prædicta æqualia illis duobus triangulis, per eundem numerum 10, fient triginta rectangula ſub eiſdem rectis BC, DE, vel rectangulum ſub BC, DE, trigeſies ſumptum: & ſic erunt æquemultiplicia iſta duo poſtrema, priorum veluti partium: ergo per prop 15. libr. 5. elem. vt tria illa rectangula ſunt æqualia duobus illis triangulis æquilateris & æqualibus, ita etiam triginta talia rectangula erunt æqualia viginti illis triangulis æquilateris & æqualibus, ergo rectangulum ſub BC, DE, trigeſies ſumptum, æquale erit toti ſuperficiei Icoſaedri adæquatæ ab illis 20 triangulis æquilateris & æqualibus. quomodo fuit propoſitum.

COROL-

## COROLLARIVM.

*Superficies cuiuſlibet Dodecaedri ad ſuperficiem cuiuſlibet Icoſaedri etiam in diuerſis ſpheris inſcriptorum; eſt ſicut rectangulum contentum ſub latere dodecaedri & recta perpendiculari ab centro pentagoni ipſius dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri & recta linea perpendiculari ab centro trianguli Icoſaedri ad latus dictum.*

NAm per 6.prop.præced.ſuperficies Dodecaedri eſt æqualis rectangulo trigeſies ſumpto prædicto; & per præced.7.ſuperficies Icoſaedri eſt æqualis rectãgulo trigeſies ſumpto prædicto: ergo tam rectangulum illud erit trigeſima pars ſuperficiei dodecaedri, quàm illud Icoſaedri.igitur per prop.15.lib.5.elem. erit propoſitum in hoc corollario.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I.

*Si ex centro circuli circumſcribentis vnum è quatuor triangulis æquilateris & æquiangulis & æqualibus Tetraedri quod erit per coroll. noſtrum 7. ad prop.4.lib.4.elem.intra aream trianguli circumſcripti, recta linea ducta ſit perpendicularis ad latus vnum huius trianguli æquilateri. Rectangulum ſexies ſumptum ſub hac perpendiculari recta; & latere prædicto Tetraedri ſiue trianguli eius, erit æquale toti ſuperficiei Tetraedri.*

Fig.320. ASſumendo figuram huius propoſitionis, cùm oſtenderimus rectangula tria BG, ſub latere BG, & recta perpendiculari DE, eſſe æqualia duobus triangulis æquilateris æqualibus ipſi ABC: manifeſtum eſt, ſex huiuſmodi rectangula æqualia eſſe quatuor huiuſmodi triangulis, hoc eſt toti ſuperficiei Tetraedri. manifeſtum igitur eſt hoc corollarium.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I I.

*Si ab centro circuli circumſcribentis vnum è triangulis æquilateris & æquiangulis & æqualibus ex octo terminantibus octaedrum, recta linea ducatur perpendicularis ad vnum è lateribus huius trianguli: Rectangulum duodecies ſumptum ſub iſta perpendiculari recta & latere iſto, æquale erit toti ſuperficiei dodecaedri, ſeu octo ſuis triangulis æquilateris & æquiangulis & æqualibus prædictis.*

ASſumendo figuram ſuperiorem. Cùm demonſtrauerimus in hac propoſitione tria rectangula ſub DE perpendiculari recta, & latere BC, eſſe æqualia duobus triangulis æquilateris æqualibus ipſi ABC triangulo; & octo huiuſmodi triangula ſint tota ſuperficies octaedri; certum eſt duodecim huiuſmodi rectangula ſeu illud ſub DE & BC, duodecies ſumptum, eſſe æquale illis octo triangulis, ſeu toti ſuperficiei octaedri.quod erat propoſitum in hoc corollario. Fig.320.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I I I.

*Si ex centro circuli circumſcribentis vnum quadratum è ſex terminantibus hexaedrum ſiue cubum, recta linea demittatur perpendicularis vni lateri huius quadrati: Rectangulum duodecies ſumptum ſub hac perpendiculari recta & latere huius quadrati ſeu Cubi, æquale erit toti ſuperficiei Cubi, vel ex eius baſibus.*

PEr coroll. noſtrum 7. ad propoſ. 4. lib. 4. elem. centrum E circuli circumſcribentis quadratum vnum ABCD ex ſex terminantibus cubum æqualibus, eſt intra ipſum quadratum; ergo rectæ lineæ EA, EB, EC, ED, ductæ ab hoc centro ad angulos huius quadrati qui exiſtunt in circumferentia circuli, erunt æquales ex natura circuli, quare eũ triangula iſta quatuor AEB,BEC, CED, DEA, in quæ reſoluitur hoc quadratum, habeãt latera æqualia, videlicet ſemidiametros circuli, & baſes æquales nimirum latera quadrati,erunt per coroll.prop.8.libr.1.elem.æqualia. Iam verò ſi per prop.31.libr.1.elem. tranſmittamus rectam lineam GH parallelam lateri DC, tranſeuntem per E punctum, & ſecãtem in G & H, duo latera AD, BC, quadrati, reſultabit parallelogrãmum DH, quod erit per prop.34. libr. eiuſdem cit. rectangulum, ob angulos in D & C rectos & proprios quadrati, vnde alij duo oppoſiti anguli in G & H erunt recti; vnde etiam alia duo rectangula DE,FH, minora erunt etiam rectangula, ideoque per cit.prop.34. latera HC, EF, oppoſita æqualia, quare totum rectangulum DH erit ſub latere DC in quod recta EF perpendicularis incidit, & ſub recta CH, vel FE æqualibus. hoc verò rectangulum duodecies ſumptum, dico eſſe æquale toti ſuperficiei cubi, vel ſex eius quadratis illum complectentibus. Imprimis enim per prop.41.lib.1.elem. quia triangulũ DEC quarta pars totius quadrati, eandem habet baſim cum rectangulo parallelogrammo DH, exiſtuntque inter eaſ- Fig.321.

dem parallelas rectas DC, GH; hoc rectangulum erit duplum trianguli DEC, ſeu quartæ parti quadrati dati; ideoque æquale dimidio huius quadrati; ergo duo huiuſmodi rectangula erunt æqualia toti quadrato: igitur duodecim huiuſmodi rectangula ſub DC & EF, erunt æqualia ſex quadratis ſuperficiei cubi: vel quod idem eſt, rectangulum ſub DC & EF, duodecies ſumptum erit æquale toti ſuperficiei cubi, vel ſex eius baſibus quadratis æqualibus, quomodo fuit propoſitum in hoc corollario.

## PROPOSITIO VIII.

Rectangulum contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineæ ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti; æquale eſt dicto pentagono. Eſt Hypſiclis.

Fig. 322. SVppoſitio & conſtructio. Pentagonũ ABCD, circulo circumſcribatur per propoſ. 14. libr. 1. elem. huius, circuli centrum F erit intra figuram pentagonam, per 7. ax. noſtrum ad propoſ. 4. libr. cit. & reſoluetur in quinque triangula æqualia per coroll. noſtrũ vltimum prop. cit. 4. quorum vnum erit AFB ſi ducatur recta FB ſemidiameter circuli, & tota diameter AFG, quæ iuxta coroll. 1. prop. 10. lib. 13. elem. ſecabit bifariàm in K rectam BE ducendam ſubtenſam angulo BAE pentagoni, eò quòd arcum BAE bifariàm in A diuidat. Præterea ſi per prop. 10. libr. 6. elem. diuidatur tota diameter AG in quatuor partes æquales, eligendo alteram in qua ſumptæ ſint quatuor partes æquales conſequẽtes per prop. 3. libr. 1. elem. erit ſemidiameter AF diuiſa in duas tales, ſitque FH vna quarta illarum quatuor: Eodem modo ſumptis ſex partibus æqualibus conſequenter in vna recta linea, diuidatur recta BE in ſex æquales proportionales dictis ſex lineæ aſſumptæ, & illarum vltima ſit IE vna ſexta. certũ eſt quia oſtendimus rectam BE ſectam eſſe bifariàm in K ab recta AF, tres partes æquales ex illis ſex contineri in BK, & duas in KI, & IE eſſe vnam, atque adeò rectam BK eſſe ſeſquialteram rectæ KI. Simili ratione quia recta AG ſecta eſt in quatuor partes, earumq́ue tres ſunt AH, & duæ AF, ipſa AH erit ſeſquialtera alterius AF. His poſitis pro conſtructione; Dico rectangulum ſub AH tribus quartis diametri AG circuli pentagonum circumſcribentis, & ſub BI quinque ſextis ſubtendentis angulum pentagoni dicti, æquale eſſe dicto pentagono.

Demonſtratio. Quia tàm AH eſt ſeſquialtera rectæ AF, quàm recta BK ipſius KI, per conſtructionem erit iuxta propoſ. 16. lib. 6. elem. rectãgulum ſub AH, KI, æquale rectangulo ſub AF, BK: ſed per prop. 41. lib. 1. elem. rectangulum ſub AF, BK, duplum eſt trianguli AFB, ergo etiam rectangulum ſub AH, KI, eiuſdem trianguli AFB duplum erit; ergo rectangulum ſub AH, IE, æquale erit triangulo AFB, quia per prop. 1. libr. 6. elem. rectangulum ſub AH, & IE, erit ſupra baſim IE, quæ eſt ſemiſſis baſeos KI, ſupra quam eſt rectangulum ſub AH, KI: ſi ergo aſſumamus quintuplum rectanguli ſub AH, IE, videlicet rectangulum ſub AH, BI, iuxta cit. 1. propoſ. libr. 6. & quintuplum trianguli AFB, videlicet totum pentagonum reſolutum in quinque triangula æqualia ipſi AFB, vti iam diximus; erit per prop. 15. lib. 5. elem. tàm æquale rectangulum ſub AH, BI, toti pentagonum, quàm æquale fuit oſtenſum rectangulum ſub BH, IE, triangulo AFB. quod erat concludendum.

## COROLLARIVM.

*Si pentagonum prædictum fuerit baſis dodecaedri in aliqua ſphæra inſcripti, & recta BE fuerit latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, iuxta coroll. 2. prop. 17. lib. 13. elem. & triangulum ALM in eodem circulo inſcriptum æquilaterum, in quo dictum pentagonum, angulum in A habens puncto anguli pentagoni prædicti, fuerit baſis Icoſaedri in eadem ſphæra dicta, quæ duæ figuræ planæ per 5. propoſ. libri huius, in eodem circulo inſcribuntur: quandoquidem per coroll. 2. prop. 12. lib. 13. elem. latus LM dicti trianguli æquilateri ſecat ſemidiametrum dictam FG, bifariam in H.* Fig. 322.

*Rectangulum ſub AH recta perpendiculari ducta ab angulo trianguli æquilateri, ad latus Icoſaedri, & quinque ſextis partibus lateris BE cubi eidem ſphæræ inſcripti quæ & Icoſaedrum & Dodecaedrum, erit æquale pentagono vni ſuperficiei Dodecaedri prædicti.*

PRO-

## PROPOSITIO IX.

Superficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadẽ ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri. Eſt Hypſiclis.

Fig.323. CONſtructio. In circulo ABCD qui circumſcribat iuxta prop.5.libr. huius, & pentagonum Dodecaedri, & Triangulum Icoſaedri, ſit latus AD trianguli prædicti, & latus DB pentagoni prædicti, inſcriptum per prop.1.lib.4.elem. tùm per prop.12.lib.1.ex centro E circuli demittantur rectæ EF, EG, perpendiculares ad dicta latera, recta quidem EF perpendicularis ipſi AD, & recta EG perpendicularis ipſi BC:illa ſecabit biſariàm in F rectam AD, hæc verò ſecabit BD in G, biſariàm in G. Denique ſit recta CH latus cubi in eadem ſphæra inſcripti qua Dodecaedrum & Icoſaedrum prædicta ſolida. Dico autem eſſe vt latus CH cubi ad AD latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri.

Demonſtratio. Quãdoquidem per coroll. 2.prop.17.lib.13.elem.maius ſegmentum lateris CH cubi ſecti extrema & media ratione,eſt latus Dodecaedri: Et per coroll.2.noſtrum ad prop.2.libri huius,Rectæ EG ſectæ media & extrema ratione, maius ſegmentum eſt EF recta; erit per 2.propoſ.libri huius,vt CH tota ad maius eius ſegmentum BD, ita EG tota ad maius eius ſegmentum EF; & per prop.16.lib.6.elem.erit rectangulum ſub CH, EF,æquale rectangulo ſub BD,EG. Et quia per 1.prop.lib.6.cit. eſt vt CH ad AD, ita rectangulum ſub CH, EF, ad rectangulum ſub AD, EF; quandoquidem ſunt baſes CH,AD,& altitudo eadem EF: erit per propoſ.11.lib.5.elem. etiam vt CH ad AD, ita rectangulum ſub BD, EG, (quia æquale rectangulo ſub CH, EF,) ad rectangulum ſub AD,EF. Proinde cùm per coroll. prop.7.libri huius, ſit vt rectangulum ſub BD, EG, ad rectangulum ſub AD, EF, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, erit etiam per prop.11.li.5.elem.vt CH latus Cubi ad AD latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO X.

Si recta linea ſecetur extrema ac media ratione: erit vt recta potens id quod à tota, & id quod à maiore ſegmento, ad rectam potentem id quod à tota, & id quod à minore ſegmento; ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti. Eſt Hypſiclis.

SVppoſitio & conſtructio. Secta ſit recta AB, in C,extrema & media ratione, ſitque AC maius eius ſegmentum; ſitque etiam D latus Cubi, & E latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum. Prætereà ſuper recta AB, æquali ipſi AB poſitæ initio, erecta ſit per prop.11.lib.1.elem. recta BC ad angulos rectos in puncto eius extremo B, æqualiſque ipſi BC minori ſegmento totius AB poſitæ initio; & recta AC traducatur: Reſultabit triangulum ABC rectangulum, & per prop. 47.libr.1.elem.quadratum rectæ AC æquale erit quadratis ſimul ſumptis rectarum AB, BC: quare recta AC,vel M æqualis illi, poterit id quod à tota AB & id quod à minore ſegmento BC. Inſuper ſi centro A,interuallo AB, circulus decircinctur, & in eo per prop. 11.lib.4.elem. inſcribatur pentagonum BFGHI æquilaterum & æquiangulum;& per propoſ.2.triangulum æquilaterum BKL. Poſita igitur recta BF, pro latere Dodecaedri in aliqua ſphæra inſcripti, erit recta ducenda BG, latus Cubi in eadem ſphæra, iuxta coroll.2. ad prop.17. libr.13.elem. Quia autem per 4. propoſ.libri huius,AC maius ſegmentum ſemidiametri AB ſectæ media & extrema ratione, eſt latus decagoni in circulo ſacto inſcripti, in quo recta AB eſt latus hexagoni iuxta coroll.prop.15.lib.4.elem. poterit per prop.10.libr.13.elem.BF latus pentagoni, & totam AB videlicet latus hexagoni, & maius ſegmentum AC, nimirum latus decagoni in eodem circulo inſcriptorum. Aſſero autem, ſic eſſe latus D aſſumptum cubi ad E latus ſumptum Icoſaedri, vt eſt recta BF potens totam AB & maius eius ſegmentum AC, ad rectam M potentem totam AB & minus eius ſegmentum BC. Fig.324.

Demonſtratio. Per prop.12. libr.13.elem. quadratum lateris BK trianguli æquilateri triplum eſt quadrati ſemidiametri AB; & per

4.prop.

4.prop. libri eiuſdē: quadrata rectarum AB, BC, ſimul ſumpta, tripla ſunt quadrati rectæ AC; erit vt quadratum rectæ BK ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, ſimul ſumpta, id eſt quadratum rectæ M, ad quadratum rectæ AC? Ergo permutando iuxta prop.16.libr.5.elem. erit vt quadratum rectæ BK ad quadrata rectarum AB, BC, ſimul ſumpta vel ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC.(Cùm autem rectæ BG ſectæ media & extrema ratione, maius ſegmentum ſit BF, per coroll.1.propoſ.17.lib.13.elem. quia recta BG eſt latus Cubi, & latus Dodecaedri ſit recta BF, inſcriptorum in eadem ſphæra;& recta AC ſit in C, ſecta media & extrema ratione, maiuſque eius ſegmentum ſit AC; erit per 2.prop.libri huius, Vt tota AB ad maius ſegmentum AC, ita tota BG ad maius ſegmentum BF: quare per prop.22.li.6.elem.erit vt quadratum rectæ AB ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG ad quadratum rectæ BF.) Ergo per prop.11.lib.5.elem. erit, vt quadratum rectæ BG ad quadratum rectæ BF, ita quadratum rectæ BK ad quadratum rectæ M;& per propoſ.16.lib.5.elem.vt quadratum rectæ BG ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ M: Quare per prop.22.lib.6.elem. erit, vt recta BG ad rectam BK, ita recta BF ad rectam M; ſed recta BF per conſtructionem poteſt totam AB & maius eius ſegmentum AC, & recta M, poteſt totam AB & minus eius ſegmentum BC; ergo per 7 prop.lib.5.elem.erit vt recta BG ad rectam BK, ita recta BF potens totam AB & maius eius ſegmētum AC, ad rectam M potentem totam AB & minus eius ſegmentum BC.

Fig.325. Quia verò quam proportionem habet latus Cubi, ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum, eandem habet latus Cubi ad latus Icoſaedri in quauis alia ſphæra inſcriptorum: Nam exiſtente recta A latere Cubi, & recta BC latere Icoſaedri in eadem ſphæra; tùm recta D, latere Cubi, & recta EF latere Icoſaedri in alia quauis ſphæra; Dico eſſe vt A ad BC, ita D ad EF: Abſolutis enim triangulis BGC, EHF, triangulis æquilateris Icoſaedrorum per prop.1.lib.1.elem. & circa ipſa deſcriptis circulis propriis per prop.5.lib.4.elem. inſcribantur in hiſce circulis propria pentagona BIKLM, ENOPQ, per propoſ.11. lib. cit. tranſmittantur rectæ BK, EO, CK, FO. Quia autem per 2.prop.libri huius, idem circulus continet & Dodecaedri pētagonum, & Icoſaedri triangulum eiuſdem ſphæræ, & aſſumitur BCG triangulum Icoſaedri in eadem ſphæra in qua cubus lateris A, erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra cum ipſis inſcripti; quare per coroll. 2.propoſ.17.lib.13.elem. recta BK erit latus Cubi eiuſdem ſphæræ, ideoque æqualis ipſi rectæ A aſſumptæ: Ex eiſdem principiis recta EO probabitur lateri D Cubi æqualis. Præterea cùm latera pentagoni ſint æqualia, duo eorum BI, IK, abſcindent æquales arcus BI, IK, de circulo eodem, per prop.28.lib.3. elem. coroll.noſtrum: Eodem modo duo latera EM, NO, pentagoni æquilateri, æqualia reſcindent de circulo alio, æquales arcus EN, NO. Cùm ergo tàm in primo circulo, arcus totalis BIK, quàm in ſecundo arcus ENO, ſit duæ quintæ totius circuli, ipſi erunt ſimiles; & eodem argumento concludentur duo arcus BGC, EHF, eſſe ſimiles; eò quòd ſint ſinguli duæ tertiæ ſuorum circulorum: quare per naturam ſegmentorum ſimilium anguli BKC, EOF, erunt æquales, tùm anguli BCK, EFO, æquales, & per 1.coroll.propoſ. 32.lib.1.elem. reliqui anguli CBK, FEO, in triangulis BCK, EFO, erunt æquales. Igitur iuxta prop.4. lib.6. elem. erit vt BK ſiue A, latus Cubi, ad BC latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum; ita EO vel recta D latus Cubi, ad EF latus Icoſaedri in alia quauis ſphæra deſcriptorum.

Cùm igitur ex nunc demonſtratis ſit vt latus D cubi, ad latus E Icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum, ita BG latus cubi ad latus BK Icoſaedri in alia quauis ſphæra deſcriptorum; erit per prop.11. lib.5.elem. vt recta BF potens totam AB & maius eius ſegmentum AC, ad rectam M potentem totam AB & minus ſegmentum eius BC; ita aſſumptum D latus Cubi, ad E latus aſſumptum Icoſaedri. Ergo ſi recta linea ſecetur extrema ac media ratione, &c. quod erat demonſtrandū.

## COROLLARIVM I.
## NOSTRVM.

*Vt ſe habet latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum; ita latus Cubi ad latus Icoſaedri in alia quauis ſphæra deſcriptorum.*

## COROLLARIVM II.
## NOSTRVM.

*Superficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum, ſe habet, vt latus Cubi ad latus Icoſaedri, etiam in alia quauis ſphæra deſcriptorum.*

PRimum hoc corollarium noſtrum oſtendimus in demonſtratione huius propoſitionis.

tionis. Secundum vero ab illo dependet, & propoſitione 9. præcedente. Nam iuxta 9. propoſ.ſuperficies dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, eandem rationem habet quam latus Cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum dicto Dodecaedro inſcriptorum: Et per præced. coroll. vt ſe habet latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum, ita latus cubi ad latus Icoſaedri in alia quauis ſphæra inſcriptorum; ergo per prop. 11.lib.5.elem.erit ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra,vt latus Cubi ad latus Icoſaedri in quauis alia ſphæra inſcriptorum.

## PROPOSITIO XI.

Dodecaedrum ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri in vna eademque ſphæra. Eſt Hypſiclis.

Antequam explicemus hanc propoſitionem vltimam Hypſiclis, demonſtranda à nobis ſunt hoc loco, duo theoremata quæ Theodoſius aſſumit ac demonſtrat libr.1.ſphæricorum.

Primum ſit. Si ſphæra plano quopiam ſecetur; communis ſectio erit circulus.

Alterum eſt. Circuli in ſphæra æquales, æqualiter diſtant à centro ſphæræ; & circuli æqualiter diſtantes à centro ſphæræ, æquales ſunt.

Fig.326. Suppoſitio primi. Sphæræ ABC,centrum ſit D, & hæc plano ſecetur per centrum D acto, manifeſtum ex noſtro coroll. ad prop. 17. libr. 12. elem. ſectionem communem eſſe circulum maximũ ſphæræ ipſi concentricum.

Suppoſitio ſecunda. Sphæram ABC,cuius centrum D, planum aliquod HK ſecet extra centrum, ita tamen vt huic plano inſiſtat ad angulos rectos, recta aliqua LI, maior quàm diameter AM ſphæræ ſectæ, tranſeatque per centrum D; tunc rectæ huius portio DI, erit intra ſphæram ipſam,quandoquidem eſt pars diametri eius AM. Dico autem ſectionem communem huius plani HK, & ſphæræ ſectæ, eſſe circulum, hoc eſt figuram planam ex cuius aliquo puncto eorum quæ intra illam ſunt, rectæ omnes lineæ ductæ ad extrema illius omnia, æquales erunt.

Conſtructio. Ex puncto I plani exiſtente intra ſphæram ſectam, rectæ tres lineæ emittantur IE,IG,IF, ad puncta tria E,G,F, ſectionis communis factæ prædictæ; tùm ex centro D,ſphæræ ad hæc tria puncta E,G,F, ſemidiametri DE,DG,DF, agantur.

Demonſtratio. Quia recta DI, eſt perpendicularis plano HK ſecante ſphæram, erunt per defin.3. libr. 11. elem. anguli recti DIE, DIG, DFG, ideoque triangula rectangula DIE,DIG,DFG;& per coroll.noſtrum 3.ad prop.46.libr. 1. elem. quadrata rectarum ſemidiametrorum DE, DG, DF, æqualium eiuſdem ſphæræ, æqualia: ergo cùm hæc ſingula quadrata ſint per propoſit.47.libr.cit.1. elem.ſuis propriis duobus quadratis laterum ſuorum circa rectum angulum; erunt per 1. axio.lib.cit.1.quadrata bina æqualia,DI,IE; DI,IG; DI,IF; ergo ſi ab illis binis,dematur commune quadratum lateris DI, relinquentur quadrata æqualia rectarum IE,IG,IF; ac proinde per coroll.4. noſtrum ad propoſ.46. cit.ipſæ rectæ IE,IG,IF, æquales inter ſe. Et ſic eodem artificio probabuntur omnes alias rectas ab I ductas ad ſectionem communem prædictam, æquales eſſe inter ſe,& prædictis tribus: quare ſectio communis plani HK ſecantis ſphæram extra eius centrum D, erit circulus. quod erat oſtendendum.

Suppoſitio ſecundi theorematis. In ſphæra ABC,circuli non concentrici ſphæræ,BE, CF, ſint æquales; Dico illos æqualiter diſtare ab centro D ſphæræ. Præterea circuli BE, CF, æqualiter diſtent ab centro D, ſphæræ ABC: Dico illos eſſe æquales inter ſe. Fig.327.

Conſtructio. Ab centro D, concipiantur rectæ DH, DG, demiſſæ perpendiculares ad plana circulorum, per prop.11.libr.11.elem. & rectæ HE, GF, in planis circulorum ex punctis H,G, illorum,in quibus perforantur ab prædictis perpendicularibus, ad circumferentias ipſorum circulorum, traiiciantur: tùm agantur ſemidiametri æquales DE,DF, ſphæræ. Reſultabunt triangula DHE,DGF, rectangula ob angulos rectos in H & G, per defin. 3. libr. 11. elem. Hæc eſt conſtructio primæ partis. Pro ſecunda; In circulo BE, ducantur duæ diametri BHE, IHK, per eius centrum H, quærendum per propoſ.1. lib.3. elem. & ex D centro ſphæræ ducatur recta DH, tùm rectæ DB,DE,DI,DK: Iam verò conſiderando triangula BDH, EDH, quia habent duo latera DH, HE, æqualia duobus lateribus DH,HB,& baſes DB,DE,æquales, ex naturis ſphæræ & circuli, vnumque & commune, nimirum DH, habebunt angulos ad H deinceps æquales, ideoque per def.10. libr. 1. ambo recti: Eodem modo anguli DHI, DHK probabuntur recti: quare recta DI, erit ad angulos rectos diametris BHE, IHK, in puncto H ſectionis communis illarum:

rum: quare per propoſ. 4. libr. 11. elem. erit perpendicularis plano circuli BE ſuſtentanti dictas diametros BHE, IHK. Simili modo demonſtrabitur recta DG eſſe perpendicularis plano circuli CF.

Demonſtratio. Rectarum æqualium DE, DF, æqualia erunt quadrata per corollar. noſtrum 3. ad propoſ. 46. lib. 1. elem. & ſingulis illorum, erunt per 47. prop. lib. eiuſdem, quadrata propriorũ laterum DH, HE; DG, GF, circa angulum rectum; quæ ideò bina erunt æqualia inter ſe per 1. ax. libr. 1. elem. ex quibus ſi detrahantur quadrata ęqualia rectarum ſemidiametrorum æqualium circulorum æqualium BE, CF, iuxta defin. 1. libr. 3. elem. relinquentur quadrata ęqualia rectarum DH, DG; quæ ideo per coroll. 4. noſtrum ad prop. citat. 46. æquales erunt rectæ DH, DG: quæ quia ſunt perpendiculares circulorum dictorum planis, per quas ſumuntur diſtantiæ planorum ab punctis datis, vtpotè à centro D ſphæræ; dicentur iſti circuli BE, CF, æquales, æqualiter diſtare ab centro D ſphæræ. Iam verò ponantur iſti circuli BE, CF, æqualiter diſtare ab centro D ſphæræ, hoc eſt perpendiculares DH, DG, eſſe ęquales: demonſtrare oportet illos circulos eſſe ęquales inter ſe: ab quadratis ęqualibus, ęqualium rectarum DE, DF, adimantur quadrata æqualia, rectarum æqualium DH, DG; remanebunt quadrata æqualia rectarum HE, GF, ideoque ipſæ æquales; quæ cùm ſint oſtenſæ ſemidiametri circulorum BE, CF, ipſi erunt per defin. 1. libr. 3. elem. æquales. his demonſtratis accedamus ad propoſitionis huius 11. ſuppoſitionem, & conſtructionem &

Fig. 328. Demonſtrationem. In ſphęra ABCD, centrum habente E, ſit inſcriptum Dodecaedrum, cuius vnum ſit pentagonum FGHIK; tùm Icoſaedrum cuius vnum ſit triangulum LMN. Dico eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus Cubi ad latus Icoſaedri in vna eademque ſphęra, ſiue hæc ſit eadem quæ ſphæra ABCD, vel alia diuerſa. Quoniam verò omnes anguli tam pentagoni quàm trianguli prædictorum ſuperficiem ſphæræ attingunt ex natura ſolidorum inſcriptorum in ſphæra; ſi concipiantur plana pentagoni & trianguli prædictorum producta vndequaque, ſphæram ipſam ſecabunt, & per primum theorema demõſtratum ante conſtructionem & ſuppoſitionem iſtam, reſultabunt ſectiones communes, circuli FGHIK, LMN, in ſuperficie ſphæræ, qui circumſcribent figuras dictas planas proprias, quorumque centra O, P, exiſtent intra aream dictarum figurarum planarum, vt oſtendimus in prop. 4. lib. 4. elem. & quia iſta plana ſunt diſſita ab centro ſphæræ, circulorum iſtorum plana, non tranſibunt per centrum ſphæræ; ergo ab centro E ſphæræ ad iſta centra O, P, rectæ lineæ ductæ EO, EP, erunt perpendiculares ad plana ipſorum circulorum propria, vti explicauimus in ſecunda parte theorematis ſecundi præmiſſi: Et quia per prop. 5. libri huius, idem circulus comprehendit & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icoſaedri in eadem ſphæra, prædicti duo circuli FGHIK, LMN, erunt æquales, ideoque per theorema ſecundum rectæ lineæ EO, EP, æquales erunt, ſeu æqualiter diſtabunt ab centro E ſphæræ, dicti circuli. Ex eiſdem principiis probabuntur omnes rectæ lineæ ex E emiſſæ ad centra circulorum circumſcribentia reliqua pentagona dodecaedri, & triangula Icoſaedri eiuſdem huius ſphæræ, æquales eſſe. Igitur ſi ex E centro ſphæræ, tranſmittantur ad omnes Icoſaedri & Dodecaedri angulos, reſoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum, & Icoſaedrum in viginti pyramides alias ęqualium altitudinum: Quare cùm baſes Dodecaedri omnes ſint æquales inter ſe, & baſes omnes Icoſaedri ſint æquales inter ſe; erunt per coroll. propoſ. 6. libr. 12. elem. pyramides omnes prædictæ Dodecaedri ęquales inter ſe, & pyramides omnes Icoſaedri etiam æquales inter ſe. Quia verò per 6. prop. cit. lib. 12. eſt vt baſis FGHIK ad baſim LMN, ita pyramis FGHIKE ad pyramidem LMNE, quia vtriuſque eſt eadem vel æqualis altitudo probata; erunt iuxta coroll. noſtrum ad prop. 22. lib. 5. elem. vt duodecim baſes Dodecaedri ad baſim LMN Icoſaedri, iſta duodecim pyramides dodecaedri ad pyramidem LMNE Icoſaedri, hoc eſt vt tota ſuperficies Dodecaedri ad vnam baſim Icoſaedri. ita tota ſoliditas dodecaedri ad vnam pyramidem Icoſaedri. Rurſusquia eſt vt tota ſuperficies Dodecaedri ad baſim LMN Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE, erit per idem coroll. noſtrum cit. prop. 22. libr. 5. elem. vt tota ſuperficies Dodecaedri 20 baſes Icoſaedri, hoc eſt ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20 pyramides Icoſaedri, nimirum ad totum Icoſaedrum. Sed per prop. 9. libr. huius, ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem Icoſaedri vt cubi latus ad latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ: tùm etiam ex coroll. noſtro 2. ad prop. præcedentem 10. libri huius, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcumque alterius ſphæræ. Ergo per prop. 11. libr. 5. elem. erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcumque ſphæræ, quod erat demonſtrandum.

Aduerte nos priora duo theoremata præmiſſa

in iſſa ante ſuppoſitionem & conſtructionem huius propoſitionis, nos referre hoc loco tanquam corollaria; & alia etiam inter demonſtrandum probata. Sit ergo

COROLLARIVM NOSTRVM

I.

*Si ſphæra plano ſecetur, communis ſectio erit circulus: concentricus quidem ſphæra ſi planum ſecans tranſierit per ſphæra ſecta ab eo centrum; non concentricus ſphæra, ſeu ab centra ſphæra ſeiunctus ac diſtans, ſi planum ſecans non inceſſerit per ſphæra ſecta centrum.*

COROLLARIVM NOSTRVM

I I.

*Circuli in ſphæra æquales, æqualiter diſtant à centro ſphæra: Et circuli æqualiter diſtantes à centro ſphæra, æquales ſunt.*

COROLLARIVM NOSTRVM

I I I.

*Recta linea ducta ab centro ſphæra ad centrum alicuius eius circuli non incedentis per centrum eius; eſt perpendicularis, vel ad angulos rectos ipſi plano circulari.*

COROLLARIVM NOSTRVM

I V.

*Latus Cubi ad latus Icoſaedri eiuſdem ſphæra: tùm ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæra: tùm recta linea potens totam quamcumque rectam ſectam extrema & media ratione, & eius ſegmentum maius, ad rectam potentem totam eandem rectam, & eius ſegmentum minus: tùm Dodecaedrum ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæra, eandem habent rationem.*

EXplicatur hoc corollarium. Quia prop. 9. libri huius probatum eſt ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra: & propoſ. 10. præcedente oſtendimus ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt eſt linea potens totam ſectam quamcumque lineam extrema & media ſectione, & maius ſegmentum eius, ad lineam potentem totam eandem diuiſam lineam extrema & media ratione, & minus ſegmentum illius: tùm iſta prop. 11. demonſtrauimus Dodecaedrum ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, vt eſt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra: manifeſtum eſt per propoſ. 11. libr. 5. elem. eandem habere rationem prædicta quatuor antecedentia ad prædicta quatuor enumerata conſequentia in hoc corollario.

COROLLARIVM NOSTRVM

V.

*Recta linea ducta ab centro ſphæra ad planum circulare eius non incedens per centrum ipſius ſphæra, perpendicularis; cadit in centrum circuli.*

NAm demonſtrauimus rectam EO exeuntem ab centro E ſphæræ ad centrum O circuli eius ſeiuncti ab centro dicto E, eſſe perpendicularem plano circuli prædicti. Quod recta alia EQ ex eodem centro E ſphæræ ad planum eiuſdem circuli perpendicularis non incideret in centrum eius O, ambæ EO, EQ rectæ eſſent ad angulos rectos rectæ QO ducendæ: & ſic reſultaret triangulum OEQ, habens duos angulos rectos, contra prop. 17. libr. 1. elem. abſurdum hoc indicat poſitionem negantem rectam perpendicularem demiſſam ad planum circuli ſphæræ ex centro ſphæræ, incidere in centrum huius ſui circuli non incedentis per centrum ipſius ſphæræ: igitur iuxta corollarium iſtud cadet in centrum circuli ſui. Fig. 328.

## PROPOSITIO XII.

### Latus trianguli æquilateri, potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppoſitum deductæ. Eſt Campani.

HAnc propoſitionem demonſtrauimus in corollario noſtro 2. ad prop. 12. libr. 13. elem. tùm hoc ſequens corollarium, in corollario noſtro 3. ad prop. 2. libr. 13. elem. quoad partem primam; & quoad partem 2. in corollario noſtro primo ad prop. 32. lib. 1. elementorum.

COROLLARIVM.

*Recta linea perpendicularis ex vno angulo trianguli æquilateri ad eius latus oppoſitum demiſſa; ſecat hoc latus biſariàm, & hunc angulum etiam biſariàm.*

Digitized by Google

## PROPOSITIO XIV.

Si Tetraedrum & Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur: Erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: ſuperficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri. Eſt Campani.

Fig.329. SVppoſitio. Sphæræ diameter ſit recta A; in qua ſphæra deſcripta ſint Tetraedrum & Octaedrum; & Tetraedri ſit vna baſis triangulum BCD, & Octaedri vna baſis triangulum EFG. Dico triangulum BCD eſſe ſeſquitertium trianguli EFG; & ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialteram ſuperficiei Tetraedri.

Demonſtratio. Per prop. 13. lib. 13. elem. quadratum diametri A, eſt ſeſquialterũ quadrati lateris CD, Tetraedri; & per prop. 14. lib. eiuſdem, idem quadratum diametri A, eſt duplum quadrati lateris FG, Octaedri: Ergo qualium partium 6, erit quadratum diametri A, talium erit quatuor, quadratum lateris CD, & talium trium quadratum lateris FG; ideoque quadratum lateris CD, erit ſeſquitertium quadrati lateris FG. Quia verò tàm quadrata iſta ſimilia ſunt, quàm triangula iſta ſimilia; & per propoſit. vel 19. vel 20. libr. 6. elem. tàm illa quàm iſta habent inter ſe rationem duplicatam laterum homologorum CD, FG; erit vt quadratum lateris CD ad quadratum lateris FG, ita triangulum BCD ſupra latus CD, ad triangulum EFG ſupra latus FG, hoc eſt ita triangulum BCD ad triangulum EFG: ergo ſicut quadratum lateris CD eſt ſeſquitertium quadrati lateris FG, vti oſtendimus; ita erit triangulum BCD ſeu baſis Tetraedri, ad trianguli EFG ſeu baſim Octaedri, hoc eſt illud ſeſquitertium huius; & ſic primam partem explicauerimus. Pro ſecunda parte demonſtranda, ſic diſcurremus. Quia ex oſtenſis triangulum BCD eſt ſeſquitertium trianguli EFG; qualium partiũ quatuor erit triangulum, talium erit trium triangulum EFG: ac proinde iſtud octies ſumptum, erit vigintiquatuor talium partium; pro ſuperficie Octaedri; & quater ſumptum triangulum BCD, erit ſexdecim talium partium pro ſuperficie Tetraedri: ſed numerus 24 ad numerum 16, ſeſquialter eſt; ergo tota ſuperficies Octaedri erit ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri. quod erat vltimo loco propoſitum.

## PROPOSITIO XV.

Recta linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrum ſphæræ ducta; cadit in centrum baſis oppoſitæ; eſt perpendicularis ad dictam baſim. Eſt Campani.

SVppoſitio. Tetraedrum detur ABCD comprehenſum quatuor triangulis ABC, DAB, DBC, DCA, in ſphæra inſcriptum habente punctum E pro centro; per quod ex puncto D ſeu angulo Tetraedri, recta DE tranſmiſſa incidat in punctum E baſeos oppoſitæ dicto angulo D, ſeu trianguli ABC: Dico quod hoc punctum E ſit centrum circuli ABC circumſcribentis triangulũ ABC; & quod dicta recta DEF, ſit perpendicularis ad dictam baſim ABC triangularem, vel circulum illam circumſcribentem. Fig.330.

Constructio. Ex pũcto E ſeu centro ſphæræ, traiiciantur rectæ EA, EC, EB; tùm ex puncto F, aliæ rectæ immittantur FA, FB, FC.

Demonſtratio. Quia tres rectæ lineæ EA, EC, EB, ſunt ex E centro ſphæræ ad eius ſuperficiem ductæ in qua recipitur circumferentia circuli circumſcribentis triangulum ABC Tetraedri, ſunt æquales inter ſe; In triangulis AED, CED, duo latera AE, ED, CE, ED, erunt æqualia, baſeſque AD, CD æquales, vtpotè latera æqualia triãguli æquilateri ADC; ergo per prop. 8. lib. 1. elem. anguli eorum AED, CED, æquales erunt: quos ſi detrahamus ex duobus angulis deinceps AED, AEF, tùm CED, CEF, qui ſunt per prop. 13. libri eiuſdem 1, æquales duobus rectis; relinquentur anguli AEF, CEF, æquales per 3. axio. lib. eiuſdem 1. Prætereà quia duo triangula AEF, CEF, duos iſtos angulos obtinent æquales, comprehenſos ab æqualibus lateribus AE, EF, CE, EF, habebunt per propoſit. 4. libr. eiuſdem, baſes AF, CF, æquales. Ex eiſdem principiis, ſi conſideremus triangula BEF, CEF, erunt æquales rectæ ſeu baſes BF, CF; quia probabuntur in triangulis BED, CED, anguli mediis characteribus deſignati æquales. Quia ergo in circulo ABC, habemus tres rectas lineas FA, FC, FB eſſe æquales, nam eas oſtendimus eſſe æquales duas FA, FB, tertiæ CF; punctum F, erit centrum ipſius circuli ABC, exiſtetque intra triangulum æquilaterum circumſcriptum ab il-

 lo,

lo, iuxta coroll. noſtrum 7. ad prop. 4. lib. 4. elem. ideoq́ue etiam centrum trianguli ABC circumſcripti, eò quòd eædem tres rectæ lineæ FA, FB, FC, ab eo ductæ ad angulos eius ſint æquales, per noſtrum coroll. 6. ad citat. eandem prop. Quodſi recta linea DEF, tranſiens per E centro ſphæræ, non ſit perpendicularis plano circuli vel trianguli ABC; alia recta ex centro eodem E demitti poterit per prop. 11. lib. 11. element. perpendicularis ad idem planum circuli ABC, quæ per corollar. noſtrum 5. ad prop. 11. libri huius cadere debet in centrum circuli prædicti, quod oſtendimus eſſe punctum F; ergo recta EF perpendicularis erit baſi prædictæ ABC; igitur producta recta FE, vltra E, vel conueniet cum recta ED, vel non; ſi conueniat, prædicta recta DEF, erit perpendicularis plano baſeos ABC; ſi non conueniat, duæ rectæ lineæ ſegmentum habebunt commune FE, contra ax. 10. lib. 1. elem. ergò duæ rectæ lineæ FE, ED, vnam efficient rectam DEF, perpendicularem baſi ABC triangulari Tetraedri deductam ab angulo D, incedentemq́; per centrum E ſphæræ, ad baſim ipſi angulo oppoſitam. quæ duo erant demonſtranda.

## PROPOSITIO XVI.

Octaedrum in ſphæra deſcriptum, diuiditur in duas pyramides, æquales, & ſimiles, æqualium altitudinum; baſis verò (Eſt Campani) vtriuſque eſt quadratū ſubduplum quadrati diametri ſphæræ.

HÆc propoſitio demonſtrata iam eſt in corollario ſecundo propoſ. 14. libri 13. elementorum.

## PROPOSITIO XVII.

Tetraedrum ſphæræ impoſitum, ad Octaedrum in eadem ſphæra deſcriptum: ſe habet vt rectangulum ſub linea quæ potētia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris Tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiēte vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris Tetraedri contentum; ad quadratum diametri ſphæræ. Eſt Cāpani.

Vel vt alij proponūt. Tetraedrum ſphæræ impoſitum, ad octaedrum in eadem ſphæra deſcriptum: ſe habet vt rectangulum ſub linea potente viginti ſeptē ſexageſimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum; ad quadratum diametri ſphæræ.

SVppoſitio, & conſtructio. Tetraedrum ſit ABCD, & Octaedrum EFGHIK, in eadem ſphæra inſcriptum, cuius centrum L. *Fig. 331.* Tranſmittatur diameter DLM, huius ſphæræ per centrum eius L, incidens in baſim ABC Tetraedri in punctum N, baſeos dictæ, quod erit per prop. 15. libri huius centrum baſeos ABC, & circuli eam circumſcribentis; eritq́ue recta DLN, perpendicularis ad dictam baſim, per cit. prop. 15. Quoniam autem iuxta corollarium 2. prop. 13. libr. 13. elem. pars LN, diametri DLNM, inter centrum L ſphęræ, & dictam baſim ABC, eſt ſexta pars diametri tertiave ſemidiametri; erit ſemidiameter DL talium partium 3, qualium 1, eſt LN; & proinde DN, talium 4. Præterea concipiatur per centrum L, planum OPQ parallelum plano baſeos ABC, erunt per prop. 16. lib. 11. elem. rectæ QO, OP, PQ, parallelæ rectis AB, BC, CA; & quia per prop. 10. libr. eiuſdem 11. anguli QOP, ABC, ſunt æquales, tùm anguli QPO, ACB, tùm anguli PQO, CAB; erunt duo triangula QOP, ABC, ęquiangula; ſed triangulum ABC æquilaterum eſt æquiangulum per coroll. prop. 5. libr. 1. elem. ergo etiam triangulum QOP erit æquiangulum, & æquiangulum, per coroll. prop. 6. libr. 1. elem. quare ſimilia erunt triangula ABC, QOP. Sed ſunt triāgula DQO, DOP, DQP, per coroll. prop. 4. libr. 6. elem. Similia triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris: ergo per defin. 9. libr. 11. element. duæ pyramides ABCD, QOPD, ſimiles erunt. Inſuper quia plana ABC, QOP, parallela, ſecant rectas DN, DC, proportionaliter per prop. 17. libr. 11. elem. erit vt DN ad DL, ita DC ad DP; oſten-

oſtendimus autem DN eſſe talium partium 4, qualium 3 eſt DL, ergo & DC ad DP, erit vt 4 ad 3. quare per prop. 8. lib. 12. elem. cùm ſimiles pyramides habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27, ( iſta enim proportio triplicata eſt proportionis 4 ad 3. vt videre eſt in his numeris 64. 48. 36. 27. hi enim numeri ſunt minimi in prop. 4. ad 3. per prop. 2. lib. 8. element. Inſuper cùm per prop. 20. lib. 6. elem. quadrata habeant proportionem duplicatam laterum; erit quadratum rectæ DC ad quadratum rectæ DP, vt 64 ad 36, prout videre eſt ex eiſdem numeris prolatis. Ad hæc ſit triangulum æquilaterum RST æquale triangulo DQP æquilatero, & per prop. 12. lib. 1. elem. demiſſa ſit recta RV perpendicularis ad ST; erit iuxta prop. 12. libri huius, latus RT, vel DP illi æquale, potentia ſeſquitertium perpendicularis RV: ac propterea qualium partium 36 ſuit quadratum rectæ DP, talium 27 erit quadratum rectæ RV: erat verò earundem partium 64, quadratum rectæ DC; igitur RV eſt potens viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri. Denique producta recta TS vltra S, fiat per corollar. prop. 6. lib. 10. element. recta TX ad TS, vt 64 ad 27. tùm per prop. 10. lib. 1. elem. ſecetur bifariàm in Y, recta TX; vt ſit TY talium partium 32, qualium 27 eſt TS, ſeu illi æqualis DP. Quia autem proportio DC ad DP, fuit oſtenſa vt 4 ad 3, nimirum ſeſquitertia, erit DC talium partium 36, qualium DP 27, videlicet ſeſquitertia; ideoq́ue qualium partiũ TY eſt 32. Quamobrem recta TY, continet octo nonas partes lateris Tetraedri DC. Dico ergo ita eſſe Tetraedrum ABCD ad Octaedrum EFGHIK, vt rectangulum contentum ſub recta RV, ( quæ potens eſt viginti ſeptem ſexageſimarum quartarum partium quadrati lateris DC, ) & ſub recta TY, ( quæ continet octo nonas partes eiuſdem lateris ) ad quadratum diametri ſphæræ. Sed ducantur rectæ RX, RY.

Demonſtratio. Quia trianguli TRX, baſim habet TX, duplam baſeos TY, trianguli TRY; erit per prop. 1. libr. 6. elem. triangulum TRX, duplum trianguli TRY: & per prop. 41. libr. 1. elem. quia rectangulum ſub RV, TY, duplum eſt eiuſdẽ trianguli RTY; erit per axioma 6. lib. 1. element. triangulum TRX æquale rectangulo ſub RV, TY: proindeq́ue per prop. 7. lib. 5. elem. erit vt triangulum RTX ad triangulum RST, ita rectangulum ſub RV, TY, ad idem triangulum RST: ſed etiam eſt per cit. propoſit. 1. lib. 6. elem. triangulum RTX ad triangulum RST, vt baſis TX ad baſim ST, vtpotè 64 ad 27; igitur & rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum RST, vel ad triangulum DQP, vel QOP, æqualia oſtenſa, erit vt 64 ad 27. Probata verò fuit pyramis ABCD ad pyramidem QOPD, vt 64 ad 27; ergo erit vt rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD. Cùm verò recta DN ſit perpendicularis plano ABC, erit per coroll. noſtrum 2. ad prop. 16. lib. 13. elem. etiam perpendicularis plano QOP parallelo ipſi ABC; erit recta DL altitudo pyramidis QOPD. Octaedrum autem EFGHIK diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarum baſis communis quadratum EFGH, dimidium eſt quadrati ſphæræ, per prop. 16. libri huius, & altitudines habent æquales, ſemidiametros ſphæræ LI, LK; igitur per propoſit. 6. libr. 12. elem. erit vt baſis QOP, ad baſim EFGH, ita pyramis QOPD ad pyramidem EFGHI, quare per coroll. noſtrum ad prop. 22. libr. 5. elem. vt baſis QOP ad duplum baſis EFGH, hoc eſt ad quadratum diametri DM ſphæræ, ita pyramis QOPD ad duplum pyramidis EFGHI, id eſt ad Octaedrum EFGHIK. Prætereà cùm ſit vt triangulum QOP ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis QOPD ad Octaedrum EFGHIK: ex æquo erit per cit. 22. prop. libr. 5. elem. vt rectangulum ſub RV potente viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris DC Tetraedri, & ſub TY octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum, ad quadratum diametri DM ſphæræ; ita pyramis ſeu Tetraedrum ABCD, ad Octaedrum EFGHIK. quod erat demonſtrandum.

Age verò propoſitionem demonſtremus iuxta verba Campani. Quoniam recta DC talium partium 4 ſuit, qualium trium recta DP; habebit recta DP ſeu illi æqualis RT, tres quartas partes lateris DC, Tetraedri: quare cùm per prop. 12. libri huius, recta RT ſit potentia ſeſquitertia rectæ RV, erit RV potentia ſubſeſquitertia ipſius RT, videlicet trium quartarum partium lateris Tetraedri. Inſuper quia recta TY, fuit talium partium 32, qualium 27 recta ST vel DP, (tres nimirum quartæ partes lateris Tetraedri) erit TY ſuperquintupartiens vigeſimas ſeptimas partes ipſius ST, (id eſt trium quartarũ partium lateris Tetraedri.) Quare manifeſtũ erit eſſe quoque Tetraedrum ABCD ad Octaedrum EFGHIK, vt rectangulũ ſub RV, quę potentia ſubſeſquitertia eſt triũ quartarum partiũ lateris Tetraedri, & ſub TY quę ſuperquintupartiẽs eſt vigeſimas ſeptimas partes earũdem trium quartarum partium lateris Tetraedri.

## PROPOSITIO XVIII.

Linea perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſim oppoſitam; tripla eſt eius perpendicularis quæ ex centro trianguli ad eãdem baſim deducitur. Eſt Campani.

HÆc propoſitio iam explicata in propoſitione 12.li.13.elem.& propoſita ſeorſim in corollario noſtro primo ad illam propoſitionem, tùm etiam corollaria duo huius propoſitionis, propoſita in eodem noſtro corollario citato primo. Quare ſi hanc propoſitionem 18. & eius corollaria citauerimus, eorum demonſtrationes petendæ erunt ab locis citatis.

## PROPOSITIO XIX.

Si Octaedrum ſphæræ inſcribatur; erit ſemidiameter ſphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſim quamcumque Octaedri ducitur. Eſt Campani.

Fig.332. SVppoſitio. In ſphæra ſit octaedri baſis aliqua triangulum ABC æquilaterum,& centrum ſphæræ comprehendentis octaedrum ſit pũctum D, ex quo ad baſim dictam demiſſa ſit recta linea DE perpendicularis ad planum triangulare ABC prædictum, per propoſ.11. libr.11.elem. & intelligatur recta DB ſemidiameter ſphæræ. Dico ſemidiametrum DB eſſe potentia triplam rectæ perpendicularis DE.

Conſtructio. Tranſmittatur recta EE.

Demonſtratio. Recta DE, incidet in centrum E circuli circumſcribentis triangulum ABC, per coroll. noſtrum 5.ad prop.11. libri huius, quia circulus iſte non incedit per D centrum ſphæræ,ſicuti neque planum dicti trianguli circumſcripti, & illud E punctum erit etiam centrum dicti trianguli. Et quia recta DE eſt perpendicularis plano trianguli ABC,erit etiam ad angulos rectos rectæ EB, per defin.3.libr.11.elem.Iam verò quia quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris octaedri, videlicet lateris AB, per propoſ.14. libri huius; & quadruplum quadrati ſemidiametri DB ſphæræ, per coroll. noſtrum ad prop.20. libr.6. elem. ſi ponatur quadratum diametri, partium 12, erit quadratum lateris AB ſex partium talium, & quadratum ſemidiametri ſphæræ,partium 3. Quia autem per propoſ.12.lib.13.elem. quadratum lateris AB triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ nimirum BE, iuxta coroll.noſtrum 6. ad propoſ.4. libr. 4. elem. erit quadratum rectæ BE, talium partium 2, qualium 6 fuit quadratum lateris AB: Igitur cùm per propoſ. 47.libr.1.elem. quadratum lateris BD ſit æquale quadratis ſimul ſumptis rectarum BE, DE, ſitque oſtenſum quadratum lateris BD partium 3,erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Quare quadratum rectæ BD,triplum eſt quadrati rectæ DE. Si ergo octaedrum ſphæræ inſcribatur &c.quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XX.

Duplum quadrati ex diametro cuiuſlibet ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati.

Perpendicularis autem à centro ſphæræ in aliquam baſim cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi. Eſt Campani.

SVppoſitio. Cubus ABCDEFGH ſit in ſphæra deſcriptus centrum I habente, ex quo recta IK demiſſa perpendicularis ad baſim ADEF, ipſius cubi. Dico duplum quadrati ex diametro ſphæræ eſſe æquale ſuperficiei cubi; & perpendicularem dictam IK eſſe æqualem dimidio lateris cubi. Fig.333.

Conſtructio. Producatur recta KI vltra I,ad baſim oppoſitam BCHG,vſque ad punctum L,& rectæ ducantur AK,BL,tùm diameter FIC.

Demonſtratio. Per prop.15.libr.13.elem. quadratum ſphæræ diametri triplum eſt quadrati lateris cubi, id eſt æquale tribus quadratis cubi; ergo duplum eiuſdem quadrati ex diametro ſphæræ æquale erit ſex quadratis cubi, hoc eſt toti ſuperficiei cubi, quod erat primò propoſitum & probandum.

Præterea quia recta KIL eſt ad angulos rectos plano AE, erit etiam ad angulos rectos plano BH parallelo ipſi AE, iuxta coroll.noſtrum

ſtrum 2. ad propoſ. 16. libr. 13. elem. Inſuper quoniam rectæ AB, KL, ſunt perpendiculares plano BH, erunt per 6. prop. lib. 11. elem. parallelæ inter ſe; ergo planum per illas applicatum, ſecabit plana oppoſita parallela AE, BH, ſectioneſque erunt rectæ AK, BL, parallelæ, per prop. 16. libr. 11. elem. ideoque erit parallelogrammum BK, vnde per prop. 34. libr. 1. elem. recta KL erit æqualis lateri AB, cubi. Quia autem recta KL perpendicularis ex centro I ſphæræ incidit in baſes AE, BH, in puncta K, L, erunt K, L, centra circulorum dictas baſes quadratas circumſcribentium, per coroll. noſtrum 5. ad prop. 11. libri huius: ideoque per coroll. 1. ad prop. 15. lib. 13. elem. recta ipſa KL bifariàm ſecabitur ab dicta diametro CF. Quare cùm recta KL ſit oſtenſa æqualis ipſi AB lateri Cubi, erit IK dimidium eiuſdem lateris cubi. Igitur duplum quadrati quadrati ex diametro, &c. quod erat manifeſtum faciendum.

## COROLLARIVM I.

*Solidum quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæra dictum cubum circumſcribentis, æquale eſt cubo.*

QVia enim per propoſit. 15. lib. 13. elem. quadratum diametri ſphæræ ſit triplum quadrati lateris cubi, erunt AE, BH, duo quadrata, duæ tertiæ partes quadrati diametri ſphæræ: ſed per propoſ. 11. lib. 13. elem. ſolidum quod fit ex IK dimidio lateris cubi in AE tertiam partem quadrati ex diametro ſphæræ, æquale eſt ſolido quod fit ex IL dimidio lateris Cubi in BH tertiam partem quadrati ex diametro ſphæræ; quia prædicta ſolida habent baſes & altitudines æquales. Quare cùm dicta duo ſolida adæquent totum cubum, fit vt quod procreatur ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati ex diametro ſphæræ, æquale ſit toti cubo. quod erat propoſitum.

## COROLLARIVM II.

*Solidum quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati ex diametro ſphæra, æquale eſt Cubo.*

CVbus enim BE generatur ex BA latere cubi in quadratum AE, quod eſt tertia pars quadrati ex diametro ſphæræ: igitur manifeſtum eſt propoſitum in hoc corollario.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Solidum quod fit ex perpendiculari è centro cuiuſcumque corporis regularis ad aliquam eius baſim ducta, in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis: æquale eſt dicto corpori Regulari.*

SVppoſitio. Sit enim corpus quodcumque Regulare ABCD, contentū planis ABC, ABD, ACD, BCD; ſolidum autem EFGH, contētum ſub EI tertia parte ſuperficiei corporis dicti ABCD, & ſub altitudine FG, quæ æqualis ſit perpendiculari KL demiſſæ ex centro K ad baſim ABC: Dico ſolidum EFGH æquale eſſe dato corpori Regulari. Fig. 334.

Conſtructio. Ducantur ex centro K ſphæræ complectentis ſeu circumſcribentis datum corporis Regulare, quod etiam eſt centrum corporis regularis, rectæ KA; KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis: reſoluetur regulare in pyramides æquales, quia obtinent æquales altitudines & æquales baſes: nam circuli dictas baſes æquales circumſcribentes æquales erunt, ideoque ipſi diſtabunt æqualiter ab centro per coroll. noſtrum 2. ad prop. 11. libri huius; & proinde perpendiculares rectæ ex K centro ad ipſorum plana ductæ, videlicet altitudines, erunt æquales per idem coroll. noſtrum cit. Et quia priſma contentum ſub baſi ABC, & altitudine KL triplum eſſe conſtat ex coroll. 1. prop. 7. libr. 12. elem. tùm priſmata cōtenta ſub reliquis baſibus & eadem altitudine KL, tripla ſunt ſuarum pyramidum: erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine KL, videlicet compoſitum ex omnibus illis priſmatibus, triplum corporis regularis ABCD. Igitur cùm idem priſma triplum ſit priſmatis EFGH, quia illius baſis tripla ſit baſis huius, vti oſtendimus in prop. 7. lib. cit. 12. elem. erunt ſolida EFGH, ABCD, æqualia. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XXI.

### Idem circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ. Eſt Campani.

SVppoſitio. Concipiatur Cubus cuius vnum quadratum ſit BCDE, in ſphæra diametri A; & octaedrum, cuius vnum ſit triangulum FGH. Dico eundem circulum circumſcribere & quadratum BCDE, & Fig. 335.

triangulum FGH; ſeu quod idem, circulos illas figuras plana circumſcribentes, eſſe æquales.

Conſtructio. Ex centro I circuli comprehendentis quadratum, emittatur rectæ lineæ IB, IC, efficientes cum latere eius BC, triangulum EIC; tùm ex centro K circuli circumſcribentis dictum triangulum, agatur recta KE.

Demonſtratio. Per prop. 15. lib. 13. elem. Quadratum diametri A, triplum eſt quadrati lateris Cubi BC; & quia angulus BIC in centro I circuli ſubtenditur quadranti BC circuli, erit per prop. 33. libr. 6. elem. rectus: & quia etiam rectæ IB, IC, ſunt æquales, erũt quadrata earum æqualia, per coroll. noſtrum 3. ad prop. 46. lib. 1. elem. quare per prop. 47. libr. eiuſdem, cùm quadratum lateris BC ſit æquale duobus ſimul quadratis rectarum IB, IC; erit quadratum lateris BC duplum quadrati rectæ IB. Qualium igitur partium 6, aſſumetur quadratum diametri A; talium erit 2, quadratum lateris BC; & talium 1, quadratum rectæ IB. Inſuper quia per prop. 14. libr. 13. elem. quadratum eiuſdem A diametri, duplum eſt quadrati lateris Octaedri FG, & per propoſ. 12. eiuſdem libri, quadratum lateris FG triplum eſt quadrati rectę KF; qualium partium 6, ponetur quadratum diametri A, talium 3 erit quadratum lateris FG, & talium 1 erit quadratum lateris KF. Erunt ergo quadrata rectarum KF, IB, æqualia, & per coroll. noſtrum 4. ad prop. 46. lib. 1. elem. rectæ KF, IB, ſemidiametri dictorum circulorum æquales; ideóque per defin. 1. libr. 3. elem. circuli prædicti æquales. quod erat concludendum.

## COROLLARIVM.

*Recta lineæ perpendiculares coniungentes centra circulorum qui baſes oppoſitas tàm Cubi, quàm Octaedri circumſcribunt; æquales ſunt.*

SI enim ex centro ſphæræ ad baſes cubi & octaedri perpendiculares demittantur, incident per corollar. noſtrum 3. ad prop. 11. libr. huius in centra circulorum ipſas baſes circumſcribentium; ſunt autem iſti circuli tàm in cubo quàm in octaedro, vti conſtat ex iſta propoſitione 21; ergo per coroll. noſtrum 2. ad prop. 11. libr. huius, æqualiter diſtabunt ab centro ſphæræ, per æquales rectas prædictas perpendiculares. Quæ rectæ ſi producantur vltra centrum ſphæræ, donec attingant baſes oppoſitas parallelas tàm in cubo, quàm in octaedro, erunt etiam ipſis perpendiculares per coroll. noſtrum 2. ad prop. 16. libr. 13. elem. Ergo cùm dictæ perpendiculares ex centro ſphæræ ad baſes cubi & octaedri, ſint ſemiſſes rectarum illarum nectentium contra circulorum prædictorum, totæ illæ rectæ coniungentes contra prædicta, erunt æquales inter ſe per 2. axio. lib. 1. elem. tàm in cubo, quàm in octaedro; ſicuti propoſitum fuit.

## PROPOSITIO XXII.

### Si Octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribãtur: Erit Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Eſt Candallæ.

SVppoſitio. Octaedrum ABCDEF, & Tetraedrum GHIK, in eadem ſphæra ſint inſcripta: Dico ita eſſe illud ad triplum huius, vt latus BF Octaedri ad latus HI Tetraedri. Fig. 336.

Cõſtructio. Ducta diametro AD in octaedro, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides; primam BCDA, cuius baſis BCD; alteram BDFA, cuius baſis BDF; tertiam CDEA, cuius baſis CDE; quartam DEFA, cuius baſis DEF; verticem communem A habentes; quæ quidem omnes baſes infra quadratum BCEF ſunt, continentes cum ipſo dimidiam partem totius Octaedri: Et quia quælibet illarum pyramidum conſtat duobus triangulis æquilateris Octaedri, & duobus aliis triangulis commune latus AD habentibus, & alia duo latera ſunt latera ipſius Octaedri æqualia, iſta duo triangula erunt æqualia per coroll. prop. 8. lib. 1. elem. & proptereà quatuor dictæ pyramides æquales erunt, iuxta defin. 10. lib. 11. elem. quia continentur planis æqualibus magnitudine & numero. Præterea conſtituatur ſupra baſim GHI Tetraedri, priſma GHIKLM, eiuſdem cum Tetraedro altitudinis, quod ipſius Tetraedri ſit triplum, iuxta coroll. 1. propoſ. 7. libr. 12. elem. Tùm ſupra NOP baſim octaedri, & ſupra TVX baſim baſi Tetraedri æqualem, fient per citat. coroll. priſmata NOP QRS, TVXYZA, eiuſdem cum Octaedro vel pyramide eius ACDE, altitudinis.

Demonſtratio. Quia per prop. 14. lib. huius, GHI, vel TVX, baſis Tetraedri eſt ſeſquitertia ipſius NOP baſeos Octaedri, erit etiam priſma TVXYZA, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, per prop. 7. lib. 12. elem. cùm priſmata illa ſint eiuſdem altitudinis. Eſt verò Octaedrum ABCDEF, illius NOP

QRS

QRS ſeſquitertium, nam priſma eſt æquale tribus pyramidibus, ex coroll. 1. prop. 7. lib. 12. citat. qualium quatuor continet Octaedrum ex dictis: igitur Octaedrum æquale eſt priſmati TVXYZA. Et quoniam priſma TVXYZA ad priſma GHIKLM, habet proportionem quam altitudo illius ad altitudinem huius, vti diximus in coroll. noſtro ad prop. 14. lib. 12. eſt autem altitudo priſmatis YVXYZA æqualis Octaedro, eadem quæ Octaedri per conſtructionem: erit etiam Octaedrum ad priſma GHIKLM, id eſt ad triplũ Tetraedri GHIK, vt altitudo Octaedri ad altitudinem Tetraedri: Eſt verò Octaedri altitudo, videlicet recta perpendicularis centra baſium oppoſitarum connectens, æqualis lateri cubi, vtpotè perpendiculari centra baſium oppoſitarum vincienti, iuxta coroll. propoſ. præced. 21. atque vt latus cubi ad altitudinẽ Tetraedri, ita eſt latus Octaedri ad latus Tetraedri, (tàm enim quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis Tetraedri, quàm quadratum lateris Octaedri, ad quadratum lateris Tetraedri, eſt vt 3 ad 4: poſito enim quadrato diametri ſphæræ 9, erit quadratum lateris cubi 3, per prop. 15. lib. 13. element. & quadratum altitudinis Tetraedri 4, per corollar. 2. propoſ. 13. lib. 13. elem. quare quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis Tetraedri, eſt vt 3 ad 4. ad hæc aſſumpto quadrato diametri ſphæræ, 6, erit per propoſ. 18. lib. 13. element. quadratum lateris Octaedri 3, & quadratum lateris Tetraedri 4. &c.) Ergo Octaedrum ad triplum Tetraedri eſt, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM I.

*Altitudo Octaedri ad altitudinem Tetraedri eſt, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, in eadem ſphæra.*

NAm oſtendimus ita eſſe latus cubi quod æquale eſt altitudini Octaedri ex dictis, ad altitudinem Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri: ergo manifeſtum erit corollarium hoc 1.

### COROLLARIVM II.

*Diameter ſphæræ eſt ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Cubi, in eadem ſphæra.*

NAm per propoſit. 18. libr. 13. element. quadratum diametri ſphæræ, ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram.

## PROPOSITIO XXIII.

Si recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema & media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.
Eſt Candallæ.

SVppoſitio. Recta AB poſſit rectam CD, & eius ſegmentum maius CE, tùm rectam FG, eiuſque ſegmentum minus HG: Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorum, cuius recta AB ſit diameter. Fig. 337.

Conſtructio. In ſphæra diametri AB deſcriptum ſit Icoſaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO, lateraque Icoſaedri oppoſita ſint AI, BK, recta linea IB coniungantur, quæ ſubtendet angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, per propoſ. 16. lib. 13. elem. (in ea enim figura citat. prop. ſi ducatur recta ZF, erit RSHZF pentagonum, propter quinque latera Icoſaedri æqualia GR, GS, GH, GZ, GF, prouenientia ex G in ſuperficiem ſphæræ, in quo recta RH latera oppoſita RX, HI, coniugans, angulum RSH ſubtendit.)

Demonſtratio. Quia vero AI, BK, latera oppoſita parallela ſunt, ex coroll. 3. propoſ. citat. 16. erunt per prop. 29. lib. 1. elem. anguli AIB, IBK, æquales duobus rectis: ducta verò diametro IK, cùm latera AI, IB, trianguli AIB, ſint æqualia lateribus KB, BI, baſeſque AB, IK, ſint æquales, erunt per 8. prop. lib. 1. elem. anguli AIB, IBK, æquales, ideoque ſinguli recti: quare per prop. 47. lib. 1. element. quadratum rectæ propoſitæ AB erit æquale quadratis ſimul duobus rectarum AI, IB; ſed erat ex ſuppoſitione rectæ AB quadratum æqualis quadratis ſimul duobus, CD, CE rectarum; ergo quadrata rectarum IB, IA, erunt per 1. ax. lib. 1. elem. æqualia quadratis ſimul duobus

Digitized by Google

drata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF; ( & per propoſ.16.lib.5.citat. permutando vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH ad quadratum rectæ EF. ) Ergo rectæ GH quadratum duplum erit etiam quadrati rectæ EF. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XXV.

Si recta linea diuiſa extrema & media ratione, cum minore ſegmento angulũ rectum conſtituat, cui recta ſubtendatur: Erit recta linea, quæ potentia ſit ſubdupla ipſius rectæ ſubtẽſæ, latus Octaedri eius ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus exiſtit Dodecaedri. Eſt Candallæ.

Fig.339. SVppoſitio. Recta linea AB ſit ſecta in C extrema & media ratione, & ad eius extremum A poſita ſit per propoſ.11.lib.1.elem. recta AD perpendicularis AB, & æqualis ipſi AC minori ſegmento totius AB, per 3. propoſ. lib. cit. tùm ducta DB ſubtendens angulum rectum A factum ab tota AB, & minore eius ſegmento AC, vel AD: tùm ſit recta E potentia ſub dupla ipſius BD. Dico quod E recta ſit latus Octaedri illius ſphæræ in qua AD vel AC, eſt latus Dodecaedri.

Demonſtratio. Per 2.coroll.propoſ.17.lib.13.elem. maius ſegmentum BC, latus eſt Cubi in ea ſphæra, cuius minus ſegmentum AC vel AD, eſt latus Dodecaedri, ergo diameter illius ſphæræ potentia tripla erit maioris ſegmenti BC, vtpotè lateri cubi. Sed ſunt per 4. propoſ.libr.13.elem. quadrata rectarum AB, AD, nimirum rectæ compoſitæ ex AB tota & minores eiuſſegmento AC, tripla eiuſdem quadrati maioris ſegmenti BC: ergo quadratum diametri ſphæræ, æquale erit quadratis rectarum AB, AD, nimirum quadrato BD, per 1.axio. lib.1.elem. Igitur cùm diameter ſphæræ potẽtia ſit dupla lateris octaedri per propoſ.14.libr.13.elem. & poſſit recta BD duplum rectæ E, eò quòd recta E aſſumatur potentia ſubdupla ipſius BD; erit E latus Octaedri eiuſdem ſphæræ, cuius AD latus Dodecaedri ponitur. Ergo ſi recta linea, &c. quod erat demonſtrandum.

### COROLLARIVM.

*Si recta linea ſecetur extrema & media ratione v g. BC, & alia E potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri; maius ſegmentum AD erit latus Dodecaedri in eadem ſphæra in qua Octaedrum prædictum.*

QVia enim per propoſ.18.lib.13.elem. latus E Octaedri eſt potentia ſeſquialterum lateris Cubi, cuius maius ſegmentum eſt AD latus Dodecaedri ſicuti probauimus in propoſ.4.libr.13. citat. & quia BC eſt maius ſegmentum & AD minus, rectæ AB extrema & media ratione ſectæ, manifeſtum eſt propoſitum corollarium huius propoſitionis. Fig.339.

## PROPOSITIO XXVI.

Si latus Tetraedri poſſit maius & minus ſegmentum lineę rectæ extrema ac media ratione ſectæ: Latus Icoſaedri eidem ſphæræ inſcripti potentia ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti. Eſt Candallæ.

SVppoſitio. Tetraedri ABCD, latus BC, poſſit maius ſegmentum EF, & minus FG, rectæ EG ſectæ extrema & media ratione in F: ſitque in eadem ſphæra in qua dictum Tetraedrum, recta HI, latus Icoſaedri HIK. Dico rectam HI eſſe potentia ſeſquialteram minoris ſegmenti prædicti FG. Fig.340.

Conſtructio. Supponatur recta HK angulo vni pentagoni ex Icoſaedri lateribus effecti, & recta IK tranſmittatur diameter.

Demonſtratio. Per propoſ.8.libr.13. elem. recta HI eſt maius ſegmentum rectæ HK ſectæ media & extrema ratione: ergo iuxta propoſ. 5. libr. eiuſdem 13. compoſita KHI erit etiam diuiſa in H extrema & media ratione, maiuſque ſegmentum HK, & minus HI. Iam verò ſi fiat per propoſ.22.lib.1.elem. ex tribus rectis BC, EF, FG, triangulum BCL, ita vt BL ipſi EF, & CL ipſi FG: ſit æqualis: erit per propoſ.48. libr.1. elem. angulus L rectus, quia recta BC ponitur poſſe rectas BL, CL, hoc eſt rectas EF, FG: eſt verò & angulus IHK rectus vti in propoſ.23. libri huius probauimus: eſtque etiam per 2. propoſ. libri huius vt BL ad LC, ita KH ad HI; ergo per propoſ.6.libr.6.elem. triangula BLC, KHI, æquiangula erunt: ideoque iuxta

prop.

propoſ. libr. 6. citat. vt KI ad IH, ita BC ad CL; & iuxta propoſ. 16. libr. 5. elem. permutando vt KI ad BC, ita IH ad CL: Verùm per propoſ. 13. libr. 13. elem. IK diameter eſt potētia ſeſquialtera lateris Tetraedri BC, ergo & HI latus Icoſaedri erit potentia ſeſquialterum ipſius CL, hoc eſt minoris ſegmenti FG. Ergo ſi latus Tetraedri poſſit, &c. quod erat oſtendendum.

## PROPOSITIO XXVII.

### Cubus ad Octaedrum in eadem ſphæra cum ipſo deſcriptum; eſt vt ſuperficies cubi ad octaedri ſuperficiem, Item vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ. Eſt Candallæ.

Fig. 341. SVppoſitio. In eadem ſphęra deſcripta ſint Cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, centrumq́ue cubi ſit P, & Octaedri Q. Dico ita eſſe Cubum illum ad Octaedrum iſtud, vt eſt ſuperficies ipſius Cubi ad ſuperficiem ipſius Octaedri, vel vt latus ipſius Cubi ad ſemidiametrum ſphæræ.

Conſtructio. Ducantur ex centris P, & Q ad omnes cubi angulos, & Octaedri rectæ lineæ propriæ. Reſoluetur cubus in ſex pyramides æquales, eò quòd habeant æquales baſes, videlicet ſex quadrata æqualia cubi, & altitudines æquales; (nam circuli circumſcribentes ſex quadrata æqualia cubi æquales ſunt per coroll. noſtrum vltimum ad prop. 4. libr. 4. elem. quare in ſphæra æqualiter diſtabunt à centro eius per coroll. noſtrum 2. ad propoſ. 11. libri huius, per rectas perpendiculares æquales demiſſas ab centro ſphæræ ſeu cubi quod eſt vertex communis dictarum pyramidum, quæ perpendiculares ſunt altitudines prædictæ.) Reſoluetur etiam Octaedrum in octo pyramides æquales, habentes baſes triangulares æquales ſub quibus continetur ipſum Octaedrum, tùm altitudines æquales, videlicet rectas perpendiculares æquales demonſtrandas eodem artificio allato quo aliæ in pyramidibus cubi; deductas ab centro Octaedri ad baſes prædictas, quod centrum vertex eſt communis dictarum pyramidum.

Demonſtratio. Per propoſ. 6. lib. 12. elem. erit vt vna pyramis Cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad baſim pyramidis Octaedri: Quare per coroll. noſtrum ad propoſ. 22. libr. 5. element. erit vt ſextuplum pyramidis cubi, nimirum ipſe cubus ad pyramidem Octaedri, ita ſextuplum baſis pyramidis cubi, hoc eſt tota ſuperficies cubi ad baſim pyramidis Octaedri: ideoq́ue per idem corollar. erit vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nempe ad totum Octaedrum, ita ſuperficies Cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri, id eſt ad ſuperficiem Octaedri; ſicuti fuit primo loco propoſitum.

Præterea ſit ſuppoſitio & conſtructio particularis pro ſecunda parte huius propoſitionis demonſtranda. In eadem ſphæra ſit cubus ABCD, & Octaedrum EFGHIK; ſitq́ue diameter ſphæræ & Octaedri EG, centrumq́ue L. Tùm per propoſ. 9. lib. 6. elem. ex AB latere cubi dematur tertia pars AM, item ex ſemidiametro EL, tertia pars EM. Fig. 342.

Demonſtratio. Quadratum IFKH lateris Octaedri baſis videlicet duarum pyramidum in quas Octaedrum diſpeſcitur iuxta propoſ. 16. libri huius, eſt ſeſquialterũ quadrati BD, lateris BC cubi per propoſ. 18. libr. 13. elem. & per conſtructionem recta AB eſt ſeſquialtera rectæ BM; ergo reciprocabuntur baſes IFKH, BD, & altitudines AB, BM, ideoq́ue parallelepipedum ſuper baſi IFKH, & ſub altitudine BM, erit æquale parallepipedo ſuper baſi BD, & ſub altitudine AB, vtpotè cubo ABCD, per propoſ. 34. lib. 11. element. Inſuper quia recta EL tripla eſt rectæ EM, erit parallelepipedum ſuper baſi IFKH & ſub altitudine EL, triplum parallelepipedi ſuper eadem baſi, & ſub altitudine EM, ex coroll. noſtro 2. ad propoſ. 14. libr. 12. elem. Verùm idem parallelepipedum ſuper baſi IFKH & ſub altitudine EL eſt triplum pyramidis IFHKE, iuxta coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. elem. Ergo pyramis IFKHE erit æqualis parallelepipedo ſuper baſi IFKH, & ſub altitudine EN, per 1. axio. libr. 1. elem. Sed huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper eadem baſi & ſub altitudine LM, iuxta coroll. noſtrum 2. ad propoſ. 14. lib. 12. elem. eò quòd altitudo LM dupla ſit altitudinis EM; tùm octaedrum EFGHIK duplum eſt pyramidis IFKHE per propoſ. 16. libri huius; ergo per prop. 9. libr. 5. elem. parallelepipedum ſuper baſi IFKH, & ſub altitudine LM, erit æquale octaedro EFGHIK. Denique quia parallelepipedum ſuper baſi IFKH & ſub altitudine BM, eſt ad parallelepipedum ſuper eadem baſi & ſub altitudine LM, vt altitudo BM ad altitudinem LM, per citat. coroll. 2. noſtrum ad propoſ. 14. lib. 12. elem. eſtq́ue vt BM ad LM, ita eſt AB ad EL, (nam eſt AM ad MB, vt EM ad ML, & componendo per propoſ. 18. lib. 5. element. vt AB ad BM, ita EL ad LM, erit etiam iuxta propoſ. 16. lib. 5. citat. permutando, vt AB ad EL,

Digitized by Google

EL, ita BM ad LM. ) Tùm parallepipedum ſuper baſi IFKH & ſub altitudine BM, æquale eſt probatum cubo ABCD; tùm etiam parallelepipedum ſuper eadem baſi & ſub altitudine LM æquale Octaedro EFGHIK eſt oſtenſum: erit ergo per prop.11.lib.5. elem. vt cubus ABCD ad octaedrum EFGHIK, ita AB latus cubi ad EL ſemidiametrum ſphæræ, ſicuti fuit ſecundo loco propoſitum; & erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XXVIII.

Si ſint quatuor lineæ rectæ proportionales continuè, nec non & aliæ quatuor, ita vt ſit eadem antecedens omnium: Erit proportio tertiæ ad tertiā proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata.

Eſt Cardani.

Fig.343. SVppoſitio. Quatuor rectæ lineæ A,B,C,D, datæ ſint cōtinuè proportionales; tùm aliæ quatuor A,E,F,G, continuè etiam proportionales, ita tamen vt A ſit antecedens illarum: Dico proportionem C ad F, tertiæ ad tertiam, eſſe duplicatam proportionis B ad E, ſecundæ ad ſecundam; tùm proportionem D ad G, quartæ ad quartam, eſſe triplicatam eiuſdem proportionis B ad E, ſecundæ ad ſecundam.

Demonſtratio. Recta C ad rectam A, proportionem obtinet duplicatam proportionis rectæ B ad rectam A, per defin.10.lib. 5. elem. Habet verò per propoſ. 20. libr. 6. elem. quadratum rectæ B ad quadratum rectæ A, duplicatam rationem eius rationis rectæ B ad rectam A: ergo erit vt recta C ad rectam A, ita quadratum rectæ B ad quadratum rectæ A. Simili ratione erit, vt recta F ad rectam A, ita quadratum rectæ E ad quadratum rectæ A; & iuxta corollar.prop.4.lib.5. elem. conuertendo erit, vt recta A ad rectam F, ita quadratum rectæ A ad quadratum rectæ E. Quia ergo eſt quadratum rectæ B ad quadratum rectæ A, vt recta C ad rectam A; & quadratum rectæ A ad quadratum rectæ E, vt recta A ad rectam F; erit per prop.22. libr. 5. elem. ex æqualitate quadratum rectæ B ad quadraum rectæ E, vt recta C ad rectam F: ſed eſt per propoſ.20.libr.6. citat. proportio quadrati rectæ B ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B ad rectam E; ergo proportio rectæ C ad rectam F duplicata eſt proportionis rectæ B ad rectam E. quod erat primò propoſitum.

Præterea. Recta D ad rectam A proportionem habet triplicatam proportionis rectæ B ad rectam A, per defin.10. libr. 5. elem. & Cubus rectæ B ad cubum rectæ A, triplicatam obtinet rationem eiuſdem rationis rectæ B ad rectam A iuxta 33.propoſ.lib.11.elem. Ergo erit vt recta D ad rectam A, ita cubus rectæ B ad cubum rectæ A. Similiter erit vt recta G ad rectam A, ita cubus rectæ E ad cubum rectæ A; & iuxta corollar.propoſ.4. lib.5.elem. vt recta A ad rectam G, ita cubus rectæ A ad cubum rectæ E. Ergo quoniam eſt Cubus rectæ B ad cubum rectæ A, vt recta D ad rectā A, & cubus rectæ A ad cubum E, vt recta A ad rectam G; erit per prop.22. libr.5. elem. Cubus rectæ B ad cubum rectæ E, vt recta D ad rectam G; ſed eſt per prop. 33.libr. 11. elem, proportio cubi rectæ B ad cubum rectæ E triplicata proportionis rectæ B ad rectam E, ergo & proportio rectæ D ad rectam G, erit triplicata proportionis rectæ B ad rectam E, ſicuti fuit ſecundo loco propoſitum.

## PROPOSITIO XXIX.

Quadratum lateris triāguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineā medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidiam ipſius lateris. Eſt Cardani.

SVppoſitio. Ex angulo A, trianguli ABC æquilateri, deducta ſit recta AD perpendicularis lateri BC oppoſito illi A angulo, certum eſt per corollar.propoſ.12. lib.huius, hoc latus BC in D bifariàm ſecari: Tùm per propoſ.13.lib.6. element. reperta ſit recta E media proportionalis inter duas rectas AD, BD. Dico quod quadratum AB lateris trianguli æquilateri ABC, habeat ad ipſum triangulum ABC, proportionem duplicatam lateris AB ad rectam E. Fig.344.

Tt Demon-

Demonſtratio. Rectãgulum ſub BC, AD, duplum eſt trianguli ABC, per propoſ. 41. lib. 1. elem. & rectangulum ſub BD, AD, ſubduplum eſt rectanguli ſub BC, AC, per 1. propoſ. lib. 6. element. eò quòd BD ſit ſubdupla BC; ergo per propoſ. 9. lib. 5. element. erunt æqualia, triangulum ABC & rectangulum ſub BD, AD: & per propoſ. 17. libr. 6. elem. quadratum rectæ E, eſt æquale rectangulo ſub AD, BD; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. erunt æqualia quadratum rectæ E, & triangulum ABC. Cùm autem quadratum lateris AD ad quadratum rectæ E, proportionem habeat duplicatam lateris AB ad rectam E, per propoſ. 20. lib. 6. elem. manifeſtum erit quadratum lateris AB ad triangulum ABC, proportionem habere duplicatam lateris AB ad rectam E, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

*Si in triangulo æquilatero recta perpendicularis emittatur ex vno eius angulo ad oppoſitum latus: Quadratum rectæ mediæ proportionalis inter hanc perpendicularem & ſemiſſem lateris ipſius trianguli, æquale eſt ipſi triangulo.*

## PROPOSITIO XXX.

Si cubus & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum deducitur. Eſt Cardani.

Fig. 345. SVppoſitio. Cubi cuiuſcumque ſit quadratum ABCD, & Tetraedri triangulum EFG, in eadem ſphæra inſcriptorum: Tùm recta EH perpendicularis deducta ex angulo E dicti trianguli ad latus FG oppoſitum illi angulo E. Dico ita eſſe quadratum AC, ad triangulum EFG, vt latus trianguli EF, ad perpendicularem prædictam EH.

Conſtructio. Per prop. 13. lib. 6. elem. Inueniatur inter rectas EH, FH, recta linea IK media proportionalis.

Demonſtratio. Per propoſ. 18. lib. 13. elem. Quadratum lateris EF tetraedri duplum eſt quadrati lateris AB, cubi; & per prop. 1. libr. 6. element. ipſum quadratum EF, duplum eſt rectanguli ſub EF & FH ſemiſſe FG æqualis ipſi EF, (vti oſtendimus in coroll. prop. 12. libri huius) nam quadratum illud EF, & rectangulum ſub EF, & FH, eandem habent altitudinem EF, & baſis FG, dupla eſt baſeos FH: erit ergo per prop. 9. li. 5. elem. rectangulum ſub EF, FH, æquale quadrato lateris AB. Quare iuxta prop. 17. libr. 6. elem. recta linea AB erit media proportionalis inter EF, FH, & tres iſtæ rectæ FH, AB, EF, erunt continuè proportionales: ſed & ſunt etiam per conſtructionem, tres iſtæ rectæ continuè proportionales FH, IK, EH. Cùm ergo tàm illarum quàm iſtarum ſit antecedens & prima FH, erit per propoſ. 28. libri huius, proportio rectæ EF ad rectam EH, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ AB ad rectam IK, ſecundæ ad ſecundam duplicata. Sed & quadratum AC, rectæ AB, ad quadratum rectæ IK, videlicet ad triangulum EFG, (nam per corollar. prop. 29. præced. quadratum ex IK æquale eſt triangulo EFG.) proportionem habet duplicatam proportionis rectæ AB ad rectam IK, per propoſ. 20. libr. 6. elem. erit ergo per propoſ. 11. libr. 5. elem. quadratum AC, cubi, ad triangulum EFG, Tetraedri, vt latus EF ad perpendicularem EH. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XXXI.

Latus Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt altitudinis ipſius. Axis verò ſiue altitudo Tetraedri, potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi, in eadem ſphæra deſcripti. Eſt Cardani.

SVppoſitio. Tetraedri in ſphæra inſcripti triangulum ſit ABC, latus verò AB; altitudo autem ſeu axis ipſius Tetraedri ſit DE; latuſque Cubi in eadem ſphæra cum dicto Tetraedro inſcripti ſit recta F. Dico latus AB Tetraedri eſſe potentia ſeſquialterum axeos vel altitudinis DE: Axem verò DE eſſe potentia ſeſquitertium lateris F Cubi. Fig. 346.

Conſtructio. Per prop. 5. lib. 4. elem. circa triangulum æquilaterum ABC deſcribatur circulus, cuius centrum erit intra ipſum triangulum ex coroll. noſtro 7. ad prop. 4. cit. & recta EA tranſmittatur quæ erit latus tetraedri vel trianguli ABC, tùm recta AD ducatur.

Demonſtratio. Quia per prop. 15. libri huius, recta ED ſeu axis tetraedri vel eius altitudo perpendicularis nimirum baſi ABC, incidit

cidit in centrum D tam circuli deſcripti quàm baſeos dictæ; eſtque perpendicularis ipſi rectæ AD per defin. 3. libr. 11. elem. erit per propoſit. 47. libr. 1. quadratum rectæ AE æquale duobus ſimul quadratis rectarum AD, DE, & per 12. prop. lib. 13. elem. triplum quadrati ſemidiametri AD. Ergo ſi ponatur quadratum lateris AB, vel AE, partium 6, erit earundem partium 2, quadratum rectæ AD; quare reliquum quadratum rectæ ED erit 4 partium: hoc eſt quadratum rectæ AB vel AE, 6 partium, erit ſeſquialterum quadrati 4 partium rectæ ED, quod erat primo loco propoſitum, ac demonſtrandum.

Et quia per propoſ. 18. libr. 13. elem. latus AB Tetraedri potentia duplum eſt lateris F cubi: erit quadratum rectæ F, talium partium 3, qualium eſt 6, poſitum quadratum lateris AB; oſtendimus autem earundem 4 partium eſſe quadratum axis DE; ergo quadratum axis DE quatuor partium, ſeſquitertium eſt quadrati lateris F trium partium, cubi. Sicuti fuit poſtremò propoſitum, ac demonſtrandum.

### COROLLARIVM I.

***Diameter ſphæra potentia eſt dupla ſeſquiquarta axis Tetraedri.***

Fig. 346. Nam poſito quadrato lateris AB partium 6, quadratum diametri ſphæræ erit talium partium 9, per propoſ. 13. libr. 13. elem. Earundem verò partium 4, oſtendimus eſſe quadratum axeos DE. Ergo per propoſ. 20. lib. 6. elem. quia quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, clarum eſt diametrum ſphæræ eſſe ſeſquialteram axis Tetraedri; nam ſeſquialteræ proportionis duplicata eſt proportio dupla ſeſquiquarta, vt patet in hiſce numeris 4. 6. 9.

### COROLLARIVM II.

***Ita eſt axis ſeu altitudo Tetraedri ad latus Cubi, eidem ſphæræ inſcripti; vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis eius ad latus oppoſitum ductam.***

Quia per prop. 12. libri huius, tàm latus trianguli æquilateri hoc eſt latus Tetraedri potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis ex vno angulo ad latus oppoſitum deductæ; quàm ex propoſitione iſta ipſe axis Tetraedri, lateris cubi.

## PROPOSITIO XXXII.

### Cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. Eſt Cardani.

Suppoſitio. In eadem ſphæra inſcripta ſint Cubus ABC, & Tetraedrum DEFG: Dico Cubum eſſe triplum ipſius Tetraedri. Fig. 347.

Conſtructio. Super baſi DEF, concipiatur priſma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro DEFG altitudinem.

Demonſtratio. Quia per propoſ. 30. libri huius, eſt baſis priſmatis ſeu cubi ABC, ad baſim priſmatis ſeu Tetraedri, DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quocumque baſis DEF ad latus illi oppoſitum; & eſt per coroll. 2. prop. præced. 31. vt latus Tetraedri ad dictam perpendicularem, ita eſt altitudo cubi, ideoque priſmatis DEFGHI, ad latus cubi, ac proinde ad altitudinem cubi ſeu priſmatis ABC: erit baſis priſmatis ABC, ad baſim priſmatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem, per propoſ. 11. lib. 5. elem. Igitur per coroll. noſtrum ſecundum propoſ. 9. lib. 12. elem. æqualia erunt priſmata ABC, DEFGHI, quia ipſorum baſes & altitudines reciprocantur. Sed priſma DEFGHI triplum eſt pyramidis DEFG, per coroll. 1. propoſ. 7. libr. 12. elem. Cubus ergo ABC triplus erit eiuſdem pyramidis ſeu Tetraedri DEFG, per prop. 7. lib. 5. elem. quod erat concludendum.

### COROLLARIVM.

***Priſma eandem habens & baſim & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo in eadem cum Tetraedro ſphæra inſcripto.***

# COMMENTARIVS IN LIBRVM SECVNDVM HYPSICLIS ALEXANDRINI ET RECENTIORVM DE INSCRIPTIONE QVINQVE CORPORVM REGVLARIVM IN QVOVIS EX ILLIS.

## PROPOSITIO I.

### In dato Cubo, Pyramidem ſeu Tetraedrum deſcribere. Eſt Hypſiclis.

Fig. 348. CONSTRVCTIO. Sit inſcribendũ Tetraedrum in cubo ABCDEFGH.

Conſtructio. Ab E angulo vno Cubi, ducãtur tres diametri in baſibus tribus hunc angulum E conſtituentibus, nimirum EA, EG, EC; ex quarum extremitatibus diametrorum, A, G, C, ducantur in reliquis tribus baſibus cubi, diametri AG, GC, CA, extrema trium antecedentium diametrorum connectentes. Dico conſtirutum eſſe in dato cubo Tetraedrum ACGE.

Demonſtratio. Diametri quadratorum æqualium cubi, ſunt æquales, eò quòd per propoſ. 47. lib. 1. elem. ſint potentia duplæ laterum æqualium quadratorum dictorum. Ergo quatuor triangula ex dictis diametris effecta erunt æquilatera, id eſt ACE, GAC, GAE, GCE; quæ etiam erunt æqualia inter ſe, per coroll. propoſ. 8. lib. 1. element. ſed iſta quatuor triangula comprehendunt ſpatium ſolidum, ergo erit per defin. 26. lib. 11. elem. hoc ſpatium ſolidum, Tetraedrum. Verùm & anguli huius Tetraedri in angulis cubi ſiti ſunt, igitur per defin. 31. libr. cit. 11. inſcriptum erit in cubo. Fecimus ergo imperatum.

## PROPOSITIO II.

### In data pyramide ſeu Tetraedro, Octaedrum inſcribere. Eſt Hypſiclis.

SVppoſitio. Sit in Tetraedro ABCD, inſcribendum Octaedrum. Fig 349.

Conſtructio. Per prop. 10. libr. 1. elem. diuidantur bifariàm omnia latera Tetraedri, in E, F, G, H, I, K; tùm ducantur duodecim rectæ lineæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE: reſultabunt octo triangula & inter illa, quatuor EHI, IHK, KHG, HGE, exiſtent ſupra planum EIKG; & alia quatuor, IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum exiſtent. Dico autem illa octo triangula enumerata conſtituere Octaedrum in dato Tetraedro inſcriptum.

Demonſtratio. In tria AEH, ſunt latera duo AE, AH, æqualia duobus lateribus AG, AH,

AH, trianguli AGH, quia ſunt æqualium laterum Tetraedri dimidia; dictaque latera comprehendunt angulos æquales, videlicet triangulorum æquilaterorum; ergo per propoſ.4.lib.1.elem.baſes eorum EH,GH,erunt æquales. Simili diſcurſu oſtendentur æquales rectæ EH, HI, & reliqua latera triangulorum octo enumeratorum. Vnde fit vt illa triangula octo æquilatera ſint, & æqualia per coroll. propoſ.8.lib.1.elem. Octaedrum igitur conſtituent per 27.defin.libr.11.elem. & quia omnes eius anguli attingunt latera Tetraedri per conſtructionem, erit inſcriptum in Tetraedro hoc Octaedrum iuxta defin. 31.lib.11. elem.

### COROLLARIVM.

*Si in Tetraedro Octaedrum inſcribatur, Tetraedrum bifariàm ſecabitur ab tribus quadratis æqualibus, quæ etiam Octaedrum bifariàm ſecabunt, & ſeſe ad angulos rectos ſecabunt.*

Fig.349. QVia tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata ſunt æqualia, eò quòd latera illorum ſint æqualia triangulorum æquilaterorum æqualium oſtenſorum; & ſe mutuò ad angulos rectos ſecant per coroll. 1. prop. 14.lib.13. elem. quorum quodlibet Tetraedrum ABCD bifariàm ſecat, (nam quadratum EIKG, ipſum diuidit in pyramidem HIKD, & priſma HIKGAE; tùm in pyramidem EBFI, & priſma EFCGKI; conſtat verò pyramidem eſſe pyramidi æqualem, & priſma priſmati, per coroll. propoſ.8.libr.12. Eademque methodo reliqua quadrata GHIF, FKHE, ſecant bifariàm dictum Tetraedrum ABCD.) quare probatum erit corollarium.

## PROPOSITIO III.

### In dato Cubo, Octaedrum inſcribere. Eſt Hypſiclis.

COnſtructio. Per propoſ. 1. libri huius in dato Cubo inſcribatur Tetraedrum; & in hoc Tetraedro inſcribatur Octaedrum per prop.2. præced. factum erit propoſitum.

Demonſtratio. Quia per demonſtrationem propoſ. 2. præced. conſtat angulos omnes Octaedri attingere latera Tetraedri; & per demonſtrationem propoſ. 1. libri huius, euidens eſt latera Tetraedri ſuſtentari in planis baſium cubi, quia ſunt earum diametri: neceſſariò ſequitur angulos Octaedri deſcripti attingere baſes cubi; ideoque per defin. 31. libr. 11. eſſe Octaedrum in cubo inſcriptum, ſicuti fuerat imperatum.

### COROLLARIVM.

*Rectæ lineæ centra baſium cubi oppoſitarum connectentes ſe mutuò ſecant & bifariam & ad angulos rectos.*

NAm per coroll.1. prop.14.lib.13.elem. Diametri Octaedri ſe mutuo ſecant ad angulos rectos; ſed iſtæ diametri coniungunt centra baſium oppoſitarum cubi, ex dictis in demonſtratione præced. propoſ.2. ergo rectæ iſtæ lineæ centra baſium cubi oppoſitarum vincientes, non ſolùm ſe mutuò ſecabunt bifariàm per coroll.1. propoſ.15. libr.13. ſed etiam ad angulos rectos.

## PROPOSITIO IV.

### In dato Octaedro Cubum inſcribere. Eſt Hypſiclis.

SVppoſitio. In dato Octaedro ABCDEF, inſcribendus ſit Cubus. Fig.350.

Conſtructio. Quadratæ baſeos ABCD, pyramis vna eligatur ABCDE, verticem habens E, è duabus octaedrum conſtituentibus; & centrum G, circuli circumſcribentis triangulum æquilaterum ABE, reperiatur per propoſ.1. lib.3. elem. quod centrum erit etiam centrum dicti trianguli; & per propoſ. 31.lib.1.elem. per iſtud centrum G, ponatur recta linea LGM parallela lateri AB dicti trianguli, ſecans latera AE in L, BE in M; tùm ex puncto M, tranſmittatur alia parallela MN lateri BC ſecans in N latus CE; tùm alia parallela NO, ex puncto N, parallela lateri CD; denique tranſmittatur recta OL, quæ etiam erit parallela lateri AD: nam per propoſ.2. libr.6. elem. recta NO ſecabit proportionaliter latera CE, DE, in N & O, vnde erit vt EN ad NC, ita EO ad OD; ſed per coroll. propoſ.4. lib. eiuſdem 6. eſt vt EN ad NC, ita EM ad MB, tùm etiam vt EM ad MB, ita EL ad LA; ergo etiam erit per propoſ.11.libr.5.elem. vt EO ad OD, ita etiam EL ad LA; quare per 2. partem propoſ.2.lib. 6. elem. recta LO erit parallela lateri AD. Quadrilaterum igitur reſultabit ex dictis parallelis rectis, LMNO: tùm etiam reſultabũt triãgula æquilatera & æqualia ELM, EMN, ENO, EOL, per coroll. propoſ.4. lib.cit.6. quia ſimilia quatuor triangulis æquilateris & æqualibus AEB, BEC, CED, DEA, conſtituentibus electam pyramidem baſeos qua-

Digitized by Google

F pyramidis ducantur rectæ lineæ per centra prædicta, FGM, FHN, FIO, FKP, FLQ, ipſæ latera pentagoni ABCDE, diuidant bifariàm in M, N, O, P, Q, & ad angulos rectos, tùm angulos ad verticem F communem diuident biſariàm. Inſuper rectis lineis MN, NO, OP, PQ, QA, iungantur puncta media prædicta M, N, O, P, Q, laterum pentagoni prædicti ABCDE; pentagonum etiam conſtituent in plano prædicti pentagoni. Et quia triangula quinque MAQ, QEP, POD, OCN, NBM, latera habent æqualia, vtpotè dimidia æqualium laterum pentagoni æquilateri & æquianguli ABDE, comprehendentia angulos æquales pentagoni æquianguli, habebunt per propoſ.4. libr.1. elem. baſes æquales MN, NO, OP, PQ, QA: Ad hæc quia dicta triangula quinque poſtremò enumerata ſunt iſoſcelia; obtinebunt per 5.propoſ.libr. eiuſdem citat. angulos æquales ad prædictas baſes, qui cùm etiam ſint in eiſdem triangulis quinque æquales relatiuè per citat. prop. 4.lib.1. erunt per 1.axio.lib.eiuſdem, omnes illi anguli ad baſes prædictas, inter ſe æquales: quibus ſublatis ab angulis rectis prædictis in M, N, O, P, Q, deinceps relinquentur anguli æquales, quorum duo ſimul ſumpti efficient angulos æquales pentagoni prædicti MQPON, quod paulò antè fuit probatum æquilaterum, & nunc æquiangulum. Denique contra prædicta G, H, I, K, L, rectis iungantur lineis GH, HI, IK, KL, conſtituent aliud pentagonum æquilaterum & æquiangulum, quod erit vnum è pentagonis Dodecaedri inſcribendi in Icoſaedro: Et ſi in aliis vndecim pyramidibus Icoſaedri, centra triangulorum rectis vniãtur lineis, reſultabunt alia vndecim pentagona æquilatera & æquiangula, quæ cum prædicto GHIKL, Dodecaedrum conſtituent propoſitum.

Demonſtratio, quod pẽtagonum GHIKL ſit æquilaterum & æquiangulum. Cùm triangula quinque pyramidis erectæ ſint æqualia æquilateraque, ideoque ſimilia, congruent per axioma 9.libr.1.elem.ergo circuli ea circumſcribentes tria puncta communia obtinebunt, videlicet tres angulos illorum triangulorum, congruent igitur iſti circuli, per corollar. noſtrum ad propoſ.24. libr.3.elem. ideoque æquales erunt per citat. axio.9.lib.1. & per defin.1.libr.3. elem. ſemidiametri eorum GF, HF, IF, KF, LF, æquales erunt: & quia iſtæ ſemidiametri ſunt duplæ ſuarum propriarum rectarum vſque ad latera primi pentagoni dati, quæ ſunt latera triangulorum Icoſaedri æqualia æquilaterorum, vtpotè GM, HN, IO, KP, LQ, per coroll. propoſ. 18.libr.1. Hypſiclis; latera totalia FM, FN, FO, FP, FQ, ſecta erunt proportionaliter in G, H, I, K, L; quare per 2.prop.lib.6.elem. recta GL erit parallela rectæ MQ; & recta LK, rectæ QP; & recta KI, rectæ PO; & recta IH, rectæ ON; & recta HG, rectæ NM; ergo per propoſ.29.lib.1.elem. anguli ad iſtas rectas & alias ex centro F ad angulos pentagoni ABCDE æquilateri & æquianguli, verſus centrum F, erunt æquales angulis ad eaſdem rectas ex centro in punctis M, N, O, P, Q; ergo duo ex illis ſimul ſumpti ad puncta G, H, I, K, L, erunt æquales angulis in M, N, O, P, Q, videlicet angulis pentagoni MNOPQ, æquilateri & æquianguli; igitur æquiangulum erit pentagonum GHIKL: Denique quia in pentagono MNOPQ, reſoluto in triangula quinque, baſes habentia latera ipſa dicti pentagoni æqualia, anguli in centro F ſunt æqualia ſubtenſi dictis æquis lateribus per 8.propoſ.lib.1.elem. etiam per 4.propoſ. libr. eiuſdem latera GL, LK, KI, IH, HG, pentagoni æquianguli GHIKL, erunt æqualia, ideoque erit etiam æquiangulum. quare primum propoſitum erit demonſtratum.

Demõſtratio, quod reliqua vndecim pentagona inſcribenda in reliquis vndecim pyramidibus Icoſaedri ſint æqualia prædicto pentagono æquilatero & æquiangulo. Quandoquidem ex prædicta conſtructione latera pentagonorum huiuſmodi ſint communia duo iſti pentagono GHIKL, vel æqualibus, ipſa erunt æquilatera pentagona; & æquiangula, applicando principia prædicta.

Demonſtratio, quod iſta 12 pentagona æqualia, conſtituat Dodecaedrum. Per conſtructionem illorum pentagonorum in Icoſaedro, latera cuiuſcumque pentagoni ex 12 prædictis ſunt communia alteri ex illis, ergo ſpatium concludent, quod per defin.28.libr. 11. elem. erit Dodecaedrum.

Demonſtratio, quod iſtud Dodecaedrum conſtructum inſcriptum ſit in Icoſaedro. Omnes anguli iſtorum pentagonorum deſcriptorum contingunt centra triangulorum Icoſaedri, nimirum tres anguli conſtituentes angulum ſolidum Dodecaedri, ex ipſa conſtructione; ergo per definitionem 31.lib. 11.elem. Dodecaedrum iſtud factum erit inſcriptum in dato Icoſaedro. Fecerimus ergo imperatum.

## PROPOSITIO VI.

### In dato Octaedro Tetraedrum inſcribere. Eſt Campani.

CONſtructio. Per propoſ. 4. huius libri, inſcribatur Cubus in dato Octaedro: & in hoc cubo inſcribatur Tetraedrum per 1. propoſ. libri huius. Dico factum eſſe imperatum.

Demonſtratio. Nam per propoſ. cit. 4. & eius conſtructionem, Cubi facti in octaedro dato, anguli contingunt baſes octaedri; & per citat. propoſ. 1. conſtructionem, anguli tetraedri poſiti ſunt in angulis huius cubi; ergo anguli tetraedri attingent baſes quatuor octaedri: igitur Tetraedrum erit inſcriptum in octaedro dato per def. 31. libr. 11. elem.

## PROPOSITIO VII.

### In dato Dodecaedro Icoſaedrum inſcribere. Eſt Campani.

Fig. 352. CONſtructio & demonſtratio. Aſſumatur Dodecaedri dati dimidium contentum ſex pentagonis æquilateris, & æquiangulis, & æqualibus, ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra ſint Q, R, S, T, V, eadem quæ circulorum illa circumſcribentium, iuxta corollar. noſtrum vltimum ad propoſ. 4. lib. 4. elem. quæque bina proximiora rectis vinciantur lineis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Tùm rectæ lineæ tranſmittantur AP, CM, ſuppoſitæ arcubus AKP, CDM, circulorum circumſcribentium dicta pentagona, diuiſis bifariàm in K & D, nam chordæ æquales AK, KP, CD, DM, abſcindunt arcus æquales in dictis circulis, per corollar. noſtrum ad propoſ. 28. lib. 3. elem. ergo ſi ex punctis K & D, tranſmittantur rectæ lineæ per centra propria Q, & R, videlicet rectæ KQY, DRY, ſingulæ latus oppoſitum commune BL diuident bifariàm in eodem puncto Y, & ad angulos rectos, per coroll. 2. propoſ. 10. libr. 13. elem. tùm etiam bifariàm & ad angulos rectos diuident in a, & b, rectas AP, CM, per coroll. 1. cit. propoſ. 10. quia diuidunt bifariàm arcus AKP, CDM, propriòs. Et quia recta KaY, probata incidere in rectas BL, AP, ad angulos rectos, erunt per propoſ. 28. libr. 1. elem. rectæ AP, BL, parallelæ; & ob eandem cauſam etiam erunt parallelæ rectæ CM, BL: ideoq́ue per 9. propoſ. libr. 11. elem. parallelæ erunt inter ſe rectæ AP, CM. Præterea quia in triangulis AKP, CDM, duo latera AK, KP, ſunt æqualia duobus lateribus CD, DM, quia ſunt latera æqualium pentagonorum; comprehenduntq́ue angulos æquales pentagonorum æquiangulorum, baſes obtinebunt æquales AP, CM, per 4. propoſ. libr. 1. elem. earumq́ue ſemiſſes Aa, Cb, erunt æquales per 7. axio. libr. 1. elem. igitur rectæ lineæ CA, ba, illas connectentes, erunt æquales & parallelæ per propoſ. 33. lib. 1. Simili artificio probabimus ſi ex angulis B & F, ſubtenſis ab rectis CL, EN, per centra R, S, rectæ lineæ agantur BZ, FZ, vnianturq́ue rectæ CE, go, demonſtrabuntur æquales rectæ CE, gd. Et quia in triangulis ABC, CDE, latera AB, BC, ſunt æqualia lateribus CD, DE, vtpotè pentagonorum æqualium latera, continentq́ue angulos æquales pentagonorum æquiangulorum, habebunt per 4. prop. libr. 1. elem. baſes æquales AC, CE: ergo cùm oſtenderimus rectas AC, ab, eſſe æquales inter ſe, & rectas CE, gd, æquales eſſe inter ſe; erunt per 1. axio. lib. 1. elem. rectæ gd, ab, æquales inter ſe. Cùm autem rectæ YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares ex centris circulorum æqualium circumſcribentium pentagona æqualia, ad latera BL, DM, ſint diſtantiæ iſtorum laterum æqualium, æquales erunt per propoſ. 14. lib. 3. elem. eodem modo æquales erunt rectæ Qa, Rb, Rg, Sd, perpendiculares ex eiſdem centris ad rectas AP, CM, CL, EN, æquales: quare totæ Ya, Yb, Zg, Zd, æquales erunt. Ergo cùm in triangulis aYb, gZd, latera angulos aYb, gZd. comprehendentia ſint æqualia oſtenſa, & baſes ba, gd, æquales, erunt dicti anguli per propoſ. 8. lib. 1. elem. æquales. Denique quia probatæ ſunt rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales, continentes dictos angulos aYb, gZd, erunt in triangulis RYQ, SZR, baſes RQ, RS, æquales per propoſ. 4. libr. 1. elem. Ex eiſdem principiis oſtendentur reliquæ omnes rectæ lineæ, centra prædicta pentagonorum prædictorum viciniora reuincientes, eſſe æquales inter ſe. Igitur triãgula quinque QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, ſub quinque angulis ſolidis Dodecaedri L, M, N, O, P, cõſtituta, erunt æquilatera & æqualia. Quod ſi eadem methodo ſub reliquis quindecim angulis ſolidis dodecaedri, fiant ſimilia triangula æquilatera & æqualia, latera habentia communia, deſcriptum erit in dato Dodecaedro Icoſaedrum, quia duodecim anguli ſolidi Icoſaedri conſiſtunt in centris duodecim baſium Dodecaedri, iuxta def. 29. & 31. lib. 11. elem.

PRO-

## PROPOSIVIO VIII.

### In dato Dodecaedro Cubum deſcribere. Eſt Campani.

Fig. 353. CONſtructio & demonſtratio. Aſſumantur quatuor pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLM, Dodecaedri in quo inſcribendus ſit cubus; & illorum pentagonorum duo habeant latus commune AB, & alia duo latus commune AH, & alia duo latus commune AE, & alia duo latus cõmune CB, & alia duo latus cõmune BK. Tùm angulis EAH, CBK, D, I, ſupponantur rectæ EH, CK, EC, HK, quadrilaterum conſtituentes EHKC; quod quia in triangulis EAH, HIK, KBC, CDE, duo latera angulos pentagonorum æquiangulorum æquales comprehendentia ſunt æqualia latera dictorum pentagonorum æquilaterorum, baſes prædictæ EH, CK, EC, HK, erunt per 4. propoſ. libr. 1. elem. æquales, ideoq́ue quadrilaterum illud erit æquilaterum. Quod ſi circa pentagonum ABCDE circulus concipiatur deſcriptus per propoſ. 14. libr. 4. elem. rectæ lineæ AE, BC, æquales, auferent ab illo æquales arcus per propoſ. 28. lib. 3. elem. corollar. noſtrum; quare ſi ducatur recta BE, erunt anguli ABE, CEB, alterni æquales per propoſ. 27. libr. citat. coroll. noſtrum. Vnde parallelæ erunt rectæ AB, CE, per prop. 27. lib. 1. elem. Simili modo probabuntur parallelæ rectæ AB, HK; quare per propoſ. 9. lib. 11. elem. rectæ CE, HK, erunt parallelæ; & per propoſ. 33. libr. 1. elem. rectæ lineæ EH, CK, coniungentes dictas parallelas CE, HK, & æquales oſtenſas, erunt etiam æquales & parallelæ; vnde reſultabit parallelogrammum EK in eodem plano vno exiſtens per propoſ. 7. libr. 11. elem. Prætereà recta AB diuidatur bifariàm per propoſ. 10. lib. 1. elem. in puncto N, ex quo ad puncta H, K, C, E, rectæ emittantur, reſultabunt triangula NAH, NAE, NBC, NBK, latera AH, AE, BC, BK, æqualia habentia, & latus commune NA, vel NB, æqualia etiam obtinentia, quæ cum prædictis æqualibus angulos continent æquales æquiangulorum pentagonorum dodecaedri dati; quare per propoſ. 4. lib. 1. elem. baſes eorum NE, NH, NC, NK, erunt æquales. Inſuper ſi ex puncto N, demittatur per propoſ. 11. libr. 11. elem. recta linea NO perpendicularis in puncto O, & rectæ ex O ad puncta C, E, H, K, emittantur, ad quas erunt perpendiculares per defin. 3. libr. 11. elem. reſultabunt triangula rectangula NOE, NOC, NOH, NOK, quorum latera ſubtendentia angulos rectos, oſtenſa ſunt æqualia NE, NC, NK, NH, vnde quadrata illorum erunt æqualia per propoſ. 46. libr. 1. coroll. noſtrum 3. tùm æqualia quadratis laterum circa rectos angulos per propoſ. 47. lib. eiuſdem, quæ bina ſumpta vt oportet, erunt inter ſe æqualia per 1. axio. lib. citat. ergo ſi ab illis auferatur commune quadratum rectæ NO, relinquentur quadrata rectarum OE, OC, OH, OK, æqualia per 3. axio. libr. cit. & ipſæ rectæ æquales per coroll. noſtrum 4. ad propoſ. 46. libr. 1. cit. circulus ergo deſcriptus centro O, interuallo cuiuſlibet ex dictis æqualibus rectis, putà OE, tranſibit per extrema C, H, K, aliarum rectarum, iuxta 25. axio. lib. 1. elem. quare quadrilaterum EK parallelogrammum erit in circulo inſcriptum, cuius anguli oppoſiti CEH, CKH, erunt æquales per propoſ. 34. libr. 1. elem. & per propoſ. 22. libr. 3. æquales duobus rectis iidem duo oppoſiti; vnde fit vt cùm ſint æquales oſtenſi, ſint ſinguli recti: Eodem modo alij duo anguli EHK, ECK, oppoſiti, ſinguli erunt recti. quare quadrilaterum EK oſtenſum æquilaterum & rectangulum erit quadratum, habens ſuos angulos in quatuor angulis ſolidis E, C, K, H, Dodecaedri dati, & latera in planis ſuorum pẽtagonorum quatuor. Quod ſi hoc artificio in reliquis octo pentagonis dodecaedri ſubtendantur octo eorum angulis ſolidis rectæ lineæ ſeruato ordine conueniente, reſultabunt alia quinque quadrata æqualia, & cubus in dodecaedro dato inſcriptus iuxta defin. 25. & 31. libr. 11. elem. nam illa quadrata communia habebunt latera propria, ſpatiumq́ue concludent ſolidum quod erit cubus obtinens angulos ſuos in octo ſolidis angulis dodecaedri. & ſic factum erit imperatum.

### COROLLARIVM.

*In pentagono recta ſubtendens angulum eius parallela eſt lateri oppoſito illi angulo: Exempli gratia in pentagono ABCDE, parallela erit recta CE, lateri AB.* Fig. 353.

### COROLLARIVM NOSTRVM.

*In circulo recta linea CE, AB, nectentes duas chordas æquales AE, BC, vel arcus AE, BC, æquales, nullum punctum commune habentes; ſunt parallelæ.* Fig. 353.

PRO-

## PROPOSITIO IX.

### In dato Dodecaedro Octaedrum inſcribere. Eſt Campani.

Fig. 354. CONſtructio ac demonſtratio. Eligantur in dato Dodecaedro ſex illa latera oppoſita AB, CD, EF, GH, IK, LM, iuxta coroll. 3. propoſ. 17. libr. 13. elem. bifariàm ſecanda per propoſ. 10. lib. 1. eorundem elem. in punctis propriis N, O, P, Q, R, S; & puncta iſta media oppoſitarum dictarum rectarum rectis reiungantur lineis NO, PQ, RS, quæ per citat. corollar. æquales erunt inter ſe, earumque partes dimidiæ, videlicet NT, OT, PT, QT, RT, ST, iuxta propoſ. 15. libr. 5. elem. nam illæ integræ ſe mutuò bifariàm ſecant in centro T ſphæræ circumſcribentis dodecaedrum, & ad angulos rectos per cit. corollar. quare per propoſ. 4. libr. 1. elem. rectæ lineæ duodecim NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt inter ſe, ſubtenſæ angulis rectis triangulorum reſultantium ab illis ſemiſſibus æqualibus continentibus angulos rectos, & dictis ſubtenſis. Quare triangula octo NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera erunt & æquiangula, efficientque Octaedrum illis terminatum octo triangulis æqualibus & æquilateris per def. 27. libr. 11. & inſcriptum in Dodecaedro per defin. 31. lib. eiuſdem 11. elem. quia per conſtructionem, ſex anguli Octaedri huius deſcripti attingunt ſex latera oppoſita Dodecaedri dati. Fecimus ergo imperatum.

## PROPOSITIO X.

### In dato Dodecaedro Tetraedrum deſcribere. Eſt Campani.

CONſtructio. Per prop. 8. libri huius, in dato Dodecaedro inſcribatur Cubus; & per propoſ. 1. libri huius, in hoc cubo Tetraedrum; factum erit propoſitum.

Demonſtratio per conſtructionem prop. 1. citat. libri huius, anguli Tetraedri attingunt angulos Cubi; & per conſtructionem prop. 8. cit. anguli Cubi attingunt angulos Dodecaedri: ergo cùm anguli Tetraedri attingant angulos Dodecaedri, Tetraedrum in dato Dodecaedro erit inſcriptum per defin. 31. libr. 11. element.

## PROPOSITIO XI.

### In dato Icoſaedro Cubum deſcribere. Eſt Campani.

CONſtructio. Per 5. propoſ. libri huius, inſcribatur Dodecaedrum in dato Icoſaedro; & per propoſ. 8. libri huius in hoc dodecaedro facto cubus deſcribatur. Dico factum eſſe imperatum.

Demonſtratio. Anguli cubi attingunt angulos dodecaedri per conſtructionem propoſ. 8. citat. & anguli huius dodecaedri attingunt baſes Icoſaedri; per conſtructionem prop. 5. cit. ergo anguli Cubi facti attingent baſes Icoſaedri: quare per defin. 31. libr. 11. elem. Cubus in Icoſaedro erit inſcriptus.

## PROPOSITIO XII.

### In dato Icoſaedro Tetraedrum inſcribere. Eſt Campani.

CONſtructio. Per propoſ. 11. libr. huius, inſcribatur Cubus in Icoſaedro; & per propoſ. 1. libri huius, deſcribatur Tetraedrum in hoc Cubo. Dico factum eſſe imperatum.

Demonſtratio. Per conſtructiones citatarum propoſitionum, Anguli Cubi attingunt baſes Icoſaedri, & anguli Tetraedri angulos Cubi; ergo anguli Tetraedri attingent baſes Icoſaedri. Quare per defin. 31. libr. 11. elem. Tetraedrum erit in dato Icoſaedro inſcriptum.

## PROPOSITIO XIII.

### In dato Cubo Dodecaedrum deſcribere. Eſt Candallæ.

CONſtructio ac demonſtratio. Cubi AF, latera omnia bifariàm ſecentur per propoſ. 10. libr. 1. elem. in punctis I, K, L, M, N, O, P, R, p, x, Z. Y; tùm rectæ agantur IL, YZ, xO, Mp, KP, NR, ita vt ex nullo puncto duæ rectæ lineæ ducantur, & ductæ in baſibus oppoſitis ſint parallelæ; rurſus verò hæ rectæ bifariàm diuidantur in punctis S, V, T, R, Q, X, quæ erunt centra baſium Cubi huius, æquales enim erunt rectæ concipiendæ ex his punctis ad angulos proprios baſium, per 4. propoſ. lib. 1. elem. ſi conſiderentur triangula rectan- Fig. 355.

rectangula facta ab ſemiſſibus laterum Cubi & rectarum ductarum ipſis æqualium, & hiſce rectis concipiendis; quare circulus factus ex hiſce punctis circumſcribet quadratas baſes proprias Cubi. Prætereà rectæ agantur ST, VX, RQ, quæ per corollar. propoſ. 3. libri huius ſe mutuò ſecabunt in A centro ſphæræ & Cubi, bifariàm & ad angulos rectos; erũtque lateribus Cubi æquales, vti aliæ ſex priores, per propoſ. 34. libr. 1. elem. ob parallelogramma reſultantia rectangula quorum vnum latus eſt latus Cubi. Ad hæc ſemiſſes YV, VZ, rectæ YZ; tùm ſemiſſes MR, RP, rectæ MP, ſecentur extrema & media ratione per propoſ. 30. libr. 6. elem. in punctis B, G, D, C, ita vt ſint maiora ſegmenta YB, ZG, MD, PC: tranſmittantur autem rectæ lineæ YR, YC, BD, BC.

Iam verò propter parallelogramma reſultantia ex his ductis rectis lineis & aliis prædictis, erunt per propoſ. 34. libr. 1. elem. rectæ YR, YV, dimidio laterum cubi æquales; & RC, BV, ſegmenta minora rectarum æqualium YV, RP, etiam æqualia, per 2. prop. lib. præced. ſuntque per propoſ. 4. libr. 13. elem. quadrata rectarum YV, BV, tripla quadrati rectæ YB; erunt & quadrata rectarum YR, RC, tripla eiuſdem quadrati YB: Verùm quadratis rectarum YR, RC, eſt æquale quadratum rectæ YC, per propoſ. 47. lib. 1. elem. eò quòd angulus YRC, ſit rectus per prop. 29. lib. 1. cit. elem. ergo & quadratum rectæ YC, triplum quadrati rectæ YB. Præterea, quoniam VY perpendicularis ad rectas AY, YR, eſt per 4. propoſ. libr. 11. elem. etiam perpendicularis ad planum AE ſuſtinens dictas rectas AY, YR, erit rectus angulus BYC, ex defin. 3. libr. 11. citat. Vnde quadratum rectæ BC, æquale quadratis rectarum YC, YB, per 47. propoſ. libr. 1. elem. erit quadruplum quadrati rectæ YB; (quia quadrata rectarum YC, YB, quadrupla ſunt quadrati YB, quandoquidem quadratum YC triplum eſt oſtenſum quadrati rectæ YB.) Quàre cùm per propoſ. 20. libr. 6. elem. quadrata habeant proportionem duplicatam laterum, dupla erit recta BC, rectæ YB; quadrupla enim proportio duplicata eſt duplæ proportionis, vt videre eſt in his numeris 1. 2. 4. eſt verò TC, dupla ipſius RC, eò quòd minora ſegmenta TR, CR, rectarum æqualium MR, PR, æqualia ſint: Ergo erit per propoſ. 15. lib. 5. elem. vt YB, ad RC, ita BC dupla YB, ad TC duplam ipſius RC; eſt autem YB maius ſegmentum ad RC rectam minori ſegmento BV æqualem, vt tota ad maius ſegmentum, ergo & BC, ad TC, erit vt tota ad maius ſegmentum; proindeque TC erit maius ſegmentum rectæ BC, ſectæ extrema ac media ratione. Simili methodo probabimus TC eſſe maius ſegmentum rectæ BT extrema & media ratione ſectæ, ducendo rectam YT. Igitur æquales erunt rectæ BT, BC, efficientes triangulum Iſoſceles BTC, illi triangulo Iſoſceli ſimile fabricato ab Euclide propoſ. 10. libr. 4. element.

Nam ſi deſcribatur circulus per propoſ. 5. *Fig. 356*
lib. 4. elem. circa triangulum Iſoſceles ABC propoſitionis 10. citat. libr. 4. & perficiatur pentagonum ADBCE æquilaterum & æquiangulum ex mente Euclidis propoſ. 11. libr. 4. ſui cit. ſeque mutuò ſecent rectæ AB, CD, in puncto F; tunc per propoſ. 8. lib. 13. elem. recta AB ſecta erit in F, extrema & media ratione, maiuſque eius ſegmentum erit AF æquale lateri BC: eritque per propoſ. 2. lib. 1. præcedentis, vt tota AB ad maius ſegmentum ſuum BC, ita BT tota ad maius ſuum ſegmentum TC; ſimilique ratione vt tota AC ad maius ſuum ſegmentum CB, ita BC tota ad maius ſuum ſegmentum CT; ſed etiam eſt vt AB ad AC, ita BT ad BC, nimirum ratio æqualitatis: Triangula igitur ABC, BTC, cùm proportionalia habeant latera, æquiangula erunt per 5. propoſ. libr. 6. elem. ergo cùm iuxta prop. 10. li. 4. elem. quilibet angulorum ad baſim BC, trianguli BAC Iſoſcelis ſit duplus reliqui anguli BAC, etiam quilibet angulorum ad baſim TC, trianguli Iſoſcelis, duplus erit anguli reliqui TBC, ad verticem. igitur dicta triangula Iſoſcelia erunt ſimilia, per def. 1. lib. 6. elem.

Ad hæc concipiatur planum trianguli Iſoſcelis BTC, extendi ſeu fluere, ſupra rectam MP, ſeruando eandem inclinationem ad rectam MP, donec occurrat in puncto H lateris AB, & in puncto 10, lateris HG, & in puncto 3 diametri AC quadrati ABCD; reſultabunt rectæ lineæ HM, 10 P, ſectiones communes huius plani fluentis ac ſecantis plana quadratorum ABCD, EFGH, iuxta prop. 3. libr. 11. elem. eruntque per propoſ. 16. libr. eiuſdem, parallelæ rectæ HM, 10 P. & parallelogrammum totum HP, eò quòd recta HB 10 per fluxum puncti B æqualiter diſtantis ab recta MP, efficiatur. Porrò hoc planum HP, perforabit in puncto 4. diameter AF Cubi dati. Ducatur autem per prop. 31. libr. 1. elem. recta 3 7 ex puncto 3, parallela ipſi AH, in plano trianguli AMH; & puncta MS, nectantur recta MS, quæ per propoſ. 33. lib. citat. erit parallela ipſi AH, vel AI, vel 7 3. Iam verò quia per corollar. propoſ. 4. libr. 6. elem. triangulum A 7 3 eſt ſimile triangulo AMS; eſtque proinde per defin. 1. libr. cit. vt AM ad MS, ita A 7 ad 7 3; ſunt verò AM, MS,

Digitized by Google

elem. cuius circumſerentia ſi tranſierit per puncta 4, & 9, dicti pentagoni ſeu angulos 4, & 9, ſicuti incedit per angulos eius B, T, C, manifeſtum eſt quod erit æquiangulum, inſiſterent enim anguli æquales, arcubus æqualibus quos auferunt in eodem circulo chordæ ſeu latera pentagoni æquilateri tria, iuxta propoſ. 27. 28. lib. 3. elem. corollaria noſtra: ſi verò illa circuli facti circumſerentia non inceſſerit per angulos prædictos 4, 9; fiat in circulo ſacto pentagonum æquilaterum & æquiangulum T A B B C, per propoſ. 11. lib. 4. elem. reſultabunt duæ rectæ T 4, B 4, æquales duabus rectis B A, T A, æquales, & ad eaſdem partes, ſupra eandem rectam T B, eoſdemque terminos habentes, contra prop. 7. libr. 1. elem. hoc abſurdum indicat circulum ſactum non poſſe incedere extra angulos 4, & 9, dicti pentagoni æquilateri: incedet ergo per illos; & vt paulò antè probauimus, erit etiam æquiangulum dictum pentagonum B 4 T C 9.

Si igitur hoc artificio figurentur duodecim triangula, videlicet ad ſingulas rectas MP, YZ, NR, IL, XO, KP, bina ipſi BTC, ſimilia & æqualia; (ita enim ad MP duo huiuſmodi triãgula ſpeculari licet BTC, DTC,) & ipſorum ope duodecim pentagona ipſi B 4 T C 9, ſimilia & æqualia: reſultabit Dodecaedrum, cuius duodecim anguli in ſex rectis lineis MP, YZ, NR, IL, XO, KP, bini nimirum in ſingulis; octo verò reliqui in octo ſemidiametris Cubi conſiſtunt, videlicet in punctis quæ ipſas ſecant extrema & media ratione, qualia ſunt puncta 4, 9, in ſemidiametris AA, & HA. Verùm fatendum eſt ſic deſcriptum in Cubo Dodecaedrum, impropriè dici debere deſcriptum in illo, quia iuxta defin. 31. libr. 11. elem. eius omnes anguli non attingunt vel angulos, vel latera, vel plana Cubi; ſed eius ſolùm duodecim in ſex planis Cubi, octo verò extra hæc plana, & angulos, & latera ipſius Cubi, attingentia ſolùm diametros Cubi, in ſemidiametris eius octo media & extrema ratione ſectis.

## COROLLARIVM I.

*Diameter Dodecaedri duo latera poteſt; ipſius ſcilicet Dodecaedri, & Cubi, in quo Dodecaedrum inſcriptum eſt modo prædicto in hac propoſitione.*

Fig. 355. DVcendo enim in prima figura diametrum Dodecaedri BE, & concipiendo rectam ductam GE, æqualis exiſtens & parallela lateri Cubi VX, per prop. 33. lib. 1. elem. eò quòd ad VG, XE, æquales ſint & parallelæ. Quia ergo angulus BVX rectus eſt, rectus etiam erit angulus BGE per propoſit. 29. lib. 1. elem. ad punctum G: quare per prop. 47. libr. 1. citat. quadratum diametri BE æquale erit quadratis laterum BG, GE, nimirum Dodecaedri & Cubi prædictorum.

## COROLLARIVM II.

*Si latus Cubi ſecetur media & extrema ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in Cubo inſcripti iuxta hanc propoſ. Maius verò ſegmentum eſt latus Cubi in hoc Dodecaedro deſcripti.*

CVm ſit in eadem prima figura, per propoſ. 15. libr. 5. elem. vt YX ad BV, ita YZ dupla ipſius YV ad BG duplam ipſius BV; ſit verò BV minus ſegmentum ipſius YV ſectæ extrema & media ratione; erit & BG minus ſegmentum lateris Cubi YZ ſecti extrema & media ratione; compoſita verò ex YB, GZ, id eſt recta BC, (quæ fuit probata dupla ipſius YB, ideoque compoſitæ ex YB, GZ, æqualis) maius ſegmentum. Iam verò cùm conſtet ex conſtructione rectam BG eſſe latus Dodecaedri, erit per 8. prop. lib. huius, recta BC, vel BT, latus Cubi in dicto Dodecaedro inſcripti, quia ſubtendit angulum BGC, vel B4T, pentagoni. Fig. 355.

## COROLLARIVM III.

*Latus Cubi æquale eſt duobus lateribus; Dodecaedri nimirum in ipſo deſcripti, & Dodecaedri circa eundem Cubum deſcripti.*

IN eadem prima figura, latus Cubi YZ, componitur ex latere BG Dodecaedri in ipſo deſcripti, & ex recta compoſita ex YB, GZ, quam conſtat eſſe latus Dodecaedri eidem Cubo circumſcripti. Nam quia YZ Cubi latus ſubtendit angulum pentagoni Dodecaedri circa Cubum deſcripti, per propoſ. 8. libr. huius; & latus illius pentagoni eſt maius ſegmentum lateris YZ ſecti extrema & media ratione: erit BT maius etiam ſegmentum eiuſdem lateris YZ, æquale duabus rectis YB, GZ, ſimul, vti iam probauimus, latus Dodecaedri Cubo lateris YZ circumſcripti. Fig. 355.

## COROLLARIVM IV.

*Recta duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens, eſt æqualis lateri Cubi cui Dodecaedrum inſcribitur.*

IN eadem prima figura, recta copulans puncta B, D, in quibus conſtituuntur duo Fig. 355.

 anguli

anguli pentagonorum communi lateri TC oppoſiti, æqualis eſt per prop. 33. libr. 1. elem. rectæ VX, ( eò quòd BV, DX, æquales ſint & parallelæ ) id eſt lateri Cubi in quo Dodecaedrum deſcribitur.

## PROPOSITIO XIV.

### In dato Cubo Icoſaedrum deſcribere. Eſt Candallæ.

Fig. 359. CONſtuctio & demonſtratio. Per centra C, D, E, F, G, H, baſium Cubi dati, ducantur rectæ lineæ parallelæ lateribus ipſius Cubi, per propoſ. 31. libr. 1. elem. quæ nunquam concurrant inter ſe, ſintque YCB, XDM, NEO, QFP, RGS, THV; & harum medietates ſecentur per prop. 30. lib. 6. elem. extrema & media ratione, ita vt maiora ſegmenta ſint verſus centra prædicta, in punctis I, K; L, M; N, O; P, Q; R, S; T, V; quæ erunt æqualia inter ſe, per 2. propoſ. libr. præced. quorum quodlibet connectatur cum quatuor vicinioribus, v. g. L cum I, K, T, R; & ſic de aliis. Sic enim reſultabunt viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN; TVR, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim ſubtendantur vndecim Cubi lateribus, poſteriora verò octo eiuſdẽ Cubi octo angulis ſubſternuntur. Tùm rectæ agantur XC, XI, XK. Iam quia latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia ſunt lateribus XC, CK, triãguli XCK, & anguli contenti æquis lateribus prædictis recti, per 34. propoſ. libr. 1. elem. ideoque æquales; erunt per 4. propoſ. libr. eiuſdem 1. elem. baſes XI, XK, æquales. Præterea quia linea recta LX, recta eſt ad planum AZ per defin. 4. libr. 11. elem. erit etiam perpendicularis ad rectas XI, XK; quare cùm latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia ſint lateribus LX, XK, trianguli LXK, & anguli ab eis comprehenſi recti æquales, per principia citata, erunt per 4. propoſ. libr. 1. citat. elem. baſes LI, LK, æquales. Ad hæc, quia quadratum rectæ LI, per propoſ. 47. libr. citat. elem. 1. æquale eſt quadratis rectarum LX, XI; & quadratum rectæ LX, quadrato rectæ IY, ob rectas LX, IY, æquales per citat. 2. propoſ. libr. præced. quadratum autem rectæ LX, quadratis rectarum XC, CI, eſt æquale; erit quadratum rectæ LI æquale tribus quadratis XC, CI, YI: ſunt verò quadrata rectarum XC, CY, æqualia, ob æquales rectas, vtpotè ſemiſſes æqualium laterum Cubi: ergo quadratum rectæ LI, æquale eſt tribus quadratis rectarum CY, CI, IY; ſed hæc tria quadrata ſunt quadrupla quadrati rectæ CI, ( nam quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris ſegmenti, tripla ſunt quadrati rectæ CI maioris ſegmenti, per 4. propoſ. libr. 13. elem. igitur addito quadrato rectæ CI, illis duobus prædictis, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiuſdem quadrati CI. ) Igitur rectæ LI quadratum, erit quadruplum recti rectæ CI, per propoſ. 7. libr. 5. elem. Quare cùm eiuſdem quadrati rectæ CI, quadruplum ſit quadratum rectæ KI, per corollar. noſtrum ad propoſ. 20. lib. 6. elem. æqualia erunt quadrata rectarum LI, IK, per 9. propoſ. libr. 5, elem. & proinde & rectæ ipſæ LI, IK, æquales, per coroll. noſtrum 4. ad propoſ. 46. libr. 1. elem. Æquilaterum ergo eſt triangulum IKL, lateri Cubi ſubſtratum. Eodem artificio probabuntur reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus Cubi ſubtenſa, eſſe ęquilatera; ideoque inter ſe æqualia, quia eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia ſunt. Quia verò latera reliquorum octo triangulorum, octo Cubi angulis ſubſtratorum, ſunt communia dictis duodecim triangulis, vt in triangulo KTL, latus KL, commune eſt etiam triangulo IKL; & ſic de reliquis; manifeſtum ea quoque eſſe æqualia inter ſe, & dictis duodecim, & æquilatera. Igitur cùm omnia viginti huiuſmodi triangula æqualia & æquilatera Icoſaedrum componant, & eius anguli omnes duodecim attingant baſes Cubi, bini nimirum in ſingulis baſibus; Icoſaedrum erit inſcriptum in Cubo dato iuxta defin. 31. lib. 11. elem. Fecerimus ergo imperatum.

#### COROLLARIVM I.

*Diameter Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri, & Cubi Icoſaedrum ambientis.*

SI enim tranſmittatur recta LQ, quæ per propoſ. 33. libr. 1. elem. parallela eſt & æqualis lateri DF Cubi, eò quòd rectæ DL, FQ, ſint æquales & parallelæ: notum eſt per propoſ. 47. libr. 1. elem. quadratum diametri QM eſſe æquale quadratis rectarum LM, lateris Icoſaedri, & LQ lateris Cubi, in quo Icoſaedrum deſcriptum eſt; quia angulus MLQ rectus eſt per propoſ. 29. libr. 1. element. quandoquidem rectus eſt angulus LDF. quare manifeſtum eſt hoc corollarium. Fig. 359.

COROL-

## COROLLARIVM II.

*Bifariæ ſectiones ſex oppoſitorum laterum Icoſaedri, coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariàm, & ad angulos rectos ſecantibus.*

Fig. 359. Tres enim huiuſmodi rectæ lineæ DF, CE, GH; quia nectunt centra baſium oppoſitarum Cubi, æquales ſunt lateribus Cubi, & ſe mutuò per corollar. 3. propoſ. libri huius bifariàm in centro A Cubi, & ad angulos rectos ſecant. Quòd A punctum etiam eſſe centrum Icoſaedri, probatur: Latera AF, FQ, trianguli AFQ, æqualia ſunt oſtenſa lateribus AF, FQ, trianguli AFP, anguloſque continent rectos æquales; ergo per propoſ. 4. libr. 1. elem. baſes habebunt AQ, AP, æquales: Simili modo probabuntur æquales rectæ ex A, ad reliquos omnes angulos Icoſaedri, ergo A erit centrum Icoſaedri.

## COROLLARIVM III.

*Si latus Cubi extrema ac media ratione ſecetur, maius ſegmentum eſt latus Icoſaedri in dicto Cubo inſcripti.*

Fig. 359. Est enim CI maius ſegmentum rectæ CY, per constructionem; eſtque per propoſ. 15. lib. 5. elem. vt CI ad CY; ita KI dupla ipſius CI ad BY duplam ipſius CY; ergo per 2. propoſ. libr. præced. erit KI latus Icoſaedri ſegmentum maius lateris Cubi BY: nam ſi alia recta quàm KI eſſet maius ſegmentum rectæ BY, eſſet BY ad aliam rectam, vt CY ad CI, hoc eſt BY ad KI diuerſam ab illa recta, quod abſonum eſt.

## COROLLARIVM IV.

*Icoſaedri tàm latera, quàm triangula oppoſita, inter ſe ſunt parallela.*

Si enim duabus diametris vniantur quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extrema, fient duo triangula æqualia, alternos angulos obtinentia æquales per 4. propoſ. libr. 1. elem. quæ in centro concurrunt, ergo per propoſ. 27. libr. 1. elem. quælibet latera oppoſita prædicta erunt parallela: & per propoſ. 15. libr. 11. elem. ipſa plana triangulorum per ipſa latera procedentia, parallela erunt inter ſe.

## PROPOSITIO XV.

### In dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere. Eſt Candallæ.

Conſtructio ac demonſtratio. Dati Icoſaedri aſſumantur ſex latera oppoſita AB, CD; EF, GH; IK, LM; quæ per propoſ. 10. libr. 1. elem. ſecentur bifariàm in punctis N, O, P, Q, R, S; & oppoſita rectis vniantur lineis NO, PQ, RS, quæ per corollar. 2. propoſ. præced. ſe mutuò ſecabunt in T centro Icoſaedri, bifariàm, & ad angulos rectos. Denique traiiciantur rectæ lineæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS, OQ; PR, PS; QR, QS; reſultabunt octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN; RNP, RPO, ROQ, RQN. Iam quia latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia ſunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cùm ſint dicta latera æqualium rectarum ſemiſſes) angulos cõprehendunt rectos prædictos æquales; obtinebunt per 4. propoſ. libr. 1. elem. baſes æquales NS, NP. Eodem artificio reliquæ omnes rectæ æquales oſtendentur, & dictis duabus NS, NP, & inter ſe: ergo octo triangula illa æquilatera erunt & æquiangula, Octaedrum conſtituentia; quòd cùm eius anguli adhæreant binis ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum; erit in dato Icoſaedro inſcriptum, per deſin. 31. libr. 11. elementorum. Fig. 354.

## COROLLARIVM.

*Idem centrum eſt Icoſaedri & Octaedri in eo deſcripti.*

Svnt enim rectæ NO, PQ, RS, per centrum T Icoſaedri incedentes, diametri Octaedri NPOQRS ſibi inſcripti; ergo commune centrum erit T, Icoſaedri & Octaedri. Fig. 354.

## PROPOSITIO XVI.

### In dato Octaedro Icoſaedrum deſcribere. Eſt Candallæ.

Conſtructio & demonſtratio. In dato Octaedro ABCDEF, aſſumantur quatuor latera quæ ab ſingulis eius angulis exeunt; & ab ſingulis bina non proxima ſed ſibi mutuò è regione reſpondentia, quæque ad angulos quadratorum Octaedri oppoſitos cadunt; qualia ſunt BA, BC; DA, DC; iuxta Fig. 360.

angulos oppoſitos B, D, quadrati ABCD; tùm AF, AE; CE, CF; iuxta angulos A, C, quadrati AECF: tùm EB, ED, FD, FB; iuxta oppoſitos angulos E, F, quadrati EBFD. quæ omnia dicta latera ſecentur per propoſ. 30. libr. 6. elem. extrema & media ratione, ita vt maiora eorum ſegmenta ſint prope angulos è quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S; & ab ſingulis ad quinque vicinas ſectiones, rectæ lineæ quinque emittantur, vt ex R puncto rectæ RQ, RI, RL, RO, RK: & ex puncto I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG; & ſic de cæteris, licet non omnes emiſſæ ſint in figura, ne confunderetur tot lineamentis. Porrò hæc quinque puncta vicina clarè indicabit Octaedrum aliquod materiarum ad iuuandam imaginationem: ſunt enim tria in lateribus reliquis tribus quæ cum eo in quo punctum electum eſt, pyramidem efficiunt; alia verò duo in duobus lateribus duorum triangulorum Octaedri, quæ habent commune illud latus, in quo punctum acceptum eſt. Verbi gratia cùm punctum R aſſumptum ſit in latere DF, quòd cum tribus DE, DA, DC, pyramidem efformat in vertice D, eſt commune triangulis Octaedri DFA, DFC, ideò ex R ad quinque puncta horum quinque laterum ductæ ſunt lineæ rectæ; & ſic de reliquis. Præterea agantur tres diametri AC, BD, EF, Octaedri dati, ſeſe in centro X ad angulos rectos & bifariàm ſecantes iuxta coroll. 2. prop. 14. libri huius. quarũ AC, BD, ſecant rectas GI, RQ, in punctis Y, V; & recta emittatur IV; & per propoſ. 31. libr. 1. elem. tranſmittatur recta IT, parallela rectæ YX. Iam verò quia latera DQ, DI, trianguli DQI, ſunt æqualia lateribus DR, DI, trianguli DRI, (nam DQ, DR, ſunt ſegmenta minora rectarum æqualium DE, DF,) continentque angulos æquales triangulorum æquiangulorum Octaedri ADE, ADF; erunt per propoſ. 4. lib. 1. elem. baſes IQ, IR, æquales. Ad hæc, quia per propoſ. 2. libr. præced. eſt vt BG ad GA, ita DI ad IA; erit per 2. propoſ. libr. 6. elem. recta GI parallela rectæ BD. Similiter erit recta QR parallela ipſi EF, ideoque per propoſ. 4. lib. 6. elem. erit vt DI, ad IA, ita XY ad YA: ergo recta XA etiam ſecta erit in Y extrema & media ratione. Inſuper quia eſt AX ad XD, ita AY ad YI, (eò quòd triangulum AYI ſimile eſt triangulo AXD, per corollar. propoſ. 4. libr. 6. citat.) eſtque AX ipſi XD æqualis; erit & AY, ipſi YI, æqualis, per 9. propoſ. lib. 5. elem. Igitur YI erit minus ſegmentum rectæ XA. Eadem arte probabimus rectam AY eſſe æqualem rectæ YG; & rectam GI bifariàm ſecari in Y; ſimiliterque rectam QR in V ſecari. Quoniam autem latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia ſunt lateribus DQ, DR, trianguli DQR, (vtpotè minora ſegmenta minoribus ſegmentis æqualium rectarum) angulos continent rectos æquales quadratorum ABCD, DEBF; baſes obtinebunt æquales GI, QR, per prop. 4. lib. 1. elem. Conſimili methodo æquales oſtendentur rectæ HK, PS, MN, LO, æquales inter ſe, & illis dictis, quia nimirum ſubtendunt angulos reliquos quadratorum æqualium ABCD, DEBF, AECF, in ſingulis nimirum quadratis binos oppoſitos, continentque duo ſegmenta laterum æqualium minora. Inſuper quia YI minus ſegmentum ipſius XA oſtenſum, maius eſt ſegmentum maioris ſegmenti XI, diuiſi extrema & media ratione per propoſ. 5. libr. 13. elem. Eſt verò XY, rectæ XV æqualis, (quia ambæ ſunt maiora ſegmenta rectarum æqualium XA, XD,) & per propoſ. 34. libr. 1. elem. recta YI, rectæ XT æqualis eſt; erit XT maius ſegmentum ipſius rectæ XV, & ideò TV ſegmentum minus eiuſdem XV. Vnde quadrata rectarum XV, totius, id eſt ipſius IT, (quia per prop. 34. libr. 1. elem. recta IT æqualis eſt ipſi XY) & TV minoris ſegmenti tripla ſunt per prop. 4. lib. 13. elem. quadrati rectæ XT maioris ſegmenti: vnde quadratum rectæ IV, cùm æquale ſit per propoſ. 47. libr. 1. elem. quadratis rectarum IT, VT, triplum erit eiuſdem quadrati rectæ XT, id eſt rectæ RV, quæ eſt æqualis ipſi XT vel ipſi YI, vti probatum eſt, quia RV, YI, ſemiſſes ſunt rectarum æqualium RQ, GI. ergo ſi addamus quadratum rectæ RV, ipſi quadrato rectæ IV, fient quadrata rectarum IV, RV, quadrupla quadrati rectæ RV: ſed per prop. 47. libr. 1. element. quadratis rectarum VI, RV, æquale eſt quadratum rectæ IR, (eò quòd anguli IVR, IVQ, contenti ab lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & ſubtenſi baſibus æqualibus IR, IQ, æquales ſint per 8. prop. libr. 1. element. ideoque recti;) ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum erit quadrati rectæ VR; ac proinde quia eiuſdem quadrati rectæ VR, quoque eſt, ex corollar. noſtro ad prop. 20. libr. 6. element. quadratum rectæ QR: erunt per 9. prop. lib. 5. element. æqualia quadrata rectarum IR, QR, & per corollar. noſtrum 4. ad prop. 46. libr. 1. elem. rectæ ipſæ æquales IR, QR. Sed oſtenſa eſt recta IQ ipſi RI æqualis; triangulum ergo IQR, erit æquilaterum. Ex eiſdem principiis probabuntur æquilatera eſſe triangula ſimilem ſitum cum triangulo prædicto IQR habentia, videlicet KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN; ac proinde triangulo IQL æqualia;

quia

Digitized by Google

quia latera omnium ſunt æqualia inter ſe. Atque hæc triangula duodecim ſupponuntur ſex angulis Octaedri bina videlicet ſingulis: reliqua verò triangula octo, baſibus octo Octaedri adhærentia, vtpotè GMP, adhærens baſi AEB; HNP ipſi BEC; KNQ, ipſi CED; IMQ, ipſi AED; GLS ipſi AFB; HOS, ipſi BFC; KOR, ipſi CFD; ILR ipſi AFD; æquilatera quoque erunt & prædictis æqualia, eò quòd horum & illorum latera quædam ſint communia. Viginti ergo hæc triangula quorum quina in ſingulis ſectionibus laterum Octaedri conueniunt ad conſtitutionem anguli ſolidi, vt videre eſt in quinque RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, ſolidum angulum R efficientibus, Icoſaedrum componunt in Octaedro dato deſcriptum; quandoquidem Icoſaedri huius duodecim anguli, duodecim ſectiones laterum Octaedri poſſident. Fecimus igitur imperatum.

### COROLLARIVM I.

*Si duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema & media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius verò minus, ſit propè angulum ab illis comprehenſum: Recta connectens dictas ſectiones duplum poterit minoris ſegmenti.*

Fig.360. Vm enim in triãgulo ęquilatero ADE, maius ſegmentum lateris AD, ſit DI, & lateris DE ſit minus ſegmentum DQ; ſit autem recta IQ oſtenſa æqualis rectæ GI quæ duplum poteſt minoris ſegmenti AI; quia per prop.47.lib.1.element. quadratum rectæ GI, æquale eſt duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: ſequitur euidenter rectam IQ duplum poſſe minoris ſegmenti AI, lateris AD.

### COROLLARIVM II.

*Cùm octo baſes Icoſaedri collocatæ ſint in octo baſibus Octaedri dati; idem erit centrum harum baſium Octaedri & Icoſaedri.*

Fig.360. Onſideretur triangulum AED, Octaedri figuræ ſuperioris, in quo ſedem habet triangulum IMQ, Icoſaedri deſcripti: ſitque C centrum trianguli AED, ex quo rectæ ducantur cA, cD, cE, cI, cM, cQ. Quia latera CA, AM, trianguli CAM, æqualia ſunt lateribus cE, EQ, trianguli cEQ, quòd hæc latera ſint ex centro c, & maiora ſegmenta æqualium rectarum, angulos continent æquales, videlicet ſemiſſes angulorum æqualium trianguli æquilateri; erunt per 4.prop. libr.1.elem. baſes cM, cQ, æquales. Simili modo probabimus rectam cI eſſe æqualem rectis cM, cQ, quare c erit centrum trianguli IMQ.

### COROLLARIVM III.

*Idem centrum eſt Octaedri atque Icoſaedri in illo Octaedro inſcripti.*

SI enim ducantur ex X centro Octaedri duæ rectæ ad duos quoſcumque angulos Icoſaedri, verbi gratia, XG, XO, ad angulos G, O; Quia latera XA, AG, trianguli XAG, ęqualia ſunt lateribus XF, FO, triãguli XFO, (nam XA, XF, ſemidiametri ſunt æquales Octaedri, & AG, FO, ſegmenta maiora æqualia laterum æqualium Octaedri ſectorum extrema & media ratione) anguloſque continent æquales, nimirum ſemirectos: (quandoquidem AC, EF, ſunt diametri quadratorum ABCD, EAFC æqualium, quorum angulos diuidunt diametri illorum in ſemirectos per prop.5.libr.1. element. exiſtentibus illis æqualibus vni recto, per propoſit.32.lib. eiuſdem corollar. 2.) ergo per prop.4.lib.1. citat. æquales erunt baſes XG, XO. Eadem methodo probabuntur æquales rectæ aliæ omnes ex centro X ad reliquos omnes angulos Icoſaedri: ergo X etiam erit centrum Icoſaedri inſcripti in Octaedro, vt eſt centrum Octaedri. Fig.360.

## PROPOSITIO XVII.

## In dato Octaedro, Dodecaedrum deſcribere. Eſt Candallæ.

COnſtructio. Per propoſ.16. libri huius, inſcribatur in dato Octaedro Icoſaedrum; & per prop.5. libr.huius, deſcribatur in hoc Icoſaedro Dodecaedrum; Dico factum eſſe imperatum licet minus propriè.

Demonſtratio. Dodecaedri anguli adhærent centris baſium Icoſaedri per conſtructionem citatæ prop.5. Verùm quia octo ſolùm baſes huius Icoſaedri ſunt concentricæ octo baſibus Octaedri, per corollar. 2. prop. præced. euidens Dodecaedri octo ſolùm angulos in eiſdem centris baſium Octaedri ineſſe; reliquos autem duodecim angulos Dodecaedri in centris baſium Icoſaedri quarum binæ ſingulis ſex angulis Octaedri ſubmittuntur, reſidere per prop. citat. 16. præced. conſtructionem. Quare cùm Dodecaedri omnes anguli non attingat vel latera vel plana, vel angulos Octaedri, in Octaedro impropriè inſcriptum erit hoc Dodecaedrum.

## PROPOSITIO XVIII.

### In data pyramide, vel dato Tetraedro, Cubum inſcribere. Eſt Candallæ.

CONſtructio. Per 2. propoſ. libri huius, In dato Tetraedro Octaedrum deſcribatur, & per 4. propoſ. in hoc facto Octaedro Cubus; factum erit imperatum licet impropriè.

Demonſtratio. Quia Cubi facti octo anguli per conſtructionem 4. propoſ. cit. adhærent centris octo baſium Octaedri, quarum quatuor ſunt in quatuor baſibus pyramidis per conſtructionem propoſ. 2. cit. habentque centra cum ipſis: (nam per propoſ. 2. conſtr. citat. baſeos Octaedri anguli diuident bifariàm latera baſis Tetraedri; & vti oſtendimus in corollar. 2. propoſ. præcedentis concludemus centrum baſis Octaedri & Tetraedri prædictorum eſſe idem) fit vt quatuor anguli Cubi adhæreant centris quatuor baſium pyramidis ſeu Tetraedri. Præterea cùm cæteræ quatuor baſes Octaedri ſint parallelæ baſibus, vt conſtat ex figura ſecundæ propoſ. libr. huius, fit vt perpendicularis ab angulis Tetraedri in baſes oppoſitas demiſſæ ſint quoque ad illas baſes quatuor reliquas Octaedri perpendiculares per corollar. noſtrum ad propoſ. 14. libr. 11. elem. Quare cùm prædictæ baſes abſcindant ex Tetraedro pyramides ſimiles toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum baſium, ſicuti cadunt in centra baſium totius pyramidis. Et quoniam per propoſ. 17. libr. 11. elem. dictæ quatuor baſes Octaedri diſpeſcunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, bifariàm intellige, fit vt reliqui quatuor anguli Cubi conſiſtant in mediis punctis quatuor perpendicularium. Euidens igitur eſt Cubum in Tetraedro deſcriptum eſſe impropriè, quia omnes eius anguli non attingunt ipſum Tetraedrum.

## PROPOSITIO XIX.

### In data pyramide ſeu Tetraedro Icoſaedrum deſcribere. Eſt Candallæ.

Fig. 361. CONſtructio. Per propoſ. 2. libr. huius. In dato Tetraedro ABCD deſcribatur Octaedrum EFGHIK, & huius latera omnia ſecentur extrema & media ratione per propoſ. 30. libr. 6. elem. ita vt bina ſumantur ex ſingulis angulis ſibi reſpondentia, id eſt in angulis oppoſitos quadratorum Octaedri cadentia, ſicuti monuimus in conſtructione propoſitionis 16. lib. huius; qualia ſunt EG, EK; HK, HG; KF, KI; GI, GF; IH, FE; IE, IH; in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y; & quodlibet ex his punctis nectatur lineis cum quinque vicinis punctis huiuſmodi; Dico deſcriptum eſſe Icoſaedrum in dicto Octaedro, per propoſ. 16. libri huius, duodecim angulos ſuos ſolidos obtinens in duodecim ſectionibus laterum duodecim Octaedri prædictis. Dico denique deſcriptum eſſe Icoſaedrum in dato Tetraedro.

Demonſtratio. Cùm latera Octaedri per conſtructionem propoſ. 2. cit. in planis quatuor Tetraedri ſita ſint; & anguli ſolidi omnes Icoſaedri in punctis laterum Octaedri conſtituta ſint; neceſſum eſt vt duodecim anguli Icoſaedri in planis baſium Tetraedri ineſſe, terni nimirum in ſingulis baſibus, quia terna latera Octaedri ipſis adhærent. Exempli gratia in baſi ABC, inſunt latera FH, HK, KF; & in baſi ABD, alia tria latera EF, FG, GE; & in baſi BDC, alia tria latera GH, HI, IG; Denique in baſi ADC, latera tria reliqua IK, KE, EI. Quare per def. 31. lib. 11. element. Icoſaedrum in dato Tetraedro erit inſcriptum; & eius quatuor baſes MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor baſibus Tetraedri ſuſtentabuntur.

## PROPOSITIO XX.

### In data pyramide ſeu Tetraedro Dodecaedrum deſcribere. Eſt Candallæ.

CONſtructio. Per propoſ. præced. 19. In dato Tetraedro deſcribatur Icoſaedrum; & in hoc Icoſaedro per propoſ. 5. libr. huius deſcribatur Dodecaedrum. Factum erit propoſitum, licet impropriè.

Demonſtratio. Cùm quatuor baſes Icoſaedri exiſtant in quatuor baſibus Tetraedri per prop. citat. 19. conſtructionem & demonſtrationem, exiſtent quatuor anguli Dodecaedri in iſto Icoſaedro deſcripti, in quatuor baſibus Tetraedri, videlicet in earum centris; nam per coroll. 2. ad propoſ. 16. libri huius, baſes quatuor Icoſaedri & Tetraedri concentricæ. Inſuper cùm per prop 8. libri huius, Cubus Dodecaedro inſcriptus octo ſuos

ſuos angulos in angulis octo Dodecaedri poſſideat; & per propoſ. 18. libri huius, iſte Cubus pyramidi ſeu Tetraedro inſcriptus, quatuor ſuos angulos in centris baſium Tetraedri habeat; quatuor autem reliquos in biſariis ſectionibus perpendicularium ex angulis Tetraedri in baſes demiſſarum obtinear: conſtituti erunt quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis Cubi conuenientes, in eiſdem biſariis ſectionibus prædictarum rectarum perpendicularium. Quare ſupererunt duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini ſingulis lateribus Tetraedri adhærebunt: ideoque impropriè Dodecaedrum in dato Tetraedro erit inſcriptum, propter illos quatuor angulos non adhærentes lateribus, vel planis, vel angulis Tetraedri, iuxta defin. 31. libr. 11. elem.

## PROPOSITIO XXI.

### In dato ſolido Regulari ſphæram inſcribere. Eſt Campani & Candallæ.

Conſtructio. Ex centro ſphæræ datum ſolidum Regulare circumſcribentis, demittantur rectæ lineæ perpendiculares per propoſ. 11. libr. 11. element. ad ſingulas baſes dati ſolidi Regularis; quæ per corollar. noſtrum primum ad propoſ. 11. lib. præced. incident in centra circulorum baſes illas circumſcribentium, quæque æquales erunt inter ſe, per coroll. noſtrum ſecundum ad prop. citat. 11. libr. præced. Quare ſi concipiatur ſemicirculus ſemidiametri vnius ex dictis perpendicularibus, concentricus ſphæræ circumſcribentis ſolidum datum, reuolutus circa diametrum immobilem perfecta reuolutione, deſcribet ſphæram iuxta def. 14. lib. 11. elem. cuius ſuperficies tranſibit per omnia extrema dicta perpendicularium ſita in centris circulorum ambientium baſes ſeu plana ſolidi dati; & conſequenti neceſſitate ſita etiam in planis baſium ſolidi dati; alioqui contra naturam circuli, rectæ lineæ ab eius centro ad eius circumferentiam eſſent inæquales; tangetque iſta ſphæra baſes omnes ſolidi dati regularis; in punctis illarum propriis quæ ſunt extrema dictarum rectarum perpendicularium: ſi enim illas baſes ſecaret, ſequeretur etiam rectas lineas è centro circuli ductas prædicti ad eius circumferentiam eſſe inæquales. Quare ex dictis in definitione poſtrema libri 11. element. ſphæra iſta in ſolido dato inſcripta erit, prout iubebatur.

His propoſitionibus huius libri addemus ſequentia corollaria noſtra, quæ Clauius noſter in ſcholio ad hanc propoſitionem adnotauerat.

### COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Quandoquidem quodlibet quinque corporum Regularium in quatuor reliquis inſcribatur ſiue propriè ſiue impropriè: fit vt in vniuerſum viginti deſcriptiones ſint horum corporum in ſeipſis mutua, ſiue propriè ſiue impropriè.*

### COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Dodecaedrum impropriè inſcribitur in Cubo, Octaedro, & Tetraedro; vt patet ex propoſitionibus 13. 17. & 20. huius libri.*

### COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Cubus impropriè inſcribitur in Tetraedro; vt conſtat ex propoſitione 19.*

### COROLLARIVM NOSTRVM IV.

*Inter omnia quinque ſolida Regularia, vnum Octaedrum reliqua quatuor mutuò ſibi inuicem propriè inſcripta ſuſcipit. Icoſaedrum quidem ex propoſ. 16. tùm Icoſaedro imponitur Dodecaedrum, per propoſ. 5. libri huius, quòd eidem Octaedro inſcribitur per propoſ. 17. Præterea in Dodecaedro per propoſ. 8. inſcribitur Cubus, cuius octo anguli cum angulis octo Dodecaedri conuenientes, centra baſium Octaedri poſſident; & propterea & Cubus in Octaedro inſcriptus eſt. Denique per 1. propoſ. in Cubo deſcribitur Tetraedrum, quòd ideò in Octaedro dicitur eſſe deſcriptum, quòd eius anguli quatuor cum quatuor angulis Cubi conuenientes in centris baſium Octaedri reſideant. Hæc autem prærogatiua cæteris ſolidis Regularibus denegari, perſpicuum eſt ex dictis.*

## COROLLARIVM NOSTRVM V.

*Dodecaedrum, ſibiq́; inſcriptus Cubus, & huic Cubo Tetraedrum inſcriptum, eadem ſphæra comprehenduntur. Cùm enim per propoſ. 1. quatuor anguli Tetraedri, ex octo angulis Cubi, quatuor poſſideant, conueniantq́; per propoſ. 8. omnes anguli Cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido conſtat ſphæram Dodecaedro circumſcriptam, continere quoque Cubum & Tetraedrum; cùm ſphæra illius ſuperficies per horum ſolidorum angulos incedat.*

## COROLLARIVM NOSTRVM VI.

*Dodecaedrum, Cubus, & Tetraedrum, ſimiliter inſcribuur Icoſaedro, Octaedro, & Tetraedro. illorum enim anguli in horum baſium centris conſtituuntur; vt demonſtratum eſt, in centris quidem baſium Icoſaedri, propoſ. 5. 11. & 12. In centris verò baſium Octaedri, propoſ. 17. 4. & 6. Denique in centris baſium Tetraedri, propoſ. 20. & 18.*

## COROLLARIVM NOSTRVM VII.

*Viginti prioribus huius libri propoſitionibus omnes delineationes inſcriptionesq́; quinque ſolidorum Regularium, vnius in alio, quotquot excogitari poſſunt, abſoluimus: cùm in quolibet reliqua quatuor deſignauerimus. In Tetraedro Octaedrum, propoſ. 2: Cubum, propoſ. 18: Icoſaedrum, prop. 19. Dodecaedrum, prop. 20. In Octaedro, Tetraedrum, propoſ. 6: Cubum, propoſ. 4: Icoſaedrum, propoſ. 16. Dodecaedrum, prop. 17: In Cubo Tetraedrum, propoſ. 1: Octaedrum, propoſ. 3. Icoſaedrum, prop. 14: Dodecaedrum, propoſ. 13. In Icoſaedro, Tetraedrum, propoſ. 12: Octaedrum, propoſ. 15: Cubum, propoſ. 11: Dodecaedrum, prop. 5. In Dodecaedro denique Tetraedrum, propoſ. 10: Octaedrum, propoſ. 9: Cubum, propoſ. 8: Icoſaedrum, propoſ. 7.*

## COROLLARIVM NOSTRVM VIII.

*Quo artificio in quolibet ſolido Regulari ſphæra inſcribatur, propoſitione vltima huius libri traditum eſt.*

## COROLLARIVM NOSTRVM IX.

*Vltimumq́;. Sphæra circumſcribens ſolidum regulare quodcumq́;, & inſcripta in illo alia ſphæra: ſunt concentricæ. Hoc conſtat ex dictis in demonſtratione propoſitionis vltimæ huius libri.*

COM-

# COMMENTARIVS IN FRANCISCVM FLVSSATEM CANDALLAM

## DE QVINQVE SOLIDIS REGVLARIBVS, COMPARANDA LATERA ILLORVM SIBI MVTVO INSCRIPTORVM.

### PROPOSITIO I.

Si in Dodecaedro Cubus deſcribatur, & in hoc Cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius, proportionis quam habet maius ſegmentum ad minus ſegmentum rectæ lineæ diuiſæ extrema & media ratione, triplicata.

Fig.362.

CONSTRVCTIO. Cubi latus ſit recta AB deſcripti in Dodecaedro lateris C; ſitque Dodecaedri latus D recta inſcripti in dicto Cubo: ſitque diuiſum latus AB Cubi in puncto E, extrema & media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis quam habet AE maius ſegmentum ad EB minus.

Demonſtratio. Per corollar. noſtrum 5. propoſ. vltimæ libr. 2. Hypſiclis Dodecaedrum Cubuſq; in eo deſcriptus, eadem ſphæra comprehenduntur: & per corollar. 1. propoſ. 17. libr. 13. elem. ſi diuidatur latus Cubi extrema & media ratione, maius ſegmentum eſt latus Dodecaedri in eadem ſphæra cum Cubo inſcripti: ergo AE maius ſegmentum lateris Cubi, erit æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa illum Cubum deſcripti. Præterea per coroll. 2. propoſ. 13. libri ſecundi Hypſiclis diuiſo latere Cubi extrema & media ſectione, ſegmentum minus eſt latus Dodecaedri in iſto Cubo deſcripti: ergo EB minus ſegmentum lateris Cubi prædicti, æquale lateri D, Dodecaedri in iſto Cubo deſcripti. Quare per propoſ. 7. libr. 5. corollar. noſtrum, erit vt C latus Dodecaedri Cubo circumſcripti, ad D latus Dodecaedri eidem Cubo inſcripti; ita AE maius ſegmentum ad EB minus: ſed per coroll. propoſ. 17. libr. 12. element. Dodecaedrum lateris C ad Dodecaedrum lateris D, habet proportionem triplicatam lateris C, ad latus D; ergo idem Dodecaedrum lateris C ad Dodecaedrum lateris D, proportionem obtinebit triplicatam maioris ſegmenti AE ad minus EB. quod erat concludendum.

PRO-

Digitized by Google

## PROPOSITIO II.

Linea perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri & æquianguli, in latus oppoſitum demiſſa; ſecatur ab recta illum angulum ſubtendente, extrema & media ratione.

Fig.363. SVppoſitio. Ex angulo BAE, pentagoni ABCDE æquilateri & æquianguli, in latus CD illi angulo oppoſitum demiſſa ſit recta AF perpendicularis, quæ per corollar. noſtrum 4. ad propoſ. 5. Iſidori de inclinatione baſium corporum Regularium, dictum latus CD, biſariàm ſecabit. Porrò ab alia recta BE dictum angulum ſubtendente ſecabitur eadem recta AF illi ſacta obuiàm, in puncto G. Dico rectam AF ſecari in G ab recta BE, extrema & media ratione.

Conſtructio. Supponatur angulo AED, recta AD ſecans obuiàm rectam BE in H puncto diuerſo ab G; alioqui duæ rectæ vel ſpatium comprehenderent, vel ſegmentum commune haberent.

Demonſtratio. Per corollar. noſtrum 1. ad propoſ. 8. libr. 13. elem. recta BE, eſt parallela lateri CD; ergo in triangulo FAD, recta GH erit parallela baſi FD; vnde per 2. propoſ. lib. 6. elem. erit FG ad GA, DH ad HA, ſed per citat. 8. prop. libr. 13. elem. latus DA ſectum eſt ab latere BE, extrema & media ratione in puncto H; ergo etiam latus FA ſectum eſt in G, extrema & media ratione, quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO III.

Si ab angulis trianguli Tetraedri, ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema & media ratione; ita prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius. Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſim Icoſaedri in dicto Tetraedro deſcripti; inſcriptam quidem alij triangulo ęquilatero, cuius anguli latera trianguli Tetraedri ſecant extrema & media ratione; & latera ipſa biſariàm ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

SVppoſitio. Tetraedri ſit vnum triangulum ABC ęquilaterum & æquiangulum. & huius latera AB, BC, CA, ſecentur per propoſ. 30. libr. 6. elem. extrema & media ratione, primum AB in L, ſecundum BC in M, tertium CA in K; ita vt propè quemuis angulum, exempli gratia, BAC, ſit maius ſegmentum AL, & minus AK, laterum illum angulum comprehendentium: ductæ verò ſint AM, BK, CL, rectis, ab angulis dicti trianguli ad puncta illa oppoſitorum laterum, quæ neceſſariò illa ſecabunt extrema & media ratione, cum conditione requiſita. Dico quod hæ ductæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecantes in medio in punctis G, H, I, producent triangulum GHI quod erit vna è baſibus Icoſaedri deſcripti in hoc Tetraedro; quæ baſis GHI inſcripta erit alteri triangulo æquilatero PRQ, cuius anguli P, Q, R, latera trianguli ABC ſecant in P, Q, R, extrema & media ratione; & cuius latera PQ, QR, RP, biſariàm ſecantur biſariàm in G, H, I, ab ipſis angulis G, H, I, dictæ baſis GHI, Icoſaedri. Fig.364.

Conſtructio. Latera AB, BC, CA, trianguli ABC, biſariàm ſecentur in D, E, F, per propoſ. 10. libri 1. elem. & rectæ ducantur DE, EF, FD; erit per 2. propoſ. libr. 6. elem. recta DF ſuppoſita angulo BAC, parallela lateri BC ſubtendenti eundem dictum angulum ABC, quia latera AB, AC, ſecta ſunt proportionaliter: Simili methodo probabitur recta DE parallela lateri AC, & recta EF parallela lateri AB. Inſuper per propoſ. 30. lib. 6. elem. Recta DF ſecetur extrema & media ſectione in G; & recta FE in H; & recta ED in I, etiam extrema & media ratione; ita vt circa angulum F, trianguli DFE, ſit verſus D, minus ſegmentum, FG, & verſus E maius ſegmentum FH; tùm circa angulum D, verſus F ſit maius ſegmentum DG, & verſus E, minus ſegmẽtum DI. Denique per punctum G agatur recta linea PGQ parallela ductæ CL, per propoſ. 31. libr. 1. elem. tùm alia recta PIR per punctum I, parallela rectæ AM; tùm alia recta RHQ, per H punctum, parallela rectæ BK: tùm alia recta per H, NHO parallela rectæ BC.

Demonſtratio. Imprimis, per coroll. prop. 4. libr. 6. elem. quia recta DF eſt oſtenſa parallela baſi BC, trianguli BAC æquilateri, triangu-

triangulum DAF, erit illi ſimile ideoq́ue æquilaterum: Eodem modo probabitur triangulum DBE æquilaterum, ob parallelam DE, ipſi AC; tùm triangulum FCE eſſe æquilaterum, ob rectam parallelam FE, ipſi AB: Cùm igitur dicta triangula DAF, DBE, FCE, æquilatera, latera habeant quæ ſunt ſemiſſes æqualium laterum trianguli totalis BAC æquilateri; reſultabit triãgulum DFE æquilaterum, quod erit per conſtructionem propoſ.2. libr.2. Hypſiclis, vna baſis Octaedri inſcripti in Tetraedro cuius baſim vnam ABC aſſumpſimus: Et quia huius trianguli DFE latera diuiſa ſunt extrema & media ratione cum circumſtantia adhibita in conſtructione præmiſſa; triangulum GHI, erit baſis Icoſaedri inſcripti in Tetraedro iſto, iuxta conſtructionem propoſ.19. libr.2. Hypſ. Iam verò quia recta NHO eſt parallela baſi BMC, erit per corollar. noſtrum ad propoſ.4. libr.6. elem. ſimiliter ſecta in H, extrema & media ratione, vt recta BC in M; vel vt recta DF in G: Erit ergo vt BC ad MC, ita NO ad HO, & DF ad GF; vel vt BM ad MC, ita NH ad HO, & DG ad GF: igitur recta AM tranſibit per puncta G & H; Nam ſi non tranſeat per ambo puncta G, H, incedat ſi fieri poſſit per neutrum, vt ATM, vel per G tantùm, non autem per H, vt AGTM; quodcumque dicatur, nihilominus erit vt BM ad BC, ſic NT ad TO, per citat. coroll. noſtrum, quare per propoſ.16. libr.1. elem. erit rectangulum ſub BN, TO, æquale rectãgulo ſub MC, NT; & quia oſtendimus eſſe BM ad MC, vt NH ad HO, erit etiam rectangulum ſub BM, HO, æquale rectangulo ſub MC, NT; rectangula autem ſub BM, TO, & ſub BM, HO, ſunt inæqualia, & maius eſt ſub MB, HO, ſi punctum T ſit vltra H verſus O; ergo etiam rectangulum ſub MC, NH, maius erit rectangulo ſub MC, TN, pars toti; (quando enim rectangula commune habent latus, & alia ſunt inæqualia, ſunt eodem modo inæqualia, quo illa latera inæqualia.) hoc verò abſurdum quandoquidem conſequitur ad poſitionem contradicentem vni aſſertioni huius propoſitionis, falſa erit iſta poſitio, & vera aſſertio. Eadem methodo ſi per I ducatur recta parallela lateri AB, oſtendemus rectã CL incedere per pũcta H & I; & ſi ducatur altera recta per punctum G, parallela lateri AC, probabimus rectam BK, incedere per puncta I & G. Quare rectæ BK, CL, AM, ſe mutuò ſecantes in punctis G, H, I, producent triangulum GHI, baſim Icoſaedri deſcripti in dato Tetraedro cuius baſim vnam ABC aſſumpſimus, & diuidimus eius latera ex conditione appoſita in hac propoſitione, quod erat primo loco aſſertum.

Quoniam autem in triangulo EFC, ducta eſt parallela AO, ipſi EC, erit per corollar. propoſ.4. libr.6. elem. triangulum HFO; ſimile triangulo EFC æquilatero, ideoq́ue æquilaterum; recta ergo FO erit æqualis rectæ FH. Et quia recta AF eſt æqualis, rectæ FE, & rectæ FE ſectæ media & extrema ratione in H, maius ſegmentum eſt FH, ſeu FO illi æqualis; erit per 2. propoſ. libr.13. elem. recta AO ſecta in F extrema & media ratione: eſt verò per 2. propoſ. lib.6. elem. vt AF ad FO, ita AG ad GH; (ob triangulũ HAO, in quo recta GE parallela oſtenſa ipſi MC, & MC ipſi HO, erit per prop. 30. lib.1. elem. parallela ipſi HO.) Et vt AG ad GH, ita AQ ad QC, & AP ad PL, propter triangula AHC, AHL, in quibus rectæ GQ, PG, ſunt parallelæ lateribus HC, HL. Oſtendimus autem rectam AO ſectam eſſe in F extrema ratione; ergo etiam recta AH ſecta erit G; & recta AL in P; & recta AC in Q, extrema & media ratione; & maiora illarum ſegmenta erunt AF, AQ, AG, AP: Et rectarum æqualium AC, AB, maiora ſegmenta AQ, AL, erunt æqualia, ſectarum videlicet extrema & media ratione. Quoniam autem eſt iuxta 2. propoſ. libr.1. Hypſ. vt AQ maius ſegmentum ad QC minus, ita tota AL ad AP maius ſuum ſegmentum; eſtq́ue AQ & AL prima & tertia æquales, erunt per propoſ.14. libr.5. elem. QC, & AP, ſecunda & quarta æquales: Ideoq́ue AP erit minus ſegmentum totius AB, & eius maius ſegmentum BP; quare recta PQ ducta parallela rectæ CL, per punctum G, ſecabit latera AB, AC, extrema & media ratione. Simili ratione recta PR ducta per I, parallela rectæ AM, ſecabit latera AB, BC, in P & R, extrema & media ratione, ideoq́ue incedet per punctum P. Eodem modo QHR ducta per punctum H; parallela rectæ BK, ſecabit latera AC, CB in Q & R, ideoq́ue tranſibit per puncta Q & R. Denique quia in triangulis PAQ, RBP, QCR, latera comprehendentia æquales angulos trianguli æquilateri ABC, sũt maiora & minora ſegmenta laterũ æqualiũ trianguli æquilateri ABC, ſectorum extrema & media ratione, æqualia relatiuè; per prop.4. lib.1. elem. baſes obtinebũt æquales PQ, PR, QR: quare triangulum PQR etiã æquilaterum. Et quia anguli trianguli GHI, attingunt latera huiuſtri anguli æquilateri PQR, ideò per defin.1. libr.4. elem. triangulum GHI, inſcribetur in triangulo æquilatero PQR, ſecante ſuis angulis P, Q, R, trianguli ABC Tetraedri dati latera AB, AC, BC, in P, Q, R, extrema & media ratione. ſicuti fuit ſecundo loco propoſitum.

Inſuper quia in ACL, recta FH eſt parallela

Digitized by Google

ponatur diameter Rationalis, erit per def.6. lib.10.elem. latus Pyramidis Rationale,quia per prop.6.lib. cit.10. eſt potentia commenſurabile diametro prædictæ. Quare cùm per iſtam propoſ. 4. latus Icoſaedri ſit potentiâ commenſurabile minori ſegmento prædicto lateris Tetraedri; erit per coroll. noſtrum ad 104.libr.10. elem. latus Icoſaedri in pyramide ſeu Tetraedro inſcripti, Apotome.

## PROPOSITIO V.

Latus Cubi potentiâ dimidium eſt lateris Tetraedri in eo deſcripti.

Latus verò Tetraedri duplum eſt longitudine lateris Octaedri ſibi inſcripri.

Latus denique Cubi duplum eſt potentiâ lateris ſibi inſcripti Octaedri.

DEmonſtratio. Per prop.1.libr.2.Hypſ. latus Tetraedri in Cubo deſcripti, ſit diameter baſeos Cubi; & per prop.47.lib.1. element. quadratum huius diametri æquale duobus quadratis ſimul duorum laterum Cubi ſeu baſeos eius, ideoque duplum vnius ex his quadratis: Ergo latus Cubi potentiâ dimidium eſt lateris Tetraedri in Cubo inſcripti prædicto, ſicuti fuit primò propoſitum.

Rectæ lineæ vnientes ſectiones biſarias laterum Tetraedri, efformat Octaedrum in Tetraedro inſcriptum, per 2.propoſ. libr.2. Hypſ. & latus trianguli æquilateri duplum eſt rectæ coniugantis biſarias eius ſectiones, quia illa recta eſt æqualis dimidio lateris trianguli, per coroll.prop.4.libr.6. elem. cùm ſit parallela per 2.prop.lib.cit.6. tertio lateri,vnde auferet triangulum toti ſimile:Ergo latus Tetraedri duplum erit longitudine lateris Octaedri ſibi inſcripti, ſicuti fuit ſecundò propoſitum.

Per prop.14.lib.13.elem.Diameter ſphæræ ſeu Octaedri in ea inſcripti, eſt potentiâ dupla lateris Octaedri: & per coroll.1.prop. 15.lib.13.cit.latus Cubi eſt æquale diametro Octaedri ſibi inſcripti, quia diameter huius Octaedri nectit centra oppoſitarum baſium: ergo latus Cubi duplum eſt potentiâ lateris Octaedri ſibi inſcripti, ſicut fuit tertiò propoſitum.

## PROPOSITIO VI.

Latus Dodecaedri maius eſt ſegmentum rectæ, quæ potentiâ eſt dimidia lateris Tetraedri ſibi inſcripti.

DEmonſtratio. Per conſtructionem propoſ.10. libr. 2. Hypſ. Tetraedrum Cubo inſcriptum, deſcriptum etiam eſt in Dodecaedro, cui ille Cubus inſcribitur, & per coroll.1.prop.17. libr.13.elem. latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris Cubi qui in eo deſcribitur; & latus Cubi eſt dimidium potentiâ lateris Tetraedri ſibi inſcripti, per præced. prop. 5. Ergo latus Dodecaedri maius eſt ſegmentum rectæ quæ potentiâ ſemiſſis eſt lateris Tetraedri ſibi inſcripti.

## PROPOSITIO VII.

Si in Cubo deſcribatur & Icoſaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icoſaedri medium proportionale erit, inter latus Cubi & Dodecaedri.

SVppoſitio. Sit recta A,latus Cubi;& recta B, latus Icoſaedri; & recta C, latus Dodecaedri; & ambo ſolida, Icoſaedrum & Dodecaedrum, ſint in eodem Cubo lateris A, deſcripta. Dico rectam B, eſſe mediam proportionalem, inter rectas A & C. Fig.366.

Demonſtratio. Per coroll.3. prop.14.lib. 2. Hypſ. Latus Icoſaedri in Cubo inſcripti, eſt maius ſegmentum lateris dicti Cubi, extrema & media ratione ſecti; & per coroll. 2.prop.13. libr.cit. latus Dodecaedri, eſt minus ſegmentum eiuſdem lateris Cubi ſecti eodem modo prædicto, in hoc Cubo inſcripti. Ergo iuxta defin.3.libr.6.elem.erit tota recta A, ad B maius ſuum ſegmentum, vt ipſum B ſegmentum maius ad C minus eiuſdem A totius ſegmentum: & ſic B erit medium proportionale inter A & C. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO VIII.

Latus Tetraedri potentiâ octodecuplum eſt lateris Cubi in eo deſcripti.

DEmonſtratio. Ex dictis in prop.18.lib. 2. Hypſ. latus Tetraedri eſt longitudine triplum diametri Cubi in eo deſcripti; & per propoſ.20.libr.6.elem. quadrata proportionem habent duplicatam laterum; ergo quadratum lateris Tetraedri erit noncuplum quadrati diametri baſis Cubi in eo deſcripti; Ergo quia quadratum diametri baſeos Cubi ſit æquale duobus quadratis ſimul ſumptis laterum huius baſeos per 47. propoſ. libr. 1. elem. duplum erit vnius, cùm ſint æqualia. Quare ſi ponatur baſis Cubi, id eſt quadratum lateris Cubi, 1; quadratum diametri baſeos eius erit 2; & quadratum lateris Tetraedri, 18: ſed numerus 18 eſt octodecuplus vnitatis; ergo latus Tetraedri potentiâ octodecuplum erit lateris Cubi in eo inſcripti.

## PROPOSITIO IX.

Latus Pyramidis ſeu Tetraedri potentiâ Octodecuplum eſt rectæ extrema & media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum eſt latus Dodecaedri in Tetraedro inſcripti.

DEmonſtratio. Per coroll.noſtrum 5. ad propoſ. vltimam libr. 2. Hypſ. Cubus inſcriptus in Dodecaedro, etiam deſcriptus eſt in Tetraedro in quo Dodecaedrum inſcribitur; ergo per præced. propoſ. 8. latus Tetraedri erit potentiâ octo decuplum lateris Cubi in eo, & in Dodecaedro deſcripti: ſed huius lateris Cubi extrema & media ratione ſecti, ſegmentum maius, eſt Dodecaedri latus in Tetraedro inſcripti, in quo Cubus inſcriptus eſt, per coroll.propoſ.17.libr. 13. elem. Igitur Tetraedri latus octodecuplum eſt potentiâ rectæ extrema & media ratione ſectæ, cuiuſque maius ſegmentum eſt Dodecaedri latus in Tetraedro inſcripti.

## PROPOSITIO X.

Si in Octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſaedri potentiâ duplum minoris ſegmenti lateris Octaedri extrema & media ratione diuiſi.

DEmonſtratio. Per demonſtrationem propoſ.16.lib.2.Hypſ.recta linea vnius puncta ſectionum duorum laterum Octaedri extrema & media ratione ſectorum, rectum angulum continentium propè minora ſegmenta, eſt latus Icoſaedri in Octaedro deſcripti: Igitur quia per prop.47.libr.1.elem. recta hæc linea poteſt latera æqualia illa circa dictum rectum angulum, poterit duplum vnius; ergo latus Icoſaedri in Octaedro inſcripti, erit potentiâ duplum minoris ſegmenti Octaedri prædicti extrema ac media ratione ſecti.

## PROPOSITIO XI.

Latus Octaedri potentiâ quadruplum ſeſquialterum eſt lateris Cubi in eo deſcripti.

SVppoſitio & conſtructio. Data ſit vna ABCDE è ſex pyramidibus Octaedri, quadratam obtinens baſim ABCD; triangulorum verò ad verticem E, ſint centra F, G, H, I; Tùm per centrum G, trianguli æquilateri AEB, recta linea ducatur LGK, ſecans eius latera in L & K, parallela baſi AB, per 31.prop. libr.1. elem. & alia recta MIN, per centrum I, trianguli æquilateri DEC, ſecans latera eius in M, N, parallela baſi CD; & puncta K, N, vniantur recta linea KFN, tranſibit per F centrum trianguli æquilateri AED, prout demonſtrauimus in prop.4.lib. 2. Hypſ. Simili modo recta LHM ducenda, incedet per H centrum trianguli æquilateri BEC: Et ſi coniũgentur centra F, G, H, I, rectis FI, IH, HG, GF, reſultabit quadratum GFIH, Cubi in Octaedro deſcripti, per ea quæ demonſtrauimus in cit. propoſ.4. libr.2. Hypſ. Denique ducatur recta EHO. Dico autem quod Octaedri latus EB eſt potentiâ quadruplum ſeſquialterum lateris GH, Cubi in hoc Octaedro deſcripti. *Fig.367.*

Demonſtratio. Per coroll. propoſ.18.lib.1. Hypſ. recta EHO eſt ſeſquialtera rectæ EH;

qualium

qualium ergo partium erit 3, recta EO, talium erit 2, recta EH; ſed per 2. prop. libr. 6. elem. eſt vt EO ad EH, ita EB ad EL; ergo ſi EB ſit 3 partium, talium erit EL, 2, ſeu LM ipſi æqualis, ob triangulum æquilaterum LEM, ſimile triãgulo æqualatero BEC, iuxta corollar. prop. 4. libr. 6. elem. Quare quadratum lateris EB Octaedri, erit partium 9; & quadratum rectæ LM, nimirum quadratum KLMN, erit 4 partium; & quadratum FGHI, inſcriptum in alio KLMN, erit 2 partium, nam illud eſt huius dimidium per corollarium noſtrum ad propoſit. 47. libr. 1. element. Ergo cùm quadratum EB lateris Octaedri ſit 9. partium, & quadratum FGHI, lateris Cubi in eo deſcripti ſit 2. partium: manifeſtum eſt quod latus Octaedri potentiâ ſit quadruplum ſeſquialterum lateris Cubi in eo inſcripti.

## COROLLARIVM.

*Octaedri latus eſt potentiâ quadruplum ſeſquialterum eius rectæ extrema & media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum eſt latus Dodecaedri Octaedro inſcripti.*

PEr coroll. 2. prop. 13. libr. 2. Hypſiclis latus Cubi ſectum extrema & media ratione, maius ſegmentum eius deſignat Dodecaedri cui inſcribitur; & per corollar. noſtrum 4. ad prop. vltimam lib. 2. Hypſic. inſcribuntur eidem Octaedro Dodecaedrum & Cubus ſibi inſcriptus: clarum eſt Octaedri latus eſſe potentiâ quadruplum ſeſquialterum eius rectæ extrema & media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum eſt latus Dodecaedri Octaedro inſcripti. Eſt enim illa recta, latus Cubi eidem Octaedro inſcripti, cuius quadruplum ſeſquialterum eſt latus Octaedri, iuxta hanc prop. 11.

## PROPOSITIO XII.

Latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris Octaedri in Icoſaedro deſcripti.

DEmonſtratio. Per prop. 14. libr. 2. Hypſicl. & coroll. eius 2. ſex latera oppoſita Icoſaedri in Cubo inſcripti, in ſex baſibus Cubi ſita ſunt, & horum biſarias ſectiones nectentes tres rectæ lineæ lateri Cubi ſunt æquales; & per prop. 15. libr. eiuſdẽ, in his bifariis ſectionibus dictorum ſex laterum Icoſaedri inſunt ſex anguli Octaedri in Icoſaedro inſcripti: ergo diameter Octaedri in hoc Icoſaedro inſcripti æqualis erit lateri Cubi in quo Icoſaedro inſcriptum eſt. Igitur per coroll. 3. citat. prop. 14. cùm latus Icoſaedri ſit maius ſegmentum lateris Cubi extrema & media ratione diuiſi; erit etiam idem latus Icoſaedri maius ſegmentum diametri Octaedri in illo Icoſaedro deſcripti. Sed per prop. 14. libr. 13. element. diameter ſphæræ ſeu Octaedri dupla eſt potentiâ lateris Octaedri; ergo latus Icoſaedri maius eſt ſegmentum rectæ extrema & media ratione diuiſæ, quæ potentiâ dupla eſt lateris Octaedri in Icoſaedro deſcripti.

## PROPOSITIO XIII.

Latus Cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti, proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione.

Latus verò Dodecaedri ad latus Cubi in ipſo deſcripti, proportionem habet quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ lineæ.

DEmonſtratio. Per 2. corollar. prop. 13. libr. 2. Hypſic. Minus ſegmentum lateris Cubi extrema & media ratione ſecti, eſt latus Dodecaedri in eo inſcripti; & in qualibet recta diuiſa illa ratione, ſint tres continuè proportionales, tota, maius ſegmentum, & minus, iuxta defin. 3. lib. 6. element. tota ad minus ſegmentum ſuum habet proportionem duplicatam eius quam habet ad minus, per 10. defin. lib. 5. element. Ergo proportio lateris Cubi ad latus Dodecaedri in eo inſcripti, erit quoque proportio maioris ſegmenti ad minus duplicata, rectæ diuiſæ ex trema & media ratione.

Per coroll. 1. prop. 17. lib. 13. elem. maius ſegmentum lateris Cubi, ſecti extrema & media ratione, eſt latus Dodecaedri in quo Cubus deſcribitur; & eſt tota recta ſic diuiſa ad maius ſegmentum vt maius hoc ſegmentum ad minus, ex defin. 3. lib. 6. elem. eſtque per coroll. prop. 4. lib. 5. elem. conuertendo,

vt maius ſegmentum ad totam, ita ſegmentum minus ad maius: erit vt latus Dodecaedri, hoc eſt ſegmentum maius ad latus Cubi in ipſo Dodecaedro inſcripti, ita minus ſegmentum minus ad maius. quod erat concludendum.

## PROPOSITIO XIV.

Latus Octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcripti Tetraedri.

*Fig.368.* SVppoſitio, & conſtructio. Sit ABCDE vna è ſex pyramidibus Octaedri, cuius baſis ſit quadratum ABCD, triãgula verò eius æquilatera ABE,EBC,CED,DEA, ad verticem E; & horum triangulorum ſint centra G, H, I, F, iuxta corollar. noſtra 6. & 7. ad prop.4.lib.4. element. quæ rectis vinciantur lineis FG, GH, HI, IF, quadratum FGHI, Cubi in Octaedro efformantibus, inſcripti, vti iam docuimus in prop.4.libr.2. Hypſic. Præterea quia per coroll. noſtrum 4.ad prop. vlt.lib.2. Hypſic. quia Tetraedrum in Cubo deſcriptum, inſcribitur etiam Octaedro, cui Cubus inſcribitur; eſtque per cõſtructionem prop.1.lib. 2.Hypſic. latus Tetraedri in Cubo deſcripti diameter baſis Cubi; erit ducta diameter GI, latus Pyramidis ſeu Tetraedri in Octaedro deſcripta. Inſuper ducantur rectæ EGK,EIL, quæ diuident bifariàm latera AB,CD,in K & L, per coroll.noſtrum ad prop.12. libr.13. element. ipſæque EK,EL, erunt per coroll.prop.18. libr.1.Hypſicl. ſeſquialteræ rectarum EG, EI; vnde recta GI erit parallela rectæ KL ducendæ,per 2.prop. 6.lib.elem.eò quòd latera EK, EL, ſecentur proportionaliter; eritque per coroll.prop.4. libr.6. elem. triangulum GEI, ſimile triangulo KEL. Dico autem quod BC latus Octaedri, ſit ſeſquialterum lateris GI, Tetraedri in eo deſcripti Octaedro.

Demonſtratio. Quia ſunt KEL,GEI, triangula ſimilia oſtenſa, erit per defin.1.libr.6. element. EK ad KL, vt EG ad GI; & iuxta prop.16.lib.5.elem. permutando erit vt EK ad EG,ita KL ad GI;ſed EK eſt ſeſquialtera EG oſtenſa, ergo etiam KL erit ſeſquialtera GI ipſius. Verùm cùm BC æqualis ſit & parallela ipſi KL, per 33. prop.libr.1. elem. eò quòd æquales KB, CL, & parallelas nectant; erit BC, vt KL, per prop.7. libr.5.elem. ſeſquialtera rectæ GI: ergo BC latus Octaedri erit ſeſquialterum lateris GI Tetraedri in eo inſcripti.

## PROPOSITIO XV.

Si ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadrati lateris Cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertium quadrati lateris Icoſaedri.

SVppoſitio & conſtructio. Diameter BE, ſit Icoſaedrum ABCDEIGH, cuius centrum I; triangulaque parallela & oppoſita BCG, EFH, iuxta corollar.prop.14. lib.13. elem.quorum centra K,L, ſecundùm coroll. 6.noſtrum ad prop.4.lib.4.elem.Ducatur ex centro I, ad planum trianguli BCG perpendicularis per 11.prop.lib.11.elem. hæc cadet in K centrum dicti trianguli, per coroll. noſtrum 5.ad prop.1.lib.1.Hypſ. hæc recta KI producta vltra I, cadet etiam ad angulos rectos in L centrum trianguli EFH, per coroll.noſtrum 1.ad prop.16.libr.11.elem. & coroll.noſtrum 5.ad cit.prop.11.lib.1.Hypſicl.Quare per prop.11. libr.2.Hypſ. demonſtrationem, cùm Cubus in Icoſaedro deſcriptus collocet angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, ideoque angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum, erit KIL diameter Cubi in Icoſaedro deſcripti incedens per I centrum Icoſaedri: atque ita cùm reliquæ diametri Cubi tranſeant per I centrum, erit etiam I centrum Cubi inſcripti;vnde IK,IL, erunt ſemidiametri eius æquales. Ducta igitur KB ſemidiametro circuli ambientis triangulum BCG Icoſaedri, erit angulus BKI rectus, per 3.defin.lib.11.elem. Dico autem ſi ex quadrato BE Icoſaedri tollatur triplum quadrati lateris Cubi in eodeſcripti,relinqui quadratum ſeſquitertium quadrati ex latere BC, Icoſaedri. *Fig.369.*

Alia neceſſaria conſtructio. Seorſim ex centro K circa triangulum æquilaterum BCG Icoſaedri, fiat circulus;protenſaq; BK recta ad circumferentiam circuli in M,ſecans CG latus in N, tranſmittatur recta CM linea.

Demonſtratio. In triangulo BKI rectangulo,per prop.47. lib.1.elem. quadratum rectæ BI, æquale erit duobus ſimul quadratis rectarum BK,KI; ergo quadratum rectæ BE quadruplum quadrati rectæ BI, per corollar. noſtrum ad prop.20. libr.6. elem. erit etiam quadruplum duorum ſimul quadratorum rectarum BK, KI, per 7.prop. libr.5. element.

Cumque

Cumq́ue etiam quadrata diametri BKM, & KIL, ſint quadrupla ſuorum quadratorum rectarum propriarum KB, KI; erunt per 9. prop. lib. 5. elem. quadrata diametri BKM, & diametri KL, ſimul æqualia quadrato rectæ BE, ſi detrahatur quadratum diametri KL Cubi, quod per prop. 15. lib. 13. element. triplum eſt quadrati lateris Cubi, ex quadrato diametri Icoſaedri BE, relinquetur quadratum diametri BKM circuli ambientis triangulum CBG; quod quadratũ diametri BKM dico eſſe ſeſquitertium lateris BC Icoſaedri: Nam per prop. 12. lib. 13. element. coroll. noſtrum 2. recta BC erit potentiâ ſeſquitertia rectæ BKN perpendicularis ad latus CG, per 3. coroll. noſtrum ad cit. prop. Cùm autem in triangulo rectangulo BCM per prop. 31. lib. 3. elem. ſit CN perpendicularis oſtenſa diametro ſeu baſi BM, erit per coroll. propoſ. 8. lib. 6. elem. recta BC media proportionalis inter BM, & BN; quare erit vt BN ad BC, ita BC ad BM; & per coroll. propoſit. 4. libr. 5. elem. vt BC ad BN, ita BM ad BC: oſtenſa verò eſt BC potentiâ ſeſquitertia rectæ BN; ergo etiam recta BM erit potentiâ ſeſquitertia rectæ BC. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM.

*Diameter Icoſaedri binas rectas poteſt; diametrum videlicet Cubi in eo deſcripti, & diametrum circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri.*

Fig. 369. Hoc oſtendimus in diametro BE Icoſaedri, potente diametrum KL Cubi in eo deſcripti, & diametrum BKM, circuli ambientis triãgulum BCG, ipſius Icoſaedri.

## PROPOSITIO XVI.

Latus Dodecaedri minus eſt ſegmentum rectæ lineæ extrema & media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

Demonſtratio. Per propoſit. 14. libr. 13. elem. demonſtrationem, Diameter Octaedri in Dodecaedro deſcripti, duplum potens lateris Octaedri, nectit biſarias ſectiones laterum oppoſitorum Dodecaedri, per ea quæ demonſtrauimus in prop. 9. lib. 2. Hypſiclis. Et rectæ lineæ huius coniungentis dictas biſarias ſectiones ſectæ extrema & media ratione ſegmentum minus eſt latus Dodecaedri, per coroll. 4. prop. 17. lib. 13. elem. Ergo latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema & media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XVII.

Diameter Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Tetraedri in eo deſcripti ſeſquialterum.

Demonſtratio. Per coroll. noſtrum 5. ad prop. vltimam libr. 2. Hypſiclis Cubus & Tetraedrum in eo inſcriptũ, eadem ſphæra circumſcribũtur; ideoq́ue eadem erit diameter ſphæræ cubiq́ue & per prop. 13. libr. 13. elem. Diameter ſphæræ poteſt ſeſquialterum lateris Tetraedri: ergo etiam diameter Cubi in Icoſaedro deſcripti, in quo & Tetraedrum, poterit ſeſquialterum lateris Tetraedri in ipſo Cubo & Icoſaedro deſcripti. Sed ex dictis in demonſtratione prop. 15. lib. huius, diameter circuli baſim Icoſaedri circumſcribentis poteſt ſeſquitertium lateris Icoſaedri; ergo diameter Icoſaedri potens diametrum Cubi in eo deſcripti, & diametrum circuli baſim Icoſaedri circumambientis, iuxta coroll. prop. 15. cit. poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, vtpotè diametrum circuli circa baſim Icoſaedri circumducti; & lateris Tetraedri in eo deſcripti ſeſquialterum, videlicet diametrum Cubi. Sicuti fuit propoſitum.

## PROPOSITIO XVIII.

Latus Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus, ſe habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema & media ratione diuiſæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſitæ.

Suppoſitio, & conſtructio. Aſſumatur ſemiſſis Dodecaedri contenta ſub ſex pen- Fig. 370.

tagonis ABMLK, LKIHP, IHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quæ rectis nectantur lineis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX, viciniora videlicet: reſultabunt ex dictis in demonſtratione propoſit. 7. lib. 2. Hypſiclis quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro inſcripti, efformantia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP. Inſuper ex angulis D, K, duorum pentagonorum, in communem baſim BM, tranſmittantur rectæ lineæ DRY, KQY, tranſeuntes per centra R, Q, propria dictorum pentagonorum; quæ quoniam per coroll. 2. ad prop. 10. libr. 13. elem. biſariàm & ad angulos rectos ſecant latus BM, concurrent in idem eius punctum Y. Denique ſubtendatur recta AL angulo K, quæ per 2. prop. libri huius ſecabit rectam KY in Z, extrema & media ratione. Ad hæc trãſmittatur recta DK. Iam verò aſſero quòd latus LM Dodecaedri eſt ad latus QR Icoſaedri ſibi inſcripti, vt KZ minus ſegmentum rectæ perpendicularis KY, ad rectam QY quæ eſt inter centrum Q, & latus BM.

Demonſtratio. Per corollar. 4. ad propoſ. 13. lib. 2. Hypſiclis recta DK, eſt latus Cubi, in quo inſcribitur Dodecaedrum iſtud; & per coroll. 2. cit. propoſit. erit LM latus Dodecaedri, minus ſegmentum totius DK extrema & media ratione ſectæ. Quia verò pentagona Dodecaedri ſunt æqualia & ſimilia, circuli illas circumſcribentes erunt æquales per coroll. noſtrum 8. ad prop. 4. lib. 4. elem. ideóque rectæ QK, RD, æquales, videlicet ſemidiametri illorum circulorum æqualium per defin. 1. libr. 3. elem. & quia per corollar. noſtrum 3. ad prop. 5. Iſidori de inclinatione baſium ad inuicem quinque ſolidorum regularium, ſunt æquales; erunt KY, DY, æquales rectæ, à quibus ſi demantur æquales oſtenſæ KQ, DR; relinquentur æquales rectæ QY, RY: Trianguli igitur DYK latera KY, DY, erunt in Q & R, diuiſa proportionaliter; ideóque per 2. prop. lib. 6. elem. recta RQ erit parallela rectæ DK; ac proinde per coroll. prop. 4. cit. lib. 6. element. triangulum RYQ, ſimile erit triangulo DYK: & per defin. 1. libr. eiuſdem 6. erit vt DK ad KY, ita RQ ad QY; ſed eſt per 2. prop. lib. 1. Hypſic. vt tota DK ad totam KY, ita LM ſegmentum minus oſtenſum rectæ DK, ad minus ſegmentum KZ; vt autem LM ad KZ, ita QR ad QY, per propoſ. 11. lib. 5. elem. ergo iuxta prop. 16. lib. cit. 5. elem. erit permutando, vt LM latus Dodecaedri ad QR latus Icoſaedri ſibi inſcripti, ita KZ minus ſegmentum perpendicularis KY ad QY portionem eius inter centrum Q & latus BM interpoſitam, quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XIX.

**Si dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, minuſque eius ſegmentum à toto latere Icoſaedri ſublatum; à reliqua quoque recta, pars rurſum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.**

SVppoſitio & conſtructio. Circulo circumſcribatur pentagonum ABCDE æquilaterum & æquiangulum, conflatum ex quinque lateribus Icoſaedri, idque per propoſ. 14. libr. 4. element. cuius centrum F, erit idem atque circuli per coroll. noſtra 6. & 7. propoſ. 4. libr. cit. elem. intra ipſum pentagonum ſitum: tùm ſuper latera huius pentagoni, concipiantur erecta & inclinata ad inuicem, quinque triangula æquilatera, conſtituentia angulum G ſolidum Icoſaedri, ex dictis in demonſtratione propoſ. 16. libr. 13. elem. Præterea in dicto facto circulo triangulum æquilaterum AHI inſcribatur per 2. prop. lib. 4. elem. Iam verò quia arcus ABC, ALD, ſunt duæ quintæ totius circũferentiæ circuli; erunt æquales inter ſe; tùm etiã quia alij duo arcus ABH, AEI, ſunt eiuſdem circuli tertiæ partes, erunt æquales inter ſe, per 7. axio. libr. 1. elem. ex illis ergo maioribus, ſi detrahantur iſti minores, æquales ex æqualibus, reſidui erunt duo arcus æquales HC, ID, per 3. axio. lib. 1. cit. elem. ideóque chordæ HI, CD, parallelæ erunt, per coroll. noſtrum 4. ad prop. 16. libr. 12. elem. ad quas ab centro F circuli, demittatur perpendicularis recta FKL, per 11. propoſ. libr. 1. elem. ſecans ipſas in punctis K, L, biſariàm, per propoſ. 3. libr. 3. elem. Tùm rectæ ducantur FC, FD; & per 1. prop. libr. eiuſdem citat. quærantur triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, quæ ſunt eadem quæ circulorum illa circumambientium per coroll. noſtra 6. & 7. ad prop. 4. lib. 4. elem. & per hæc centra N, O, tranſmittantur rectæ GNP, GOL, quæ per corollar. noſtrum 4. ad prop. 12. lib. 13. elem. latera oppoſita BC, CD, biſariàm & ad angulos rectos ſecabunt: quare recta GO in punctum L medium lateris CD, Fig. 371.

incidet.

incidet. Inſuper, recta NO immittatur, per centra N, O, prædicta; quæ recta NO, ex dictis in demonſtratione propoſ. 5. lib. 2. Hypſiclis erit latus Dodecaedri in Icoſaedro inſcripti. Denique BP dimidium lateris Icoſaedri, ſecetur per propoſit. 30. libr. 6. elem. in puncto Q, extrema & media ratione, ita vt minus eius ſegmentum ſit verſus B; quo ablato BQ minore ſegmento, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR, per propoſit. 9. libr. 6. elem. Dico reliquam partem QR, eſſe æqualem lateri NO, Dodecaedri in dicto illo Icoſaedro deſcripti.

Demonſtratio. FL perpendicularis ſecatur in K, ab latere HI, trianguli æquilateri, extrema ac media ratione, (eò quòd ſic diuiſa efficiat maius ſegmentum æquale perpendiculari FK, iuxta corollar. noſtrum 2. ad propoſit. 2. libr. 1. Hypſicl.) & maiori ſegmento FK æqualis eſt recta KM, per coroll. 2. propoſit. 12. libr. 13. elem. ſecta etiam in L extrema & media ratione, ex dictis in demonſtratione propoſ. 5. libr. 13. elem. Quare recta FM ſuperat rectam FL, minore LM ſegmento dimidiæ ſui ipſius. Quia verò ducta PL, eſt latus pentagoni æquilateri & æquianguli in pentagono ABCDE inſcripti, ex dictis in demonſtratione propoſ. 12. lib. 4. elem. idemque centrum F obtinentis, ſimiliſque illi; ideò triangula FCD, FPL, ſimilia erunt. Quare vt FC ad CD, ita FL ad LP; & iuxta prop. 16. libr. 5. elem. alternando, vt FC ad FL, ita CD ad LP: ſed FC vel ei æqualis FM, ſuperat rectam FL, minore ſegmento ſemiſſis ipſius FM, videlicet minore ſegmento rectæ KM, vti anteà probauimus: Ergo recta CD, vel ei æqualis BC, ſuperabit etiam LP, minore ſegmento ſemiſſis ipſius BC, videlicet minore ſegmento rectæ BP, quod fuit BQ; quare reliqua CQ, rectæ PL æqualis erit. Præterea quoniam GP, GL, proportionaliter diuiduntur in centris N, O, cùm GN, GO, ſint duplæ aliarum NP, OL, per coroll. prop. 18. libr. 1. Hypſicl. erunt rectæ PL, NO, parallelæ per 2. prop. libr. 6. elem. ideoque per coroll. propoſ. 4. libr. eiuſdem 6. elem. triangulum NGO, erit ſimile triangulo PGL: vnde per defin. 1. libr. eiuſdem 6. erit vt GP ad PL, ita GN ad NO; & iuxta propoſit. 16. libr. 5. element. permutando vt GP ad GN, ita PL ad NO; ſed GP eſt ſeſquialtera GN, per coroll. propoſit. 18. libr. 2. Hypſicl. igitur PL erit etiam ſeſquialtera NO; & per 7. propoſit. libr. 5. element. CQ æqualis ipſi PL, erit quoque ſeſquialtera eiuſdem NO. Quamobrem cùm CQ ſit etiam ſeſquialtera rectæ QR, (qualium enim partium 3 eſt recta CQ, talium eſt 1, recta CR, per conſtructionem; ergo earundem erit 2, recta QR,) erit per 9. propoſit. libr. 5. element. recta QR æqualis rectæ NO, lateri Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Probauimus ergo intentum.

## PROPOSITIO XX.

### Cubus ſibi inſcriptæ Pyramidis, vel Tetraedro ſibi inſcripto, triplus eſt.

DEmonſtratio. Per corollar. noſtrum 5. ad propoſit. vltimam libr. 2. Hypſiclis, Cubus & in eo deſcriptum Tetraedrum, eadem ſphæra circumambiuntur: & per prop. vltimam libr. 1. Hypſicl. Cubus triplus Tetraedri deſcripti in eadem ſphæra: Igitur vti propoſuimus Cubus ſibi inſcripti Tetraedri, triplus erit, & quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XXI.

### Tetraedrum ſiue Pyramis ſibi inſcripti Octaedri duplum eſt.

SVppoſitio. In Tetraedro ABCD, deſcriptum ſit Octaedrum EIKGHF. Dico Tetraedrum eſſe duplum Octaedri. Conſule figuram prop. 2. lib. 2. Hypſiclis. Fig. 349.

Demonſtratio. Quandoquidem quatuor pyramides ſeu Tetraedra ſimilia Tetraedro ABCD, circumſtent Octaedrum, fundata ſuper quatuor triangula æquilatera EGH, EFI, FGK, HIK, Octaedri; qualia ſunt Tetraedra EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: quæ quidem æqualia ſunt inter ſe, per defin. 10. libr. 11. quia continentur ſub triangulis ſimilibus æqualibuſque numero & magnitudine, eò quòd ſimilia ſint iſta triangula baſibus pyramidis æquilateribus per coroll. propoſ. 4. libr. 6. element. ob rectas parallelas ex dimidiis laterum pyramidis ductas; lateraque obtineant æqualia, nimirum ſemiſſes laterum æqualium pyramidis ABCD, per conſtructionem propoſit. 2. lib. 2. Hypſiclis. Habeant verò per 8. propoſit. lib. 12. element. pyramides ſimiles proportionem triplicatam laterum homologorum; erit pyramis ABCD octupla cuiuſlibet illarum quatuor pyramidum Octaedro circumpoſitarum: id eſt quælibet illarum quatuor erit pars octaua pyramidis ABCD. Quare quatuor illæ pyramides ſimul ſumptæ, efficient dimidium pyramidis ABCD. Igitur reliquum Octaedrum EIKGHF, erit etiam dimidium Pyramidis

dis cui inſcriptum erat ; ideoque ipſa erit dupla Octaedri ſibi inſcripti.

## PROPOSITIO XXII.

### Cubus ſibi inſcripti Octaedri ſextuplus eſt.

Demonſtratio. Per demonſtrationem propoſit. 3. lib. 2. Hypſiclis, ſi pyramis in Cubo deſcribatur, & in pyramide Octaedrum, erit in Cubo deſcriptum Octaedrum: Et per propoſit. 20. libri huius, Cubus eſt triplus pyramidis in eo deſcriptæ ; & pyramis Octaedri in ea deſcripti dupla per præcedent. propoſit. Ergo qualium partium 6 erit Cubus, talium 2 erit pyramis, & earundem partium 1, Octaedrum. Ideoque vt 6, eſt ſextuplus vnitatis ; ita Cubus ſibi inſcripti Octaedri ſextuplus erit.

## PROPOSITIO XXIII.

### Octaedrum ſibi inſcripti Cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.

Fig. 372. Suppoſitio. Per propoſit. 4. lib. 2. Hypſiclis ſit GHIKLMNO, Cubus inſcriptus in Octaedro ABCDEF, angulos ſuos applicans in centris baſium Octaedri. Dico Octaedrum hoc eſſe quadruplum ſeſquialterum Cubi.

Conſtructio. Aſſumatur pyramis BEDFA, Octaedri dati ; & per centra G, K, I, H, quatuor baſium Octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ, quadratum PQRS, efformantes, vt in demonſtratione propoſitionis citat. 4. libr. 2. Hypſiclis docuimus, quod quadratum per propoſit. 15. lib. 11. elem. erit parallelum BEDF. Tranſmittatur diameter AC, Octaedri, quæ orthogonia erit ad quadratum BEDF, in centro T, per coroll. 1. propoſit. 14. lib. 13. element. tùm ad baſes GIMO, Cubi, in punctis V, X, per coroll. noſtrum 1. ad propoſit. 16. lib. 11. element. Eſt verò V centrum quadrati PQRS, vti nunc ſic probabimus. Plana BEDF, PQRS, parallela, ſecant rectas AB, AE, AD, AF æquales, (quia ſunt latera Octaedri,) proportionaliter per propoſit. 17. libr. 11. element. quare rectæ AP, AQ, AR, AS, erunt æquales : ergo ſi concipiantur ductæ rectæ lineæ VP, VQ, VR, VS, ad quas per defin. 3. libr. 11. element. erit perpendicularis recta AV; reſultabunt triangula rectangula; & horum laterum AP, AQ, AR, AS, æqualium, quadrata erunt æqualia per 3. corollarium noſtrum ad propoſit. 46. lib. 1. element. oppoſitorum angulis rectis in V; & per propoſit. 47. lib. citat. æqualia ſingula duobus quadratis ſimul duorum laterum propriorum circa rectum in V angulum; quæ ideò per 1. axio. lib. 1. citat. erunt illa duo ſimul quadrata æqualia aliis dictis ſimul quadratis, & inter ſe : ergo ſi ex illis æqualibus dematur cõmune quadratum rectę AV; relinquentur quadrata rectarũ VP, VQ, VR, VS, æqualia, ideoq; ipſæ dictæ rectæ ęquales: quare V erit centrum circuli circũſcribentis quadratum PQRS, centrumq; ipſius quadrati, per coroll. 6. noſtrum ad prop. 4. li. 4. elem. Igitur cùm V ſit centrum quadrati PQRS, erit etiam centrum quadrati GHIK in eo inſcripti, vt facilè demonſtrabitur ex eiſdem principiis allatis, ducendo per imaginationem rectas VG, VH, VI, VK. Diuiduntur autem latera PQ, QR, RS, SP, biſariàm in G, H, I, K, per demonſtrat. propoſ. lib. 2. Hypſiclis. Eodem verò diſcurſu ſuperiùs allato, probabimus punctum ● eſſe centrum quadratæ baſeos LMNO. Tùm etiam alias diametros BD, EF, per puncta Y, Z, $\alpha$, $\beta$, centraque reliquarum baſium incedere. Rurſus immittatur recta A$\gamma$, per G centrum trianguli æquilateri ABE, erit per corollar. propoſit. 18. libr. 1. Hypſiclis ipſa AG dupla ipſius G$\gamma$. Cùm verò plana PR, BD, ſecent rectas A$\gamma$, AT, proportionaliter per propoſit. 17. lib. 11. element. dupla quoque erit AV, ipſius VT. Simili modo probabitur dupla recta CX, ipſius XT: quare cùm æquales AT, CT, ſimiliter ſecentur in V & X, æquales erunt AV, CX, tùm VT, XT. Ergo recta VX nectens centra baſium Cubi oppoſitãrum biſariàm diuiditur in T. Igitur cùm per eandem rationem YZ, $\alpha\beta$, biſariàm diuidantur in T, erit T centrum Cubi; quandoquidem rectæ centra baſium Cubi oppoſitarum vnientes ſeſe in centro Cubi ſecant, per corollar. 1. propoſit. 15. lib. 13. elementorum. Nunc autem quia VX eſt dupla ipſius VT, & dupla fuit AV, eiuſdem VT, erunt per 9. prop. libr. 5. element. æquales AV, VX, hoc eſt AV erit æqualis altitudini VX, Cubi. Igitur per coroll. 1. propoſit. 7. lib. 12. element. erit pyramis GHIKA, ſi ducantur rectę AI, AK, AH, tertia pars Cubi ſeu priſmatis GO, quia vtriuſque eadem baſis eſt GI, & altitudines æquales AV, VX. Sed per propoſit. 6. lib. 12. citat. element. pyramis PQRSA, eſt pyramidis GHIKA, dupla, quod baſis PQRS, ſit dupla baſeos GHIK illi inſcriptæ per co-

rollarium

rollarium noſtrum 3. ad propoſit. 2. libr. 12. element. Ergo pyramis PQRSA, duas tertias partes Cubi GO, complectetur. Quia verò pyramides BEDFA, PQRSA, ſimiles, per defin. 9. libr. 11. element. quia triangula vnius ſunt ſimilia triangulis alterius, per coroll. propoſit. 4. libr. 6. element. proportionem ſibi vendicant triplicatam laterum homologorum, iuxta propoſit. 8. libr. 12. element. & latus AB ſeſquialterum lateris AP, cò quòd AG oſtenſa ſit ſeſquialtera ipſius AG; erit pyramis BEDFA ad pyramidem PQRSA, vt 27 ad 8. hæc etenim proportio eſt triplicata proportionis ſeſquialteræ 3 ad 2, vt in his numeris videre eſt 8. 12. 18. 27. Quare totum Octaedrum ABCDEF, duplum cùm ſit pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54 ad 8. ſed qualium partium 8 aſſumitur pyramis PQRSA, talium 12 erit Cubus GO, ex demonſtratis: numerus enim 8 duas tertias continet numeri 12: Ergo Octaedrum ABCDEF ad Cubum GO ſibi inſcriptum proportionem habet quam 54 ad 12, hoc eſt quadruplam ſeſquialteram. ſicuti fuit propoſitum ac demonſtrandum.

### COROLLARIVM I.

*Idem centrum eſt Octaedri & Cubi ſibi inſcripti.*

### COROLLARIVM II.

*Octaedrum ad ſibi inſcriptum Cubum, eandem habet proportionem, quam eorum laterum quadrata.*

NAm per 11. propoſit. lib. huius quadratum lateris Octaedri habet proportionem quadruplam ſeſquialteram, ad quadratum lateris Cubi ſibi inſcripti. & per hanc propoſitionem Octaedrum Cubi ſibi inſcripti quadruplum & ſeſquialterum eſt. ergo manifeſtum eſt corollarium.

## PROPOSITIO XXIV.

### Octaedrum ſibi inſcriptæ Pyramidis ſeu Tetraedri, tredecuplum ſeſquialterum eſt.

DEmonſtratio. Per corollar. noſtrum 4. ad propoſit. vltimam libr. 2. Hypſic. Cubus, ſibique inſcriptum Tetraedrum, in eodem Octaedro deſcribuntur. Et per 23. præcedent. propoſit. Octaedrum Cubi ſibi inſcripti quadruplum ſeſquialterum eſt: & per 20. propoſit. libr. huius, Cubus ſibi ac proinde Octaedro inſcriptæ Pyramidis triplus. Qualium igitur partium 2 ſtatuetur pyramis, talium erit 6 Cubus, & earundem 27, Octaedrum; obtinent enim 27 ad 6, proportionem quadruplam ſeſquialteram; & 6 ad 2, triplam: Ergo Octaedrum ad ſibi inſcriptam pyramidem proportionem ſibi vendicat, quam 27 ad 2; nimirum tredecuplam ſeſquialteram. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XXV.

### Tetraedrum ſeu Pyramis ſibi inſcripti Cubi eſt noncupla.

COnſtructio. Cubus intelligatur inſcriptus Tetraedro ABCD. Concipiantur duo triangula ACD, ABD, æquilatera & æqualia, ſeu baſes Tetraedri dati, circumſcriptæ ſuis propriis circulis, per propoſit. 5. lib. 4. element. & inuenta earum centra propria G, H, per 1. propoſit. libr. 3. element. quæ erunt intra ipſa dicta triangula, per coroll. noſtra 6. & 7. ad prop. 4. lib. 4. element. Tùm ex angulis C, B, dictorum triangulorum ad latus AD, commune oppoſitum, per centra propria G, H, tranſmittantur duæ rectæ lineæ CGS, BHS, diuident latus AD bifariàm, & ad angulos rectos, per corollarium noſtrum 4. ad prop. 12. lib. 12. elem. & proinde concurrent in commune punctum S: & ducatur recta GH. Dico Pyramidem eſſe ſibi inſcripti Cubi noncuplam. Fig. 373.

Demonſtratio. Per corollar. propoſit. 18. libr. 1. Hypſiclis. Rectæ BH, CG, ſunt duplæ rectarum HS, GS, ideoque proportionaliter ſectæ rectæ totæ BS, CS; ergo per propoſit. 2. libr. 6. element. BC, HG, parallelæ erunt; & per corollar. propoſit. 4. libr. citat. 6. triangulum HSG, erit ſimile toti triangulo BSC: quare per ipſam propoſit. 4. citat. erit vt BC ad CS, ita HG ad GS; & iuxta propoſit. 16. libr. 5. element. permutando vt BC ad HG, ita CS ad GS: ſed per citat. propoſit. 18. libr. 1. Hypſiclis eſt recta CS tripla rectæ GS, ergo etiam recta BC erit tripla rectæ HG. Quia verò latus pyramidis in Cubo deſcriptæ eſt diameter baſis Cubi, quemadmodum oſtendimus in propoſit. 1. libr. 2. Hypſiclis, recta verò vniens centra baſium pyramidis commune latus habentium

duabus Icoſaedri pyramidibus quæ tertiam partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri efficiunt, æqualis erit tertia pars priſmatis baſeos GHI, & altitudinis OP; priſma nimirum cuius baſis tertia pars trianguli GHI, & eadem OP altitudo. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis tripla ſit trianguli GHI, & OP altitudo, alterius verò tertia pars baſeos GHI, & eadem OP altitudo, erunt Icoſaedri æqualia in Octaedro deſcripto. Præterea quandoquidem illa duo priſmata æqualia Octaedro ad hæc duo priſmata, Icoſaedro æqualia ſunt ſicuti probauimus in propoſ. 7. libr. 12. element. vt baſes priſmatum Octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE continentes, (quia vnius baſis eſt triangulum ADE, videlicet tres partes tertiæ ipſius ADE continens, alterius verò baſis, tertia pars ipſius ADE,) ad baſes priſmatum Icoſaedro æqualium, decem tertias partes trianguli GHI, complectentes, (quia vnius baſis eſt tripla trianguli GHI, vtpote nouem tertias partes ipſius GHI comprehendens, alterius verò baſis tertia pars ipſius GHI.) Sint verò per propoſ. 15. libr. 5. element. vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decem tertias partes trianguli GHI, ita duæ tertiæ partes ipſius ADE, nimirum ſemiſſis quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipſius GHI, id eſt ad ſemiſſem decem tertiarum; & vt duæ tertiæ partes ipſius ADE, ad quinque tertias partes ipſius GHI, ita etiam ſint, iuxta demonſtrata in propoſ. 22. libr. 5. element. ſex tertiæ partes ipſius ADE, (videlicet duæ baſes Octaedri triplum duarum tertiarum vnius efficientes, quia ſex tertias continent,) ad quindecim tertias partes ipſius GHI; (nimirum ad quinque baſes Icoſaedri, triplum quinque tertiarum vnius baſis continentes, quandoquidem quindecim tertias comprehendunt.) Erunt etiam duo illa priſmata Octaedro æqualia, vtpote Octaedrum ipſum, ad hæc duo priſmata Icoſaedro æqualia, videlicet ad ipſummet Icoſaedrum, vt duæ baſes Octaedri ad quinque Icoſaedri baſes. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XXVII.

Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum, proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus Cubi, in eadem cum Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri, ad rectam lineam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

SVppoſitio. Aſſumatur Icoſaedrum ABCH; & recta DE, centra D, E, duarum eius baſium oppoſitarum reuinciens; & diameter eius ſit AC; & recta F latus Icoſaedri ipſius; & G recta latus Cubi in eadem ſphæra cum iſto Icoſaedro inſcripti. Dico proportionem huius Icoſaedri ABCH, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum, componi ex proportione F lateris Icoſaedri huius, ad G latus Cubi; & ex proportione triplicata diametri AC, ad rectam DE reuincientem centra D, E, prædicta baſium oppoſitarum. Fig. 375.

Demonſtratio. Conſtat ex oſtenſis in propoſit. 5. libr. 2. Hypſicl. Dodecaedrum in Icoſaedro deſcriptum collocare ſuos angulos in centris baſium Icoſaedri, ideoque angulos oppoſitos in centris oppoſitarum baſium: ergo recta DE erit diameter Dodecaedri in Icoſaedro ABCH deſcripti, vtpote coniugans duos eius angulos oppoſitos D, E, applicatos in centris D, E, baſium oppoſitarum Icoſaedri. In hiſce tribus magnitudinibus, Icoſaedro ABCH, Dodecaedro diametri AC, in eadem ſphæra in qua Icoſaedrum deſcriptum, vnde etiam ipſa AC erit diameter Icoſaedri, & Dodecaedro diametri DE inſcripto in ipſo Icoſaedro: proportio primæ magnitudinis Icoſaedri ABCH, ad tertiam Dodecaedrum diametri DE, componetur iuxta defin. 5. libr. 6. element. ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam; videlicet ex proportionibus Icoſaedri ABCH ad Dodecaedrum diametri AC in eadem ſphæra cum ipſo Icoſaedro deſcriptum, & Dodecaedri eiuſdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri DE in Icoſaedro ABCH deſcriptum. Cùm ergo per propoſit. 11. libr. 1. Hypſicl. Dodecaedrum diametri AC ad Icoſaedrum ABCH eiuſdem diametri AC, ſit vt G latus Cubi ad F latus Icoſaedri; erit iuxta corollar. propoſit. 4. libr. 5. element. conuertendo, Icoſaedrum ABCH ad Dodecaedrum diametri AC, vt F latus Icoſaedri ad G latus Cubi: igitur Icoſaedrum ABCH ad Dodecaedrum diametri AC in eadem ſphæra deſcriptum, vt F latus Icoſaedri ad G latus

G latus Cubi; ſed Dodecaedrum eiuſdem diametri AC ad Dodecaedrum diametri DE in ipſo Icoſaedro ABCH deſcriptum, proportionem habet triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, hoc eſt ad rectam centra baſium prædicta Icoſaedri oppoſitarum nectentem, iuxta corollar. propoſit. 17. libr. 12. element. Ergo proportio Icoſaedri ABCH ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum diametri DE, componetur quoque ex proportione F lateris Icoſaedri, ad G latus Cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri AC ad rectam DE, quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XXVIII.

Dodecaedrũ excedit Cubum ſibi inſcriptum, parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato Cubi deficit rectangulo contento ſub latere Cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris Cubi: At verò altitudo ab altitudine, ſiue latere Cubi, minore ſegmẽto eius lineæ, quæ dimidiati lateris Cubi, ſegmentum minus exiſtit.

Fig. 376. Conſtructionis pars prima. Demonſtrauimus in propoſit. 8. libr. 2. Hypſic. quatuor latera baſeos Cubi in Dodecaedro deſcripti, ſubtendere quatuor angulos baſium quatuor Dodecaedri ad vnum latus concurrentium: aſſumantur igitur quatuor huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundùm latus commune AB; alia verò duo AEFGH, BKLMC, ſecundùm angulos EAH, CBK. Porrò hiſce pentagonis inſcriptum ſit quadratum Cubi ECKH, ſuper quo conſiſtat pars Dodecaedri Cubum circumſcribentis, ſolidũ videlicet CBKHAE, conſtãs quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH, quorum duo CBK, EAH, triangula ſunt æqualia, per 4 propoſ. libr. 1. elem. nam latera pentagoni BC, BK, ſunt æqualia lateribus pentagoni AE, AH, anguloſque pentagonorum continent æquales EAH, CBK: Duo autem trapezia ABCE, ABKH, æqualia ſic probabitur; nam pentagona ABCDE, ABKIH ſunt æqualia ex natura Dodecaedri, & CDE, HIK triangula æqualia per 4. propoſ. libr. 1. elem. ob latera æqualia, anguloſque ab eis contentos æquales, ab dictis pentagonis ſublata, relinquent dicta Trapezia æqualia; Quintum denique eſt baſis Cubi inſcripti ECKH. ſimili artificio alia quinque ſolida huic ſimilia, & æqualia iuxta 10. def. libr. 11. elem. comperientur, ſuper reliquis baſibus Cubi: ita vt Dodecaedrum ſuperet Cubum ſibi inſcriptum, ſex huiuſmodi ſolidis. Dico ergo hunc totum exceſſum, è ſex illis ſolidis Cubum inſcriptùm circumſtantibus conſtans, æqualẽ eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit ab CEHK baſe Cubi, rectangulo contento ſub latere Cubi CK, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris Cubi; at verò altitudo ab altitudine ſeu latere Cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris Cubi ſegmentum minus exiſtit.

Reliqua pars conſtructionis. Secentur per propoſ. 10. libr. 1. elem. bifariàm, duo latera EH, CK, in N & O, ducatur recta NO, quæ parallela erit lateri AB pentagoni, ad quam cadunt rectæ perpendiculares demittendæ AP, BQ, per propoſ. 11. libr. 11. elem. ad planum EK, iuxta illa quæ probauimus in propoſ. 17. libr. 13. elem. (nam rectæ NO, AB, AP, BQ, iſtæ exprimunt lineas rectas LN, VX, VR, figuræ propoſ. 17. cit.) erit vtraque recta AP, BQ, maius ſegmentum lateris Cubi NO, vel HK, & vtraque dicta AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris Cubi, vti conſtat ex dictis in propoſ. citat. 17. Quare ſi per P, Q, rectæ tranſmittantur lineæ RS, TV, parallelæ rectis EH, CK, per propoſ. 31. libr. 1. element. erunt etiam TR, SV, maiora ſegmenta laterum EC, HK; & ideò ER, CT, ſimul, & HS, KV ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. Traiectis præterea rectis AR, AS, BT, BV, fient pyramides duæ ERSHA, CTVKB, quæ per corollar. propoſ. 6. libr. 12. erunt inter ſe æquales, ob earum baſes ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales; exiſtentque extra ſolidum ABTVSR. Quia verò per propoſ. 33. lib. 1. element. recta AS eſt parallela rectæ BV & æqualis, tùm AR ipſi BT, quia coniungunt rectas æquales & parallelas, AB, SV, T; parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV, per propoſit. 15. libr. 11. elem. & quia

eadem

eadem triangula latera obtinent æqualia relatiuè, & baſes æquales, ipſa erunt æqualia, per coroll. prop. 8. lib. 1. elem. Igitur ſolidum ABTVSR contentum ſub duobus planis aduerſis triangularibus, æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, priſma erit, ex def. 13. lib. 11.

Cùm igitur rectæ HS, KV, minus ſegmentum efficiant lateris HK, fiat per prop. 3. lib. 1. elem. illis æqualis VX, dupla videlicet vtriuſque HS, KV; & ipſius VX, minoris ſegmenti lateris HK, duas tertias partes contineat VY, tertia verò pars ſit XY: ducanturque XZ, Ya, rectæ parallelæ ipſi EH, vel KC, per prop. 31. lib. 1. elem. quæ erunt parallelæ inter ſe per 30. prop. lib eiuſdem. Quia verò pyramides ERSHA, CTVKB, æquales ſunt probatæ, vtriuſque verò earum dupla eſt pyramis ſupra baſim TX, & ſub eadem altitudine PA, vel QB, poſita, per prop. 6. lib. 12. elem. quod & baſis TX dupla ſit baſeos CV vel RA; æqualis erit pyramis TVXZB vtrique pyramidi ERSHA, CTVKB ſimul: ſed pyramis TVXZB, continet priſmatis duas tertias, cuius baſis eadem TX, & altitudo eadem QB, vertex verò linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ ſit æqualis ipſi VX, vt conſtat ex coroll. noſtro primo ad prop. 7. lib. 12. elem. etiam eiuſdem priſmatis, cuius baſis TX, & altitudo QB, vertex pars rectæ AB æqualis ipſi VX, duas tertias partes amplectitur priſma cuius baſis TY, & altitudo eadē QB, vertex autem pars rectæ AB æqualis ipſi VY, per coroll. noſtrum ad prop. 25. lib. 11. elem. eò quòd per 1. prop. lib. 6. elem. & baſis TY duas tertias partes comprehendat baſeos TX: ergo & priſma cuius baſis TY, & altitudo BQ, vertex verò pars rectæ AB, æqualis ipſi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSAH, CTVKB. Quare ſi hoc priſma adijciatur priſmati ABTVSR, fiet priſma æquale ſolido CBKHAE, habens baſim rectangulum contentum ſub latere cubi TV, & ſub recta compoſita ex VY, duas tertias partes minoris ſegmenti VX continente, & ex VS maiore ſegmento, ideoque à baſe cubi deficiente, rectangulo aX, contento ſub latere cubi aY, & ſub XY tertia parte minoris ſegmenti VX. Eodem modo indagabimus alia ſimilia quinque priſmata æqualia, & proximè dicto priſmati, & reliquis quinque ſolidis ſupra reliquas quinque Cubi baſes conſiſtentibus. Ergo ſex iſtiuſmodi priſmata æqualia erunt ſex illis ſolidis, exceſſui videlicet Dodecaedri ſupra Cubum ſibi inſcriptum. Quia verò duo quælibet priſmata ex illis inter ſe aptata, efficiunt parallelepipedum eiuſdem altitudinis; conflabuntur ex ſex illis priſmatis, tria parallelepipeda ſub eadem altitudine QB, quæ æqualis eſt ſemiſſi lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris Cubi, & ſupra baſes à baſe Cubi deficientes ſingulas, rectangulo contento ſub latere Cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris Cubi; ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter ſe aptatis, exurget parallelepipedum exceſſui eidē Dodecaedri ſupra Cubum ſibi inſcriptum æquale, cuius baſis à baſe Cubi deficit rectangulo contento ſub latere Cubi & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris Cubi; altitudo verò æqualis tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepidorum, id eſt altitudini QB, quæ fuit ęqualis oſtenſa dimidio maioris ſegmenti lateris Cubi, ter ſumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine ſeu latere Cubi deficere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris Cubi ſegmentum minus exiſtit.

Latus CK Cubi diuidatur per prop. 30. lib. 6. elem. extrema & media ratione in puncto b; tùm per prop. 10. lib. 1. elem. maius eius ſegmentum Cb, biſariàm in g; & minus etiam ſegmentum bK, biſariam in d; tùm per prop. 3. lib. cit. 1. detrahatur be, æqualis ipſi bg ſeu Cg, ita vt Cg vel gb vel be, dimidia pars maioris ſegmenti Cb, æqualis ſit ipſi QB, & Ce, toti altitudini prædicti parallelepipedi. Quod autem poſſit ex minore ſegmento bK, detrahi recta æqualis ipſi Cg, patet; nam bK maior eſt recta quàm dimidium maioris ſegmenti Cb: cùm enim ſit vt CK ad Cb ita Cb ad bK; ſit autē CK minor quàm dupla ipſius Cb, quia Cb eſt eius ſegmentum maius; erit quoque Cb minor quàm dupla ipſius bK; id eſt erit bK maior quàm dimidium ipſius Cb, per prop. 14. lib. 5. elem. Quia igitur vt tota CK ad maius ſegmentum Cb, ita maius ſegmentum Cb, ad minus bK; erit etiam per prop. 15. lib. 5. elem. vt CO dimidia ipſius CK ad Cg vel be ſemiſſem ipſius Cb; ita Cg vel be, ad bd ſemiſſem ipſius bK: quare ſi CO ſecetur extrema ac media ratione, erit maius ſegmentum Cg, vel be, & minus bd; ideoque & bd minus ſegmentum ſecabit be maius ſegmentum extrema & media ratione, ſicuti probauimus in prop. 5. lib. 13. elem. eritque maius ſegmentum bd, minus autem de: ideoque inſuper recta de minus ſegmentum diuidet rectam dK maiori ſegmento bd æqualem, extrema & media ratione, minuſque ſegmentum erit eK. Deficit ergo Ce altitudo prædicti parallelepipedi ab altudine

ſeu latere Cubi CK, minore ſegmento EK, rectæ DK, vel ſibi æqualis rectæ BD, quæ ſemiſſis lateris Cubi fuit ſegmentum minus probata. Manifeſtum igitur eſt baſem parallelepipedi quo Dodecaedrum excedit ſibi inſcriptum Cubum, à baſe Cubi deficere rectangulo contento ſub latere Cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris Cubi; altitudinem verò ab altitudine Cubi deficere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris Cubi ſegmentum minus exiſtit. Quare Dodecaedrum excedit Cubum &c, quod erat oſtendendum.

## COROLLARIVM.

*Dodecaedrum à duplo Cubi ſibi inſcripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri Cubi eſt æqualis; latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris Cubi; altitudo denique à latere Cubi deficit minore ſegmento eius lineæ quæ dimidiati lateris Cubi minus ſegmentum exiſtit: Alterius verò & longitudo & latitudo, lateri Cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ quæ dimidiati lateris Cubi ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini ſiue lateri Cubi ſint æquales.*

SI enim primum parallelepipedum adijciatur illi parallelepipedo quò cubum à Dodecaedro excedi oſtendimus; efficietur parallelepidum cuius & longitudo & latitudo lateri Cubi eſt æqualis, baſim videlicet eandem obtinens quam Cubus; altitudo verò à latere Cubi deficit minore ſegmento eius lineæ quæ dimidiati lateris Cubi minus eſt ſegmentum, hoc eſt altitudine poſterioris parallelepipedi. Igitur ſi facto iam parallelepipedo addatur poſterius parallelepipedum; reſultabit parallelepipedum æquale Cubo intra Dodecaedrum deſcripto; ſiquidem baſis & altitudo huius parallelepipedi, æqualis eſt baſi & altitudini Cubi. Quare vt Dodecaedrum Cubi inſcripti duplum ſit, deſunt prædicta duo parallelepipeda; cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſupra Cubum inſcriptum, conſtituatur parallelepipedum Cubo inſcripto æquale, imo alter Cubus vti probatum eſt.

## COROLLARIVM NOSTRVM.

*Minus ſegmentum rectæ lineæ ſectæ extrema & media ratione, maius eſt dimidio maioris eiuſdem rectæ ſegmenti.*

## PROPOSITIO XXIX.

Dodecaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris Cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum Cubo deſcripti.

SVppoſitio. Diameter AC ſit Dodecaedri ABC, & recta DE, connectens contra D, E, baſium oppoſitarum: tum F latus Cubi, & G latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum. Dico proportionem Dodecaedri ABC ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum eſſe compoſitam ex proportione triplicata proportionis diametri AC ad rectam DE, & ex proportione F lateris Cubi ad G latus Icoſaedri. Fig. 377.

Demonſtratio. Quandoquidem anguli Icoſaedri adhærent cētris baſium Dodecaedri cui inſcribitur, ideoque anguli oppoſiti in cētris baſium oppoſitarum exiſtant; manifeſtum eſt rectam DE vinciente centra duarum baſium oppoſitarum Dodecaedri, eſſe diametrum Icoſaedri huius. Quare Dodecaedrum cuius diameter DE in eadem ſphæra cum Icoſaedro intra Dodecaedrum ABC ſito deſcriptum erit, eò quòd eandē DE diametrū obtineant. Concipiantur autem tres quantitates, Dodecaedrum ABC, Dodecaedrum diametri DE, & Icoſaedrum eiuſdem diametri DE intra prædictū ABC Dodecaedrum deſcriptū: Proportio Dodecaedri ABC ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum componetur per def. 5. lib. 6. elem. ex proportione Dodecaedri ABC ad Dodecaedrum ſub diametro DE, & ex proportione Dodecaedri ex diametro DE ad Icoſaedrum in Dodecaedro ABC deſcriptum. Cùm igitur Dodecaedrum ABC ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC ad diametrum DE, per coroll. propoſ. 17. lib. 12. elem. Dodecaedrum verò diametri DE ad Icoſaedrum eiuſdem diametri DE inſcriptum in Dodecaedro ABC, proportionem habeat quam F latus Cubi ad G latus Icoſaedri, iuxta prop. 11. lib. 1. Hypſ.

mani-

manifeſtum eſt proportionem Dodecaedri ABC ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum,& cuius ſit diameter DE, componi etiam ex triplicata proportione proportionis diametri AC ad diametrum DE, rectam nimirum centra oppoſitarum Dodecaedri baſium revincientem, & ex proportione F lateris Cubi ad G latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum Cubo deſcripti, quod erat concludendũ.

## PROPOSITIO XXX.

Dodecaedrum Pyramidis in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri Cubi in eadẽ pyramide deſcripti, æqualis eſt; latitudo verò tertiæ parti minoris ſegmẽti lateris eiuſdẽ Cubi; altitudo denique à latere eiuſdẽ Cubi, deficit minore ſegmento eius lineæ quæ dimidiati lateris Cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit: Alterius autem & longitudo & latitudo lateri Cubi prædicti eſt æqualis; altitudo verò minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris Cubi eiuſdem ſegmentum minus exiſtit: ita vt amborum altitudines ſimul, altitudini ſiue lateri eiuſdem Cubi ſint æquales.

DEmonſtratio. Si Cubus in Dodecaedro intra pyramidem deſcripto inſcribatur, hic idem Cubus in eadem pyramide eſt deſcriptus, per coroll. prop. vltimæ lib. 2. Hypſ. Cubus autem pyramidis intra quam deſcribitur nona pars eſt, quandoquidem per 25. prop. huius libri, pyramis ſibi inſcripti Cubi ſit noncupla: ſit ergo vt magnitudo dicti Cubi dupla contineat duas nonas partes pyramidis ambientis Dodecaedrum ſiue Cubum: Quare cùm per coroll. prop. 28. lib. huius, Dodecaedrum Cubi ſibi inſcripti duplum ſit, minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta in hac præſenti propoſ. liquidò conſtat Dodecaedrum Pyramidi inſcriptum duas nonas partes continere ipſius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; ita vt ſi dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, reſultet magnitudo duas nonas partes pyramidis continens. Igitur Dodecaedrum Pyramidis &c. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XXXI.

Octaedrum excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri; altitudo verò maius ſegmentum ſemidiametri Octaedri extrema & media ratione ſectæ.

COnſulatur figura & conſtructio propoſitionis 16. lib. 2. Hypſiclis, videlicet Octaedrum ABCDEF, cui inſcriptum eſt Icoſaedrum compoſitum ſeu contentum viginti triangulis IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNP, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo poſtrema, octo baſibus Octaedri ſunt impoſita, ſecantia nimirum omnia eius latera extrema & media ratione. Tùm rectam IT perpendicularem ad BD æqualem eſſe maiori ſegmento XY, ſemidiametri AX, oſtendimus in prædicta propoſ. citata his autem poſitis Dico Octaedrum ABCDEF excedere Icoſaedrum ſibi inſcriptum, parallelepipedo cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri QR, altitudo verò IT, maius ſegmentum ſemidiametri AX. Fig. 36.

Demonſtratio. Cùm enim in baſibus quatuor Octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulum ſolidum Octaedri efficientibus, poſitæ ſint quatuor baſes Icoſaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR, remanebunt iuxta ſolidum angulum D, in eiſdem quatuor baſibus Octaedri, quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus ſi addantur duo triangula Icoſaedri QIR, KQR, & commune triangulum DQR, reſultabunt duæ pyramides ſuper baſim communem DQR, nimirum IDQR, KDQR, æquales inter ſe, per coroll. prop. 5. lib. 12. elem. quia earum altitudo eſt recta eadem IT, maius nimirum ſegmentum ſemidiametri Octaedri (quemadmodum enim AX ſecta eſt ab

recta GI in Y, extrema & media ratione, ita quoque ſecta eſt CX ab recto HK in Z; quare ſi ex K ad BD tranſmittatur perpendicularis, altitudo videlicet pyramidis KDQR, erit ipſa æqualis rectæ ZX, per prop. 34. lib. 1. elem. maiori ſegmento ſemidiametri CX, id eſt ipſi IT.) quæ pyramides extra Icoſaedrum in Octaedro deſcriptum conſiſtunt. Simili ratione prope angulos quinque reliquos Octaedri conſtituentur binæ pyramides, & inter ſe, & dictis duabus æquales extra prædictum Icoſaedrum; ita vt Octaedrum excedat Icoſaedrum ſibi inſcriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Praeterea cùm rectæ DQ, DR ſint æquales, minora nimirum ſegmenra laterum Octaedri, angulumque comprehendant rectum, erit recta QR diameter illius quadrati, cuius dimidium eſt, triangulum DQR, rectangulum; & quadratum rectæ QR erit per prop. 37. lib. 1. elem. coroll. noſtrum, duplum quadrati lateris DQ; ac proinde quadruplum trianguli DQR: Ergo priſma ſeu parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ QR, altitudo IT, triplum exiſtens, quadruplum quoque ert priſmatis, cuius baſis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, prout demonſtrauimus in prop. 7. lib. 12. elem. Priſma verò cuius baſis DQR & altitudo IT, triplum ex coroll. prop. cit. pyramidis IDQR, æquale eſt tribus pyramidibus earum duodecim quas circa Icoſaedrum exiſtere innuimus. Priſma igitur vel parallelepipedum cuius baſis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque eſt trium illarum pyramidum; Quamobrem cùm earundem trium pyramidũ quadruplæ ſint omnes duodecim pyramides circumambientes Icoſaedrum: æquale quoque erit priſma ſeu parallelepipedum, cuius baſis quadratum QR rectæ, lateris nimirem Icoſaedri, & altitudo IT, maius ſegmentum ſemidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, id eſt exceſſui Octaedri ſupra Icoſaedrum ſibi inſcriptum: ac ideo Octaedrum ſuperabit Icoſaedrum dicto priſmate ſeu parallelepipedo. Octaedrum igitur excedit &c. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM.

*Pyramis excedit duplum Icoſaedri ſibi inſcripti, parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò recta linea biſarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri coniungens.*

QVoniam enim ex demonſtratione prop. 19. lib. 2. Hypſ. conſtat, ſi Pyramidi Octaedrum, & huic Octaedro Icoſaedrum inſcribatur, Icoſaedrum eſſe eidem Pyramidi inſcriptum; Octaedrum autem ſuperat Icoſaedrum ſibi inſcriptum, parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, nempe rectæ QR, altitudo autem maius ſegmenrum ſemidiametri Octaedri, recta nimirum TI, vel YX, per hanc prop. 31. efficitur vt Octaedrum bis ſumptum, videlicet pyramis cui inſcribitur (eò quòd per prop. 21. lib. huius, Pyramis dupla ſit ſibi inſcripti Octaedri) excedat idem Icoſaedrum in Octaedro, & proinde in pyramide deſcriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo cuius baſis idem quadratum lateris Icoſaedri, altitudo autem recta YZ, nectens biſarias ſectiones laterum Icoſaedri oppoſitorum GI, HK. Iſtud enim parallelepipedum illius duplum eſt, prout demonſtrauimus in coroll. ad propoſ. 14. libr. 12. elem. quandoquidem altitudines duplam habent propoſitionem. Igitur hoc eodem parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo autem recta linea biſarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri reuinciens, pyramis duplum Icoſaedri ſibi inſcripti excedit.

COM-

# COMMENTARIVS IN PROCLI GEOMETRICAS PROPOSITIONES DECERPTAS EX LIBRIS SVIS TERTIO ET QVARTO

## In librum primum Elementorum Geometricorum Euclidis.

### PROPOSITIO I.

Non omnis angulus æqualis angulo recto rectilineo, eſt rectus; ſed ſi fuerit rectilineus angulus æqualis angulo recto, rectus etiam erit. ex libro tertio.

fig. 378. HAnc propoſitionem affert Proclus ex Pappo, vt oſtendat ax.12.lib.1. Euclidis, non conuerti. Hoc eſt ſi omnes anguli recti ſint æquales inter ſe; non omnes angulos æquales rectis, eſſe rectos.

Suppoſitio. Datus ſit angulus rectilineus rectus ABC: Dico non omnem angulum æqualem angulo illi recto rectilineo ABC eſſe rectum: ſed ſi fuerit rectilineus angulus quicumque æqualis angulo illi recto, eſſe rectum.

Conſtructio. Per prop. 3. lib. 1. elem. ſumantur de lateribus anguli dati recti rectilinei ABC, portiones æquales BA, BC; quæ bifariàm ſecentur per prop. 10. eiuſdem lib.1. illa in F, hæc in G; tùm centris F, & G, ſemicirculi deſcribantur ADB, BEC, vnus extra rectum angulum datum, alter intra ipſum: reſultabit angulus DBE factus ab duabus ſemicircularibus lineis, vel duobus arcubus, curuilineus, qui erit æqualis angulo ABC recto rectilineo; & tamen non erit rectus. Producantur duæ rectæ AB, BC, vltra B, in H & K; & perficiatur circulus centro G deſcriptus, intervallo autem GB, cuius ſemicirculus BEC, ſecabat angulum rectum datum ABC rectilineum.

Demonſtratio. Inprimis quia per conſtructionem duæ rectæ BA, BC, ſunt æquales, erunt earum ſemiſſes BF, BG, æquales per 7. ax. lib. 1. elem. vnde circuli facti ſub illis tanquam ſemidiametris, erunt æquales per def. 1. lib. 3. elem. ergo eorundem ſemi-

 circuli

circuli ADB, BEC, BIC, erunt æquales per cit. ax. lib. 1. ſeptimum. Et quia arcus ADB, BEC, ſunt æquales, vtpote ſemicircumferentiæ arcuales circulorum æqualium, tùm rectæ BA, BC; ſi ſuperponantur inuicem tàm illæ ſemicircumferentiæ, quàm rectæ, vti oportet; congruent, per 9. ax. lib. 1. elem. ideoque totus ſemicirculus ADB, toti ſemicirculo BEC; & anguli illorum ſemicirculorum etiam congruent, ideoque æquales per idem axioma 9. Ergo ſi æqualibus angulis DBA, EBC, ſi addatur communis angulus ABE, reſultabunt per. 2. ax. lib. 1. duo anguli æquales DBE curuilineus effectus ab duabus ſemicircumferentijs circulorum æqualium ad inuicem inclinatis, & rectilineus ABC rectus: & ſic habemus angulum curuilineum æqualem angulo recto rectilineo. Sed hunc angulum curuilineum DBE probo non poſſe eſſe rectum. Recta ABH cùm ſit perpendicularis diametro CB circuli EBIC, in eiuſdem diametri extremo B, circulum ipſum continget, per coroll. prop. 16. lib. 3. ſimili ratione recta KBC perpendicularis diametro AFB, circuli ADB, in B extremo dictæ diametri, erit contingens circulum ADB: quare anguli DBK, FBE, HBI, erunt anguli contingentiæ vel contactus, per def. 18. lib. 3. elem. Et quia ſunt per def. 10. lib. 1. elem. duo anguli ABK, ABC, recti; & per prop. 15. eiuſdem libri, anguli KBH, CBH, illis æquales, etiam recti; erunt illi quatuor anguli recti, æquales inter ſe per ax. 12. eiuſdem lib. 1. Ergo ſi ab angulis ABK, CBC, ABH, æqualibus, detrahantur anguli æquales oſtenſi DBA, EBC, IBC, ſemicirculorum æqualium, proprij à proprijs; relinquentur per 3. ax. lib. 1. elem. anguli contactus prædicti æquales inter ſe, DBK, ABE, HBI. Iam verò ſi angulus DBE ſit rectus, erit etiam alter DBI deinceps ad arcum DBI, inſiſtentem circumferentiæ EBIC, etiam rectus, ex ratione vniuerſali angulorum rectorum qui fiunt ab inſiſtente linea alteri lineæ, efficienteque angulos deinceps æquales: quare angulus DBI, erit æqualis angulo DBE; & quia angulus ABC rectus rectilineus oſtenſus eſt æqualis angulo DBE, erunt per 1. ax. lib. 1. elem. anguli DBI, ABC æquales; & quia per prop. 15. cit. lib. 1. angulus KBH eſt æqualis angulo ABC; erunt per idem axioma 1. cit. anguli DBI, KBH, æquales; totum & pars, contra axioma 8. ax. lib. 1. elem. abſurdum hoc manifeſtam facit falſitatē anguli DBC poſiti recti: non igitur erit rectus, quod erat demonſtrandum.

Sed iam vltimum propoſitum explicemus. Sit angulus ACK rectilineus æqualis angulo recto rectilineo ABC; dico angulum ABK eſſe rectum. Cùm omnis angulus rectilineus ſit vel rectus, vel minor recto rectilineo, vel maior illo: Neutrum ex his duobus poſtremis affirmari poteſt de angulo ABK; alioqui pars & totum eſſent æqualia contra cit. 8. ax. lib. 1. elem. nimirum angulus ABK acutus aut obtuſus, id eſt minor vel maior recto, poſitus æqualis angulo recto rectilineo ABC, eſſent æquales. Supereſt igitur vt ſit rectus angulus rectilineus ABK, datus æqualis angulo recto ABC rectilineo. probauimus igitur intentum.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I.

*Anguli ſemicirculorum æqualium ſunt æquales inter ſe.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I I.

*Anguli contactus in circulis æqualibus ſunt æquales inter ſe mixtilinei ex linea recta, & circumferentia.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I I I.

*Proponi poteſt ſub biſce terminis hæc propoſitio. Dari poteſt angulus curuilineus æqualis angulo recto rectilineo.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I V.

*Exhiberi poteſt Angulus planus non rectus, æqualis angulo rectilineo recto.*

## COROLLARIVM NOSTRVM

## V.

*Angulus DBE factus ab ſemicircumferentijs ADB, BEC; non eſt rectus.* fig. 378.

PRimum, ſecundum, & quintum inter demonſtrandum propoſitionem præſentem, declarata ſunt.

Tertium verò probabitur aſſumendo angulum rectum ABC rectilineum; & conſtruendo eadem quæ in iſta propoſitione; & aſſerendo

aſſerendo angulum factum DBE curuilineum eſſe æqualem angulo rectilineo recto ABC quod eodem modo probabitur ſicuti fecimus in demonſtratione allata ad hanc propoſ.

Quartum verò probabitur aſſumendo eadem quæ modò diximus in tertio præcedente corollario,& conſtruendo eadē etiam: Aſſeretur enim angulus curuilineus DBE planus ex conſtructione, & non rectus, ſed æqualis angulo rectilineo ABC. Quæ omnia demonſtrata ſunt in propoſitione præſenti.

## PROPOSITIO II.

Exhiberi poteſt angulus curuilineus factus ex duobus ſemicirculorum æqualium arcubus, æqualis angulo rectilineo acuto. ex libro 3.

*Fig.379.* Conſtructio. Sit Angulus acutus rectilineus ABC; ſumptiſque BA, BC, æqualibus rectis iuxta prop. 3 lib. 1. elem. & bifariàm diuiſis in D,& E, per prop. 10. lib. cit. deſcriptiſque ſemicirculis AFB, BGC, ex D, & E, vt centris, illo extra angulum ABC datum, iſto verſus illum; qui erunt æquales inter ſe per 1. def. lib. 3. elem. eò quòd per 7. ax. lib. 1. ſemidiametri EB, DB, ſint æquales, vtpote ſemiſſes æqualium ſumptarum rectarum BA, BC; Porrò ſemicircumferentia BGC deſcripta verſus angulum ABC acutum rectilineum ſecabit ipſam rectam AB, ita vt etiam ipſa recta AB ipſam ſecet, iuxta prop. 16. lib. 3. elem. nam ſemicirculi GBC, maior eſt quolibet angulo acuto rectilineo, ideoque acuto ipſo ABC rectilineo. Dico autem angulum curuilineum FBG formatum ex duobus FB,GB, arcubus ſemicirculorum factorum, inclinatis ad inuicem, eſſe æqualem angulo rectilineo acuto ABC.

Demonſtratio. Per coroll. noſtrum primum propoſitionis præcedentis, Anguli FBA, GBC, ſemicirculorum æqualium oſtenſorum AFB, CGB, ſunt æquales inter ſe: ergo ſi ex illis detraxerimus angulum communem HBE mixtilineum ex arcu HB, & chorda BE, relinquentur per 3. ax. lib. 1. elem. anguli æquales FBG, ABC, curuilineus prædictus, & rectilineus acutus ABC, quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO III.

Exhibere poteſt angulus curuilineus factus ex duobus ſemicirculorum æqualium arcubus, æqualis angulo rectilineo obtuſo. ex libro 3.

Conſtructio ſit eadem quæ in præcedente propoſitione 2. erunt vt ibi ſemicirculi AFB, CGB, æquales, ideoque anguli FBA, GBC, ſemicirculorum illorum æqualium æquales per 1. corollar. noſtrum ad prop. 1. Solùm oportet oſtendere rectam AB non ſecare angulum CBG ſemicirculi facti verſus angulum ABC obtuſum rectilineum. *Fig.380.* Ab extremo BC, ſemidiametri CB, excitetur rectalinea BH ad angulos rectos ipſi CB, ſeu ipſi perpendicularis; hic angulus rectus HBC, maior erit angulo GBC ſemicirculi CBG, per coroll. noſtrum 2. ad prop. 16. lib. 3. elem. ſed angulus ABC obtuſus maior eſt angulo recto HBC; ergo per 1. ax. lib. 1. elem. angulus ABC obtuſus multò maior erit angulo GBC ſemicirculi; ideoque continebit; ac proinde ipſum non diuidet recta AB. Dico autem angulum curuilineum FBG formatum ab duabus ſemicircumferentijs AFB, CGB, ſemicirculorum æqualium prædictorum, eſſe æqualem angulo ABC rectilineo obtuſo.

Demonſtratio. Cùm anguli FBA, GBC, ſemicirculorum æqualium factorum ſint oſtenſi æquales inter ſe: ſi addatur illis communis angulus ABG mixtilineus; fient per 2. ax. lib. 1. anguli æquales FBG, ABC, prædicti. quod erat concludendum.

## COROLLARIVM NOSTRVM I.

*Ad præcedentes tres propoſitiones. Anguli curuilinei, & rectilinei ipſarum trium propoſitionum præcedentium, ſunt propriè comparabiles inter ſe, iuxta def. 5. lib. 5. elementorum.*

Demonſtratio in angulo rectilineo recto ABC primæ propoſitionis, & altero illi æquali curuilineo DBE, aſſumpta eadem figura cit. 1. prop. diuiſaque bifariàm L, recta BK, æquali cuilibet aliarum BA, BC; deſcripto ex L cētro, ſemicirculo KMB verſus partem inferiorem rectæ KB, qui erit per def. 1. lib. 3. elem. æqualis factis alijs ſemi- *Fig.378.*

circulis, ob æquales ſemidiametros BL, BF, BG, nimirum ſemiſſes æqualium rectarum BC, BA, BK, ſumptarum. Inprimis duo anguli recti ABC, ABK, rectilinei continebunt angulum DBE curuilineum, illumque excedent; ergo duplicatus angulus rectus ABC rectilineus excedet curuilineum DBE. Præterea MBE angulus curuilineus factus ab duabus ſemicircumferentijs KMB, CEB, non in directum iacentibus, alioqui vnum circulum efficerent cùm ſint duo diuerſi, ob diuerſas duas diametros commune extremum B habentes, continet duos angulos DBM, DBE, æquales, ſingulos compoſitos ex angulis ſemicirculorum oſtenſorum æqualium æqualibus per coroll. noſtrum 1. ad prop. 1. & mixtilineis ABE, KAD, contactus, æqualibus, iuxta corollarium noſtrum 2. ad cit. prop. 1. continetque ille angulus MBE curuilineus angulum ABK rectum rectilineum æqualem ipſi ABC rectilineo recto angulo iuxta ax. 12. lib. 1. elem. ergo excedet angulus curuilineus MBE, rectum rectilineum angulum ABC: quare etiam angulus DBE duplicatus curuilineuſque excedet rectilineum ABC, rectum. Cùm igitur demonſtrauerimus vtroſque angulos DBE, ABC, multiplicatos ſe inuicem excedere; erunt per def. 5. lib. 5. elem. propriè proportionales & incomparabiles.

Fig. 379. Demonſtremus idem in angulo ABC rectilineo acuto, & curuilineo FBG illi æquali oſtenſo in ſecunda prop. aſſumendo eandem figuram, cui iſtam conſtructionem ſuperaddemus. Producta recta CB vltra B, ſumatur BL æqualis ipſi BA, vel BC, per 3. prop. lib. 1. elem. & per 23. prop. libri eiuſdem, ad punctum B, rectæ AB, ad partes BL, fiat angulus ABI æqualis angulo ABC rectilineo acuto; & ad punctum B, alius angulus IBK æqualis eidem angulo ABC; & ſic ſemper fiat donec recta aliqua ſit infra rectam CBL vt & recta BP; erunt per 1. ax. lib. 1. elem. iſti anguli facti rectilinei, æquales inter ſe, & acuto ABC rectilineo; tùm ſumptis BI, BK, BP, infra dictam rectam CBL, rectis æqualibus ipſi AB, vel CB, diuidantur bifariam in M, S, Q, per 10. prop. lib. cit. 1. elem. & factis centris M, S, Q, interuallíſque SB, MB, QB, deſcribantur ſemicirculi INB, KOB, PRB, verſus eandem partem ſemicirculi AFB, qui erit æqualis alijs deſcriptis, per 1. def. lib. 3. eò quòd ſemidiametri illorum ſint æquales, nempe ſemiſſes æqualium rectarum, ideoque anguli ſemicirculorum illorum erunt æquales per 1. coroll. noſtrum ad prop. 1. Iam verò quia RBG angulus curuilineus continet PBK, KBI, rectilineos acutos, ſingulos æquales dato acuto rectilineo ABC; & curuilineos RBO, OBN, NBF, FBG, ſingulos æquales ipſi FBG curuilineo; qui ſinguli curuilinei ſunt æquales dictis acutis rectilineis per 2. prop. erit totus curuilineus RBG multiplex anguli FBG curuilinei, ideoque multiplicatus ipſe FBG curuilineus angulus, excedet rectilineum acutum ABC. Eodem totus rectilineus angulus PBC continens multos acutos angulos rectilineos æquales ipſi rectilineo acuto ABC, & continens curuilineum FBG; hoc eſt multiplicatus angulus acutus rectilineus ABC, excedet curuilineum FBC. Cùm igitur iſti duo anguli ABC rectilineus acutus, & curuilineus FBG, ſe inuicem excedant multiplicati, erunt iuxta def. 5. lib. 5. elem. verè & propriè comparabiles.

Demonſtrabitur idem in angulo rectilineo obtuſo ABC, & FBG curuilineo illi æquali per 3. prop. ſi eadem conſtructio fiat, & applicetur demonſtratio præcedentis caſus. Atque ita explicatum erit corollarium hoc noſtrum. Fig. 380.

## COROLLARIVM NOSTRVM II.

*Poteſt exhiberi angulus curuilineus ex arcubus circulorum æqualium ad inuicem inclinatis; multiplex anguli cuiſuis rectilinei, vel recti, vel acuti, vel obtuſi.*

HOc exhibitum in conſtructionibus & demonſtrationibus corollarij præcedentis noſtri. Oſtendimus enim angulum curuilineum MBE in primæ propoſitionis figura eſſe duplum anguli ABE curuilinei æqualis ipſi angulo recto rectilineo ABC. Fig. 378.

Et in ſecundæ prop. figura curuilineum RBG angulum, eſſe multiplicem, anguli curuilineis FBG æqualis ipſi rectilineo acuto ABC. Fig. 379.

Et in tertiæ prop. figura, angulum curuilineum NBG eſſe multiplicem anguli curuilinei FBG æqualis ipſi obtuſo angulo rectilineo ABC. Fig. 380.

## COROLLARIVM NOSTRVM III.

*Poteſt exhiberi angulus rectilineus multiplex curuilinei conſtantis ex arcubus circulorum æqualium ad inuicem inclinatis.*

Nam

Fig.379. NAm oſtendimus in corollario primo noſtro ad præced. propoſitiones tres PBA angulum rectilineum eſſe multiplicem anguli rectilinei ABC, ideoq́ue anguli curuilinei FBG, illi æqualis, in figura ſecundæ prop. tum angulum KBC verſus partes A, eſſe multiplicem anguli rectilinei ABC, ideoq́ue anguli FBG curuilinei illi æqualis.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## I V.

*Anguli prædicti curuilinei & rectilinei multiplices, non poſſunt eſſe maiores quatuor rectis rectilineis.*

CVm enim fiant rectilinei quibus ſunt æquales curuilinei prædicti, circa idem punctum tàm ſupra rectam vnam, quàm infra illam; & non poſſint eſſe maiores quatuor rectis rectilineis, nam ſunt ſolùm quatuor rectis æquales, per noſtrum coroll. 2. ad. prop. 13. lib. 1. elem manifeſtum eſt propoſitum.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## V.

*Poſſunt exhiberi anguli curuilinei facti ex arcubus circulorum æqualium, multiplices aliorum angulorum huiuſmodi curuilineorum, cum reſtrictione data in corollario præcedente quarto.*

HOc enim factum eſt in conſtructione prçcedẽtis corollarij primi, & demonſtratum. Reſtrictio verò patet ex ipſo corollario præcedente.

## COROLLARIVM NOSTRVM

## V I.

*Non repugnat quantitati curuilineæ vt ſit æqualis, vel maior vel minor reſpectu quantitatis rectilineæ: & contrà.*

SI enim repugnaret quantitati curuilineæ & rectilineæ comparatio æqualitatis, vel maioris inæqualitatis, vel minoris inæqualitatis in genere; repugnaret inferioribus omnibus: ſed in ſuperioribus propoſitionibus manifeſta eſt æqualitas inter curuilineum angulum ſactum ex arcubus circulorum ææqualium, & rectilineum; & in corollarijs noſtris præcedentibus ratio maioris vel minoris inæqualitatis inter illos eoſdem angulos, qui ſunt quantitates vtpote diuiſibiles per ſuas proprias lineas: ergo non repugnat quantitati curuilineæ & rectilineæ in genere, comparatio æqualitatis, & maioris minoriſq́ue inæqualitatis. quod erat oſtendendum.

## PROPOSITIO IV.

Si ad aliquam rectam lineam, & ad eius punctum, duæ rectæ lineæ ad partes diuerſas ducantur, angulos ad verticem ſeu contrapoſitos æquales fecerint: ipſæ rectæ lineæ erunt in directum. ex libro tertio.

HÆc propoſitio fuit corollarium noſtrum 2. ad propoſ. 14. lib. 6. elem. vide ibi eius demonſtrationem.

## PROPOSITIO V.

Tres figuræ planæ rectilineæ inter regulares rectilineas planas; Triangulum æquilaterum, quadratum, & ſexilaterum æquilaterum & æquiangulum, replent ſe ipſis ſpatium, circa vnum punctũ. ex libro tertio.

CVm enim ex coroll. 2. prop. 15. lib. 1. elem. omnes anguli circa vnum punctum rectilinei ſint æquales quatuor rectis; & anguli trianguli æquilateri ſint æquales inter ſe, per coroll. prop. 5. lib. eiuſdem; treſq́ue eius anguli ſint æquales duobus rectis, per prop. 32. eiuſdem lib. & ſinguli illorum ſint æquales alijs quia, ſunt ſinguli vna tertia duorum rectorum, iuxta coroll. 3. prop. 32. lib. 1. elem. manifeſtum ſex huiuſmodi angulos triangulorum ſex æquilaterorum compoſitos ad vnum punctum, eſſe æqualesquatuor rectis: ideoq́ue replere ſpatium circa vnum punctum ſex triangula æquilatera compoſita, ita vt duorum latera confluant in vnum & idem, & ſex anguli verticales in vnum confluant punctum. Confirmatur hoc in ſexilatero æquilatero & æquiangulo, quod per corollarium noſtrum ad prop. 15. lib. 4. elem. reſoluitur in ſex triangula æquilatera & æqualia verticem commu-

communem habentia in centro eius. Cùm igitur anguli ſexilateri æquilateri & æquianguli æquiualeant iuxta illam reſolutionem duobus angulis æqualibus trianguli æquilateri, ſi ad vnum angulum hexagoni huius componatur alius angulus alterius hexagoni huiuſmodi æquilateri & æquianguli, & latus vnum vnius lateri alterius; iam compoſiti erunt æquiualenter quatuor anguli triangulorum æquilaterorum, ſupereritque ſpatium æquiualens duobus alijs angulis trianguli æquilateri, quod replebit alius angulus hexagoni huiuſmodi, cùm illi ſit æqualis: ſexilatera igitur figura, æquilatera & æquiangula ſpatium complebit circa vnum punctum ter repetita; ſicuti ſex triangula æquilatera circa vnum punctum compoſita, lateraque inuicē applicata, replebant. De quadratis figuris breuiore diſcurſu opus eſt ad probādum intentū: cùm enim ſint rectangulę, ſi cōponantur earū latera, & circa vnum punctum earum anguli recti, erunt quatuor recti circa idem punctum, ſpatiū complentes. ſed age oſtendamus.

Quod verò nullæ aliæ figuræ rectilineæ planæ ſint quæ ſpatium circa vnum punctum compleant. Probatur præmittendo iſta lemmata noſtra.

## LEMMA NOSTRVM I.

*Figurarum regularium planarum rectilinearum, quæ plura habet latera; ſingulos angulos maiores obtinet, quàm quæ pauciora.*

Demonſtratio. Cùm per def. 8. lib. 4. elem. figuræ illæ regulares planæ rectilineæ, ſint æquiangulæ; centraque illarum ſint puncta intra illas, ex quibus rectæ emiſſæ ad earum angulos omnes ſunt æquales inter ſe, per def. 9. lib. eiuſdem: circulus centro iſto deſcriptus interuallo cuiuſlibet ex iſtis rectis, incedet per extrema reliquarum æqualium rectarum iuxta 25. ax lib. 1. elem. atque adeo per omnes angulos figuræ cuiuslibet propoſitæ regularis planæ rectilineæ: quare iuxta def. 4. lib. 4. cit. in circulo inſcribetur. Concipiamus igitur omnes huiuſmodi figuras regulares in circulis æqualibus inſcriptas: quandoquidem ſingulæ ſunt æquilateræ, diuident circumferentiam circuli propriam in arcus æquales per prop. 28. lib. 3. elem. Quare quæ plurium erit laterum in plures numero æquales arcus diuidet circumferentiam circuli, quam quæ pauciorum multitudine laterum: ergo per 11. ax. lib. 5. elem. duo ſimul arcus circuli circumſcribentis figuram huiuſmodi plurium laterum, erunt minores duobus ſimul arcubus circuli circumſcribentis figuram huiuſmodi pauciorum multitudine laterum: Igitur ſi ex æqualibus circumferentijs circulorum æqualium demamus illos inæquales arcus ſimul duos, relinquentur inæquales arcus, maiores quidem in circulo circumſcribente figuram regularem rectilineam plurium multitudine laterum, minores verò in circulo circumſcribente figuram huiuſmodi pauciorum multitudine laterum: ſed per prop. vltimam lib. 6. elem. anguli inſiſtentes peripherijs ſeu arcubus circulorum æqualium eandem habent rationem cum ipſis arcubus: ergo cùm arcus cui inſiſtit angulus figuræ regularis plurium laterum multitudine ſit maior arcu, cui inſiſtit angulus figuræ regularium pauciorum multitudine laterum; erit angulus figuræ regularis rectilineæ plurium multitudine laterum maior angulo figuræ regularis rectilineo pauciorum multitudine laterum: ſunt autem in vna figura regulari omnes anguli eius æquales inter ſe; & in alia etiam æquales inter ſe: ergo cùm oſtenderimus vnum angulum illius quæ habet plura latera, eſſe maiorem vno angulo alterius quæ habet pauciora; ſinguli illius anguli erunt maiores ſingulis huius alterius per coroll. noſtrum ad prop. 7. lib. 5. elem.

## LEMMA NOSTRVM II.

*Solum triangulum æquilaterum, eſt figura regularis plana rectilinea infra quadratum; & habet ſingulos ſuorum angulorum minores recto rectilineo.*

Demonſtratio. Triangulum æquilaterum cùm ſit per coroll. prop. 5. libr. 1. elem. etiam æquiangulum; erit per defin. 8. lib. 4. elem. figura regularis: tùm etiam quadratum, quia ex natura ſua eſt æquilaterum & æquiangulum ob eius quatuor rectos angulos æquales per 12. ax. lib. 1. elem. Nulla autem figura rectilinea eſt ex duabus rectis lineis, quia per 14. ax. lib. eiuſdem cit. duę rectæ lineæ ſpatium ſeu figuram comprehendere non poſſunt; & multò minus vna ſola: ſola ergo figura plana regularis rectilinea erit infra quadratum, Triangulum æquilaterum. Eſto autem ſi fieri, quilibet trianguli æquilateri angulus maior recto, vel æqualis recto: cùm oſtenderimus, eius tres angulos eſſe æquales inter ſe; eſſent tres eius anguli ſimul ſumpti maiores duobus rectis, contra prop. 32. lib. 1. elem. Abſurdum hoc manifeſtam facit falſitatem poſitionis contradicentis poſtremæ parti huius lemmatis, quæ ideo vera erit.

LEMMA

LEMMA NOSTRVM III.

*Figurarum regularium planarum rectilinearum ſupra quadratum; ſinguli anguli ſunt maiores recto rectilineo.*

DEmonſtratio. Infinitas eſſe figuras planas rectilineas regulares plurium laterum quàm quatuor, ideoque quàm quadratum, nemo non geometra recognoſcit, vt quinquelatera, ſexilatera, &c. igitur ſingulos ſuos angulos habebunt maiores quàm quadratum, iuxta lemma noſtrum primum. ſed quadrati anguli ſinguli ſunt recti ex natura ſua: ergo ſinguli anguli figurarum huiuſmodi regularium ſupra quadratum, erunt maiores recto rectilineo. quod erat concludendum.

LEMMA NOSTRVM IV.

*Nulla figurarum planarum rectilinearum regularium, habet quemlibet è ſuis angulis æqualem duobus rectis, nec maiorem, ſed minorem duobus dictis angulis rectis rectilineis.*

DEmonſtratio. Eſto ſi fieri poſſit, angulus quilibet figurarum huiuſmodi regulariam æqualis vel maior duobus rectis rectilineis: tunc immiſſa recta linea per diuerſa extrema duorum laterum angulum illum comprehendentium, efficiet cum illis triangulum; cuius anguli duo ad baſim ductam ſimul cum oppoſito efficient ſummam angulorum trium maiorem duobus rectis rectilineis, contra prop. 32. lib. 1. elem. igitur poſitio falſa erit. Cùm igitur quilibet angulus figurarum huiuſmodi regularium non poſſit eſſe æqualis, nec maior duobus angulis rectis rectilineis, relinquitur vt ſit minor illis. quod erat demonſtrandum.

LEMMA NOSTRVM V.

*Figurarum regularium planarum rectilinearum eiuſdē ſpeciei, ſinguli anguli ſunt æquales inter ſe.*

DEmonſtratio. Cùm figuræ huiuſmodi regulares eiuſdem ſpeciei contineant tot numero latera, totque numero angulos: & per coroll. noſtrum 7. ad prop. 32. lib. 1. elem. figura quæuis rectilinea plana, angulos ſuos omnes habeat ſimul ſumptos, æquales bis tot angulis rectis rectilineis, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas planas: quælibet duarum figurarum regularium, eiuſdem ſpeciei, obtinebit omnes ſimul ſuos angulos æquales, ſummæ angulorum omnium alterius figuræ regularis eiuſdem ſpeciei, per 1. ax. lib. 1. elem. ſed figuræ omnes huiuſmodi regulares ſunt æquiangulæ: ergo ſicut omnes vnius anguli ſunt æquales omnibus angulis alterius, ita quilibet vnius cuilibet alterius erit æqualis, iuxta ax. 7. lib. 1. elem. quod erat oſtendendum.

LEMMA NOSTRVM VI.

*Duarum figurarum regularium planarum rectilinearum eiuſdem ſpeciei, anguli duo non poſſunt æquales eſſe quatuor rectis angulis rectilineis.*

DEmonſtratio. Per præcedens lemma 5. ſinguli anguli figurarum regularium huiuſmodi eiuſdem ſpeciei, ſunt inter ſe æquales: ergo ſumptis duabus huiuſmodi figuris regularibus eiuſdem ſpeciei, vnius angulus vnus, & alterius angulus alter ſi ſint æquales per impoſſibile quatuor rectis; quilibet illorum erit æqualis duobus rectis, contra lemma præcedens 4. hoc abſurdum indicat poſitionem contradicentem aſſertioni huius lemmatis 6. eſſe falſam, & aſſertionem veram.

LEMMA NOSTRVM VII.

*Trium Figurarum regularium planarum rectilinearum eiuſdem ſpeciei; tres anguli non poſſunt eſſe æquales quatuor rectis; exceptis ſexilateris tribus.*

PEr demonſtrationem allatam ad propoſ. hanc quintam Procli, tres anguli ſexilateræ regularis figuræ planæ rectilineum ſpatium complent circa vnum punctum, quinque ſunt æquales quatuor rectilineis rectis iuxta coroll. 2. prop. 15. lib. 1. elem. ſed per lemma noſtrum 2. præcedens; cùm triangulum æquilaterum æquiangulum ſingulos ſuos angulos habeat minores recto rectilineo; certum eſt tria huiuſmodi triangula licet habeant tres angulos ſuos ad vnum punctum conſtituta, lateraque adiuncta, non poſſe complere ſpatium circa illud punctum; alioqui tres anguli ſinguli minores recto, eſſent æquales quatuor rectis, contra 8. ax. libr. 1. elem. Præterea cùm quælibet figurarum rectilinearum planarum regularium ſupra quadratum obtineat angulos ſuos ſingulos maiores recto rectilineo, ſi tres huiuſmodi figuræ regulares eiuſdem ſpeciei ſupra quadratum, haberent angulos ſuos ad vnum punctum conſtitutos, lateraque inuicem adiuncta vti oportet, complerent ſpatium circa illum

illum punctum; illi tres anguli eſſent æquales quatuor angulis rectis rectilineis, iuxta cit. coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. elem. quibus etiam ſunt ęquales tres anguli trium ſexilaterarum figurarum regularium huiuſmodi, vti oſtendimus: ergo per 1. ax. lib. 1. elem. tres anguli ſexilateræ huiuſmodi figuræ regularis, eſſent æquales tribus angulis figurarum trium eiuſdem ſpeciei regularium ſupra quadratum ac diuerſarum ab ſexilatera prædicta. Cùmque per lemma noſtrum 5. ſinguli anguli figuræ regularis ſint æquales inter ſe; angulis quilibet ſexilateræ figuræ, & angulus quilibet alterius huiuſmodi figuræ regularis ſupra & infra quadratum, eſſent æquales, contra lemma noſtrum primum abſurdum hoc indicat falſam eſſe poſitionem contradicentem aſſertioni huius lemmatis, quæ ideo demonſtrata remanebit.

## LEMMA NOSTRVM VIII.

*Quatuor figurarum rectilinearum planarum regularium eiuſdem ſpeciei, quatuor anguli; non poſſunt eſſe æquales quatuor rectis angulis rectilineis; ſi excipias quadrata quatuor.*

Demonſtratio. Inprimis quatuor triangulorum æquilaterorum anguli quatuor non poſſunt eſſe æquales quatuor rectis rectilineis, cùm ſint ſinguli minores recto per lem. 2. noſtrum: atque ita excluduntur figuræ regulares infra quadratum. Sed neque quatuor figurarum huiuſmodi regularium ſupra quadratum eiuſdem ſpeciei cuiuſcumque, eſſe poſſunt æquales quatuor rectis angulis rectilineis, quatuor anguli qui ſunt æquales inter ſe in diuerſis illis figuris per 5. noſtrum lemma; nam per 3. lemma ſinguli ſunt maiores recto. Ergo exceptis quatuor quadratis, quorum quatuor anguli ſunt æquales quatuor rectis, cùm ſint naturâ ſuâ ſinguli recti, quatuor figurarum regularium planarũ rectilinearum eiuſdẽ ſpeciei quatuor anguli nõ poſſunt eſſe ęquales quatuor rectis.

Ex his lemmatibus demonſtrata noſtra propoſitio ſequẽs ſuperaddita huic 5. Procli.

## PROPOSITIO NOSTRA.

Nullæ aliæ figurę regulares, planę, rectilineæque, eiuſdem ſpeciei, & æquales, ab Triangulo æquilatero, quadrato, & ſexilatero æquilatero æquiãguloque: iuxta ſe inuicem compoſitæ ſecundùm latera, & angulum communem: replere poſſunt ſpatium circa vnum punctum.

Demonſtratio. Tres illas figuras huiuſmodi regulares commemoratas replere ſpatium patet ex propoſitione hac quinta Procli: alias verò ab illis eiuſdem ſpeciei non complere ſpatium circa vnum punctum ſic oſtendemus. Nulla duo quinquelatera regularia & æqualia applicandis lateribus ad inuicem, & duobus ſuis angulis ad vnum punctum: & neque duæ aliæ figuræ regulares eiuſdem ſpeciei, & æquales, eodem modo compoſitæ, diuerſæque ab triangulo æquilatero, & quadrato, & ſexilatero regularibus; imo neque duarum iſtarum eiuſdem ſpeciei latera & anguli compoſiti modo prædicto, obtinent duos huiuſmodi angulos æquales quatuor rectis rectilineis angulis, per noſtrum lem. 6. ſed neque tres huiuſmodi figuræ regulares eiuſdem ſpeciei prædicto modo aptatæ, exceptis tribus ſexilateris regularibus, tres angulos in vnum punctum concurrentes, æquales quatuor rectis, per lemma noſtrum 7. Sed neque quatuor huiuſmodi figuræ regulares eiuſdem ſpeciei, eodem modo prædicto compoſitæ, obtinent quatuor angulos circa vnum punctum, æquales quatuor rectis, exceptis quatuor quadratis, per lemma noſtrum 8. ergo neque duæ huiuſmodi figuræ eiuſdem ſpeciei complere poſſunt ſpatium circa vnum punctum, quod eſt æquale quatuor rectis angulis per coroll. 2. prop. 15. lib. 1. elem. neque etiam tres huiuſmodi figuræ, exceptis ſexilateris, complere poſſunt prædictum ſpatium, neque quatuor eiuſdem ſpeciei figurę, exceptis quatuor quadratis, idem ſpatium circa vnum punctum implere poterunt. Sed neque quatuor triangula regularia, neque quinque, complere ſuis angulis poterunt dictum ſpatium circa vnum punctum, nam demonſtrauimus in hac prop. 5. Procli ſex huiuſmodi triangula ſuis ſex angulis illud ſpatium adæquare: ſed neque poterunt plura huiuſmodi triangula complere idem prædictum ſpatium, nam illud excedent. Porrò idem excedent plures quàm quinque, & quàm ſex, & ſic in infinitum, figuræ huiuſmodi regulares eiuſdem ſpeciei, diuerſæ tamen ab triangulis: pluresque quàm quatuor, quàm quinque & ſic infinitum, eiuſdem ſpeciei, diuerſæ tamen quàm quadrata, quorum quatuor ſpatium dictum complere probauimus: nam eorum anguli prædicto modo compoſiti quatuor dictos angulos rectos ſuperant. Igitur manifeſta eſt propoſitio iſta noſtra.

COROL-

## COROLLARIVM NOSTRVM

*Architecti pauimentum ſternere laterculis figurarum regularium rectilinearum planarum æqualium & eiuſdem ſpeciei, nequeunt, alijs quàm triangularibus, quadratis & ſexilateris prædictis.*

SEmper enim illæ aliæ figuræ compoſitæ modo prædicto ſpatium circa idem punctum; aut excedent, & ſic iuxta componi non poterunt; aut non complebunt, & ſic alia figura diuerſa ab illis requiretur quę defectum illum ſuppleat. Solumque triangulares, quadratæ, & ſexilateræ id præſtabunt, in infinitum iuxta ſe applicatæ.

## PROPOSITIO VI.

Ab vno puncto extra rectam aliquam dato, & quod non ſit in directum illius; non poſſunt plures quàm duæ rectæ lineæ æquales inter ſe, ad illam emitti. Ex lib. 3.

Fig. 381. ESto ſi fieri poſſit tres rectæ lineæ CD, CE, CB, ex puncto C extra rectam AB dato, & quod non ſit in directum illius, cadant in ipſam.

Demonſtratio. Reſultabunt triangula iſoſcelia DCB, DCE, ECB: ergo per 5. prop. lib. 1. elem. anguli CDB, CBD, erunt æquales; tùm anguli CDB, CED; tùm anguli CBD, CEB: ergo anguli deinceps ad rectam CE, erunt æquales per 1. ax. lib. 1. elem. ideoque ambo recti per def. 10. lib. cit. Quare per prop. 47. lib. eiuſdem quadratum rectæ CD, erit æquale quadratis rectarum DE, EC; ſed quia ponuntur ab aduerſario rectæ CD, CE æquales, erunt quadrata illarum æqualia, per coroll. noſtrum 3. ad prop. 46. lib. cit. ergo contra 8. axiom. lib. eiuſdem totum erit æquale parti: abſurdum hoc condemnat falſitatis poſitionem contradicentem huic propoſitioni, quæ ideo vera erit.

## PROPOSITIO VII.

Ab eodem puncto extra rectam lineam dato, & quod non ſit in directum illius; non poſſunt demitti plures vnâ perpendiculares rectæ lineæ, ad illam. Ex lib. 3.

HOc iam demonſtrauimus in corollario noſtro ad propoſitionem 17. libri 1. elementorum.

## PROPOSITIO VIII.

Si trianguli angulus bifariàm ſectus fuerit, ſecanſque angulum recta linea ad baſim ducta, in partes inæquales ipſam diuidat: Latera illum angulum continentia, inæqualia erunt; & maius quidem illud, quod cum maiori baſis ſegmento coincidit; minus verò, quod cum minori. Ex lib. 3.

SVppoſitio. Trianguli BAC, angulus BAC ſectus ſit bifariàm per rectam AD ſecantem etiam baſim BC in partes inæquales DB minorem, DC maiorem: Dico latera AB, AC, dictum angulum BAC continentia eſſe etiam inæqualia; & minus eſſe AB coincidens cum minore baſis ſegmento BD; & maius eſſe AC, quod cum maiore DC ſegmento baſis concurrit in C. Fig. 382.

Conſtructio. Extenſa recta AD vltra D, ſumatur per prop. 3. lib. 1. elem. recta DE, æqualis ipſi DA; tùm ex maiore DC, ſumatur recta DF æqualis ipſi DB minori; & traducatur recta EF producenda vltra F, donec ſecet in G latus AC.

Demonſtratio. Imprimis per 1. partem propoſitionis 3. lib. 6. elem. latera ipſa AC, AB, erunt inæqualia; cùm debeant per illam prop. obtinere rationem datæ inæqualitatis partium DC, DB, baſis BC ſectæ ab recta AD diuidente angulum BAC bifariàm. Quod verò maius latus AC ſit coniunctum cum extremo C maioris ſegmenti DC; &

minus latus AB vnitum extremo B, minoris ſegmenti DB, probatur ex conſtructione. Duo latera BD, DA, ſunt æqualia reſpectiuè duobus lateribus FD, DE, continentque angulos contrapoſitos æqualem per prop. 15. lib. 1. element. ergo per 4. prop. lib. eiuſdem, erunt anguli BAD, FED æquales, tùm baſes AB, EF, æquales: ſed angulo BAD, eſt datus angulus æqualis DAC, vel EAG; ergo per 1. axim. lib. 1. elem. anguli EAG, AEG, erunt æquales; ideoque per 6. prop. lib. eiuſdem, latera GA, GE, æqualia: ſed GE maius eſt quàm EF, ergo etiam maius erit quàm BA, per cit. axim. 1. At etiam AC maius eſt quàm AG, ergo per idem ax. 1. AC latus multo maius erit latere AB; hoc eſt latus AC vnitum extremo C maioris ſegmenti DC, maius erit latere AB vnito extremo B minoris ſegmenti DB, baſeos BC quòd erat ratiocinio facto concludendum.

## PROPOSITIO IX.

In triangulis rectangulis & obtuſangulis, intra aream ipſorum conſtitui poſſunt duæ rectæ lineæ ſuper vnum latus circa angulum rectum vel obtuſum; quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera verò à quouis puncto prope aliud extremum lateris eiuſdem educitur: quæ maiores ſint reliquis duobus trianguli lateribus. Ex libro 3.

Fig. 383. Suppoſitio. Sit triangulum ABC habens angulum in B obtuſum vel rectum: Dico ab extremo C, & à quouis puncto D, prope aliud extremum eiuſdem lateris BC, circa angulum rectum B, duci poſſe duas rectas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ ſint maiores duobus lateribus BA, AC.

Constructio. Tranſmittatur recta DA, quæ erit maior quàm BA; ( cùm enim per prop. 17. lib. 1. elem. duo anguli ABD, ADB, ſint minores duobus rectis, & detur angulus B rectus, vel obtuſus, alter angulus ADB acutus erit, minórque recto; vnde per prop. 19. lib. eiuſdem, recta DA maior erit recta BA. )tùm per prop. 3. lib. 1. detrahatur recta DE ex DA, æqualis ipſi BA; & reliqua EA biſariàm ſecetur in F, per prop. 10. lib. cit. denique recta FC ducatur: Dico duas rectas CF, DF, eſſe ſimul maiores duobus lateribus AB, AC, triangulorum datorum rectanguli vel obtuſanguli.

Demonſtratio. In triangulo AFC, duo latera AF, FC, ſunt maiora reliquo AC, per prop. 20. lib. 1. elem. ſed æquales ſunt rectæ AF, FE, per conſtructionem; ergo rectæ FC, FE, erunt etiam maiores latere AC; his inæqualibus addantur æqualia AB, ED; fient per 4. ax. lib. cit. CF, FD, rectæ ſimul maiores lateribus AC, AB ſimul ſumptis. quod erat concludendum.

Hæc propoſitio facit ad explicationem propoſitionis 21. lib. 1. elem. in qua conditio apponitur, vt duæ rectæ lineæ ductæ intra triangulum datum ſemper ſint ſimul ſumptæ duobus ipſius trianguli lateribus ſimul ſumptis minores, ab extremitatibus alterius lateris tertij educantur: ſi enim iſta cōditio non adeſſet, falſa eſſet aſſertio; nam duæ ductæ DF, CF, ſunt maiores oſtenſæ duobus lateribus BA, CA: verùm non ſunt eductæ ab extremitatibus B, & C, tertij lateris BC, ſed ſolum vna CF ab C, altera verò D minimè ab extremo B.

## PROPOSITIO X.

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes, infinitè producantur: ipſarum diſtantia, omnem finitam magnitudinem excedet. Ex lib. 4.

Suppoſitio. Ab vno puncto A, duæ rectæ lineæ AB, AC, angulum in A efficientes, concipiantur in infinitum productæ: Dico quod ipſarum diſtantia media inter extrema earum puncta diuerſa ab communi A, ſit infinita. Fig. 384.

Constructio ſumptis in alterutra rectarum puta AB, punctis D & F, vno F remotiore quàm D; demittantur per 12. prop. lib. 1. elem. rectæ lineæ perpendiculares alteri AC, ex ipſis punctis D, & F: quæ perpendiculares FG, DE, metientur diſtantiam punctorum D & F, ab recta AC, ex natura diſtantiarum inter puncta & lineas. Porrò reſultabunt triangula FAG, DAE, æquiangula: ( nam per prop. 28. lib. 1. elem. erunt parallelæ inter ſe rectæ lineæ FG, DE, ob rectos duos angulos internos & ad eaſdem partes,

partes, FGE, DEG, quos facit recta linea AC incidens in illas; ergo per prop.29.lib. cit.anguli FGA, DEA, erunt æquales; tùm anguli ADE, AFG; & angulus A illis communis eſt.) Ergo per prop.4.lib.6.element. erit vt AF ad FG, ita AD ad DE; ſed AF prima maior eſt quàm ſecunda AD, ergo per prop.14. lib.5 elem. ſecunda FG erit maior quàm quarta DE: hoc eſt diſtantia puncti F remotioris ab A, erit maior quàm diſtantia puncti D vicinioris ipſi A, diſtantia nimirum dictorum punctorum F, D, ab recta AC.

Demonſtratio. Quia puncta F & G, in datis rectis, plus diſtant inter ſe, quàm puncta D & E, in eiſdem rectis; & ſic deinceps ſi ſumerentur puncta vlteriora in recta AB, & ab eis demitterentur rectæ lineæ perpendiculares ad rectam aliam AC, iuxta conſtructionem. Quod ſi puncta extrema dictarum rectarum angulum A efficientium, infinito ſpatio inter ſe non diſtarent, augeri poſſent earum diſtantia; ergo & lineæ ipſæ produci vlteriùs, contra ſuppoſitionem.

Hæc eſt demonſtratio quæ afferri poteſt, ex mente Procli. Verùm quia ſupponit infinitas actu lineas ſeu cathegorematicè infinitas, & non infinitas ſyncathegorematicè; quarum primas reſpuit Geometria, ob def.5. lib.5.elem. ſecundus ſolum admittendo, non admittent Geometræ propoſitionem & eius allatam demonſtrationem.

Proclus hanc propoſitionem præmittit ad probandum 13.axioma lib.1.elem. vnde colligitur ipſum ab eo non demonſtrari, cùm aſſumat quod æquè ignotum vel ignotius eſt in Geometria, imò ab ea alienum.

### COROLLARIVM NOSTRVM

*In duabus datis rectis lineis angulum efficientibus, puncta remotiora vnius ab angulo magis diſtant, quàm viciniora illi angulo, ab altera recta.*

HOc enim in conſtructione demonſtrauimus.

## PROPOSITIO XI.

Si duarum rectarum linearum alteram ſecet recta quæpiã linea; reliquam productã ſi opus eſt, etiam ſecabit. Ex libro 4.

HÆc propoſitio fuit noſtrum coroll. 1. ad prop.42.lib.1.elem.demonſtratum.

## PROPOSITIO XII.

Reſoluta quacumque figura rectilinea plurium laterum quàm trium, in triangula baſes habentia latera ipſius figuræ, & vertices in angulis eius: ſumma bis tot rectorum angulorum, æqualis numero horum triangulorum, erit æqualis ſummæ omnium angulorum figuræ dictæ reſolutæ in dicta triangula. Ex Libro 4.

CVm enim per prop.32.lib.1.elem. tres anguli ſimul ſumpti ſint æquales duobus rectis angulis rectilineis: & omnes anguli dictorum trianguli ſint omnes partes ſimul ſumptæ, omnium angulorum figuræ datæ reſolutæ in dicta triangula iuxta lib.1. element. axioma 19. manifeſtum bis tot rectos angulos, quot ſunt in dicta reſolutione triangula rectilinea, eſſe ſummam omnium angulorum datæ figuræ reſolutæ.

## PROPOSITIO XIII.

In omni figura rectilinea latera habente numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera & æquiangula; erunt quælibet duo latera oppoſita, parallela inter ſe. Ex libro 4.

DEmonſtratio. Per coroll. noſtrum 6. ad prop.4.lib.4.elem. figura huiuſmodi erit circulo circumſcriptibilis, quia eſt regularis per def.8.lib.eiuſdem 4. Ergo ſi duo latera illius oppoſita ſumantur, quia ſunt numero paria omnia eius latera, & æqualia inter ſe, abſcindet ex circulo circumſcribente æquales arcus, per coroll. noſtrum ad prop. 28. lib. 3. elem. qui erunt etiam numero pares vt latera: ergo ſi à paribus numero iſtis arcubus æqualibus, quibus ſubtenduntur paria numero latera, & æqualia inter ſe, demantur duo arcus æquales quibus ſubtenduntur duo aſſumpta latera figuræ propoſitæ, qui efficiunt numerum parem; relinquentur numero

Digitized by Google

datur communis figura AEFCB, reſultabit ex vna parte parallelogrammum GFCB, æquale trapezio dato ABCD, per 3. axioma lib. 1. element. ſed per propoſ. 41. lib. cit. paralallelogrammum GFCB, eſt duplum trianguli dati BEC, ergo per prop. 7. lib. 5. elem. trapezium datum ABCD erit duplum trianguli dati BEC, quod erat demonſtrandum.

### PROPOSITIO XVI.

Linearum æqualium rectarum æqualia ſunt quadrata: Et quadratorum æqualium, æquales ſunt rectæ lineæ ſeu latera. Ex libro 4.

PRimam partem huius propoſitionis demonſtrauimus in corollario noſtro tertio ad propoſ. 46. lib. 1. elem. & ſecunda pars fuit corollarium noſtrum 4. eiuſdem propoſitionis.

# LIBER DE INVENTIONE

## Duarum rectarum linearum continuè proportionalium, inter duas rectas datas, ex antiquis Geometris & recentioribus.

### PRIMVS MODVS

*ex Platone mechanicis.*

Inueniendi duas rectas continuè proportionales inter duas rectas datas.

Fig. 387 SVppoſitio. Sint datæ duæ rectæ lineæ AB prima, BC vltima; oporteatque duas alias rectas inuenire, BD, ſecundam BE, tertiam; quæ ſint continuè proportionales inter duas illas AB, BC: hoc eſt ſit AB ad BD, & BD ad BE, & BE ad BC.

Conſtructio inſtrumenti. Paretur ex materia ſolida, putà ex ære, gnomon rectus FGH, & regula alia IK recta ex eadem vel alia materia ſolida, quæ ſit perforata, ita vt in eius foramen I, ingredi poſſit regula GH ignominis prædicti, & eam adducendo verſus G, vel verſus H, ſemper ſit ad angulos rectos lateri GH, gnomonis recti FGH.

Praxis. Per propoſitionem 11. lib. 1. elem. Ad B extremum primæ rectæ AB datæ, excitetur recta linea BC, ad angulos rectos ipſi AB; ponaturque recta BC æqualis datæ vltimæ BC, iuxta propoſ. 3. lib. 1. element. Tum ſingulæ iſtæ rectæ AB, BC, ſibi inuicem perpendiculares producantur vltra B; AB quidem ad L, CB verò in M. Iam verò latus FG gnomonis recti applicetur rectis AB, BM, ita vt angulus G illius inſiſtat rectæ BM, & FG latus ſecet in A rectam AB: tunc eiuſdem gnomonis recti latus GH ſecabit rectam BL in aliquo puncto, ad quod promouenda erit regula recta KI, quæ ſi ſecuerit in C puncto extremo rectam BC; ducendum erunt rectæ AD, DE, EC, ſecundùm latera FG, GH gnomonis recti, & regulæ IK, ſecantes in D, E, rectas BM, BL. Quod ſi regula IK, ſic applicata, ſecuerit rectam BC in puncto aliquo ex intermedijs, ſignum eſt angulum G rectum gnomonis FGH, fuiſſe primò applicatum in recta BM, radente latere GF, extremum A rectæ AB, in puncto aliquo rectæ BM nimiùm vicino puncto B; quare erit conſtituendus idem angulus G, in puncto aliquo ſuperiore. Quod ſi regula prædicta IK non ſecuerit rectam BC, ſi-

gnum eſt, eundem angulum G, rectum gnomonis fuiſſe applicatum modo prædicto in puncto aliquo rectæ BM nimis remoto ab puncto B; vnde erit applicandns angulus G rectus gnomonis in puncto aliquo rectæ BM magis vicino puncto ipſi B. Et ſic attentando conſtituendus erit prædictus angulus G rectus gnomonis, & recta IK, donec regula IK, tranſeat per C extremum rectæ BC. Dico autem tunc eſſe rectas BD, BE, duas quæſitas continuè proportionales inter datas AB, BC: hoc eſt eſſe vt AB ad BD, ita BD ad BE, & BE ad BC.

Demonſtratio. Quandoquidèm FGH angulus gnomonis eſt rectus, erit ADE triangulum rectangulum, & ex angulo ADE recto videlicet congruente ipſi angulo FGH recto gnomonis, decidit perpendicularis DB facta ad baſim ABE dicti trianguli ADE rectanguli, erit per coroll. propoſ. 8. lib. 6. element. recta BD media proportionalis inter rectas AB, BE. Simili modo, quia angulus GIK eſt per inſtrumentum compoſitum rectus, erit triangulum DEC rectangulum, & recta EB defluit per conſtructionem perpendicularis ipſi baſi DC, ex angulo recto DEC congruente ipſi angulo GIK inſtrumenti; erit recta EB media proportionalis inter rectas DB, BC. Quare erit vt AB ad BD, ita BD ad BE; tùm vt BD ad BE, ita BE ad BC. Fecimus ergo & probauimus rectè factum imperatum ex modo Platonis mechanico.

## SECVNDVS MODVS

### *Archytæ Tarentini.*

### Inueniendi duas rectas continuè proportionales, inter datas duas rectas.

Fig. 388. SVppoſitio. Inter duas datas AD, AB, rectas, ſint inueniendæ duæ aliæ rectæ AK, AI, continuè proportionales, ita vt ſit, Vt AD ad AK, ita AK ad AI, & AI ad AB.

Conſtructio. Maior recta è datis duabus, AD diuidatur bifariàm in N, per propoſ. 10. lib. 1. element. & centro N, interuallo NA, vel ND, deſcribatur circulus ABDF, cuius circumferentia incedet per extrema diametri AD, iuxta lib. 1. elem. axiom. 25. Præterea per propoſ. 1. lib. 4. element. ex puncto A, accommodetur in circulo facto recta AB æqualis minori datæ AB. Tùm ad punctum D extremum diametri AD, excitetur recta linea DP ad partes puncti B, perpendicularis ipſi AD diametro, per propoſ 11. lib. 1. element. Si concipiatur recta linea DB, ducta, erit in ſemicirculo angulus DBA rectus per propoſ. 31. lib. 3. element. quare ne contra propoſ. 17. lib. 1. ſint in triangulo DBA, duo anguli recti vel maiores recto, erit angulus DAB acutus: Cùm ergo recta DA, incidat in duas PD, BA, efficiatque angulos PDA, BAD, minores ſimul duobus angulis rectis, concurrent per lib. 1. axim. 13. duæ rectæ AB, DP productæ in punctum commune P, ad partes B; eritque triangulum ADP rectangulum. Inſuper ex puncto B, demittatur per propoſ. 12. lib. 1. element. recta linea BE perpendicularis diametro AD. Iam verò concipiatur ſemicylindrus rectus, diametri AD, & baſeos ABD, perpendicularis plano circuli ABDF; & in plano huius cylindri rectangulo latus habens diametrum BD ſuſtentatum in plano circuli ABDF, circulum factum circa diametrum AD, hic circulus recens factus, erit æqualis circulo ABDF, eritque ad ipſum perpendicularis, vt ipſum rectangulum ipſum ſuſtentans, quod iuxta defin. 21. lib. 11. element. effecit prædictum cylindrum rectum, & perpẽdicularem ipſi circulo ABDF. Imaginemur præterea immobilem iſtum ſemicylindrum, ſed mobilem ſemicirculum deſcriptum ſupra planum rectanguli dicti, circa extremum A immotum diametri eius AD, radentis planum circuli ABDF: hic motus circumferentiæ huius ſemicirculi deſcribet in ſuperficie cylindri, lineam quandam, nam egreditur extra ipſam ſuperficiem cylindri ſtatim atque cœpit moueri ab D verſus B. Præterea imaginemur triangulum rectangulum ADP moueri circa immobile latus AD, verſus F; hoc triangulum cùm iaceat in eodem plano in quo circulus ABDF qui eſt baſis cylindri dicti, deſcribet iuxta Euclidis lib. 11. def. 18. conum, & latus ABP, ſuperficiem conicam, & recta BE ſimul mota cum latere DP, deſcribet circulum BMF, ſicut recta DP, baſim coni prædicti, iuxta explicationes definitionis 15. lib. 1. & def. 20. lib. 11. element. Porrò latus AP in hoc motu ſecabit ſuperficiem cylindri prædicti, tandemque occurret ſectioni communi ſuperficiei cylindri illius, & circumferentiæ motæ ſemicirculi DKA, ſitque hæc ſectio communis harum trium linearum, punctum K quod erit in ſuperficie cylindri prædicti; ſitque exempli gratia dictum triangulum rectangulum ADP, in ſitu trianguli ADI. rectanguli, quãdo eius latus AP, occurrit puncto præ-

cto prædicto K. Inſuper recta KI deſcendens ex puncto K in ſectionem communem ſuperficierum cylindricæ ſuperficiei, & baſeos eius circularis ABD, cùm ſit pars lateris rectanguli perpendicularis ad planum circuli ABD, erit etiam perpendicularis plano circuli ABD, in puncto I circumferentiæ dicti circuli quam effecit latus rectanguli prædicti, cui eſt ad angulos rectos aliud latus rectanguli efficiens ſuperficiem cylindri. Plana autem ſibi occurrentia circuli BMF, & circuli DCA ſe mutuò ſecabunt in recta linea MH, iuxta propoſ. 3. lib. 11. element. tùm etiam plana circuli ABDF, & circuli BMF, ſe mutuò ſecabunt in recta linea BEF, quæ eſt diameter circuli BMF. Vltimò tranſmittantur rectæ lineæ DK, IM, MB, FM. Dico eſſe vt DA ad AK, ſic KA ad AI, & IA ad AM ſeu AB æqualem ipſi AM: atque ita inter AD, AB, datas duas rectas, poſitas eſſe duas alias rectas AK, AI, continuè proportionales.

Demonſtratio. Quia ſemicirculus DKA eſt perpendicularis plano circuli ABDF per conſtructionem; tùm etiam circulus BMF baſis coni facti ab triangulo rectangulo BEA, perpendicularis eſt plano eiuſdem circuli ABDF, (nam recta AE quæ eſt pars diametri AD, circuli ABDF, cùm ſit axis coni, orthogonius ſemidiametris omnibus circularis baſeos illius BMF, repræſentatis per BF motam, erit recta AE perpendicularis plano circuli BMF, per def. 3. lib. 11. element. quare per propoſ. 18. lib. eiuſdem planum circuli ABDF, ad hanc rectam AE applicatum, erit ad angulos rectos plano circuli BM, viciſſimque hoc illi.) Cùm ergo duo plana circulorum DKA, BMF, ſint perpendicularia plano circuli ABDF, communis eorum ſectio, recta MH erit ad angulos rectos plano circuli ABDF, per propoſ. 19. lib. 11. elem. ideoque per def. 3. lib. eiuſdem recta eadem MH, erit perpendicularis in puncto H rectæ DA ſuſtentatæ in plano circuli ABDF; ſicuti etiam recta KI oſtenſa perpendicularis plano dicti circuli ABDF, erit etiam perpendicularis eidem rectæ DA in puncto I. Porrò duæ chordæ rectæ AI, FB, ſe mutuo ſecantes in H, intra circulum ABDF, efficient per prop. 35. lib. 3. elem rectangula ſub ſuis ſegmentis AH, HI, & BH, HF, æqualia: Cumque angulus FMB ſit rectus in ſemicirculo FMB, per propoſ. 31. lib. 3. cit. & ab angulo M recto ſit demiſſa perpendicularis MH, diametro BEF dicti ſemicirculi, erit per coroll. propoſ. 8. lib. 6. element. recta MH media proportionalis inter rectas FH, HB; & per propoſ. 17. lib. eiuſdem rectangulum ſub FH, HB, æquale quadrato mediæ MH; ergo per 1. axiom. lib. 1. element. rectangulum etiam ſub AH, HI, æquale erit quadrato rectæ MH, quæ eſt ad angulos rectos ipſis AH, HI, in directum poſitis rectis; vnde per coroll. noſtrum ad propoſ. 8. lib. 6 elem. angulus AMI erit rectus. Et quia triangula AMI, AHM, AKD, ſunt rectangula, (nam duo prima iam oſtenſa ſunt talia, tertium verò eſt, ob angulum AKD in ſemicirculo rectum per prop. cit. lib. 3. element. 31. vnde etiam per coroll. propoſ. 8. lib. 6. element. recta KI perpendicularis probata baſi DIA, erit media proportionalis inter duas DI, AI.) habentia ſingula rectum vnum angulum, & alterum communem in A, erunt per coroll. noſtrum 3. ad propoſ. 32. lib. 1. elem. reliqui tertij anguli illorum æquales; ac proinde dicta triangula erunt æquiangula, & per 4. propoſ. lib. 6. element. erit vt DA ad AK, ita KA ad AI, & ita AI ad AM, vel ad AB æqualem, ſunt enim AM, AB, æquales rectæ, imo eædem AB in motu efficiens ſuperficiem conicam vt dictum eſt in conſtructione. Inuenimus ergo propoſitum, & inuentum probauimus.

## TERTIVS MODVS

### *ex Menechmo.*

### Inueniendi duas rectas continuè proportionales inter duas datas rectas.

HIc modus erit beneficio duarum parabolicarum linearum ſe mutuò interſecantium.

Suppoſitio. Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, BC, & oporteat duas alias rectas reperire BK, BI, continuè proportionales; ita vt ſit AB ad BK, ſicut BK ad BI, & ſicut BI ad BC. *Fig. 389.*

Conſtructio. Diſponatur per prop. 11. lib. 1. element. ſecunda BC è datis ad angulos rectos ipſi AB primæ, ad eius extremum B; & recta BC producatur vltra B in infinitum verſus E, & recta AB vltra B in infinitum verſus D. Tùm ex recta BE io infinitum producta, ſumatur recta BE minor quàm BC: ſimiliter ex recta BD ſumatur quæcumque recta BD minor quàm BA. Præterea diametro BE & recta alia inuenienda per lemma præpoſitum prop. 15. lib. 10. element. quæ poſſint BC rectam, concipiatur deſcripta parabola FBG: ſimili ratione, diametro BD, & recta alia inuenienda per cit. lem. quæ poſ-

ſint rectàm BA, concipiatur deſcripta alia parabola HBF ſecans aliam deſcriptam in F. Inſuper ex hoc puncto F ad rectas BE, BD, demittantur per propoſ.12.lib.1.elem. rectæ lineæ perpendiculares FK, FI. Dico rectas BK, BI, eſſe duas quæſitas rectas lineas continuè proportionales, inter duas datas AB, BC.

Demonſtratio. Quia rectæ IF, & KB, ſunt perpendiculares ipſi IB, erunt per propoſ.28. lib.1. element. parallelæ; eadem ratione quia rectæ IB, FK, ſunt perpendiculares ipſi BK, erunt parallelæ: quare reſultabit parallelogrammum IBKF, rectangulum per propoſ. 34. lib. cit. eruntque per eandem latera eius oppoſita IF, BK, æqualia, tùm alia duo IB, FK, æqualia. Ergo quia recta IF ordinatim applicata eſt in parabola HBF, rectangulum ſub AB, BI, erit per propoſ.11. lib.1. Conic. Apollonij, æquale quadrato ex recta IF, vel ex recta BK ipſi æquali: qoare per propoſ. 17.lib.6. element. erit AB ad BK, vt BK ad BI. Conſimili diſcurſu quia recta FK eſt ordinatim applicata in parabola FBG, erit per cit. prop. Apoll. rectangulum ſub BK, BC, æquale quadrato rectæ FK, vel IB ipſi æquali; ideoque per cit. propoſ.17.lib.6. element. erit vt KB ad BI, ita BI, ad BC. Sunt igitur continuè proportionales iſtæ quatuor rectæ lineæ AB, BK, BI, BC, & inuentæ duæ KB, BI, intermediæ inter duas datas AB, BC. quomodo fuit propoſitum.

Hic Author idem concludit per interſectiones paraboliæ & hyperbolicæ lineæ.

## QVARTVS MODVS

### *ex Eratoſthene.*

### Inueniendi duas rectas lineas continuè proportionales, inter duas datas rectas.

Fig.390. SVppoſitio. Inter duas datas rectas AB, CD, oporteat inuenire duas alias rectas GI, MO, continuè proportionales; ita vt ſit AB ad GI, vt GI ad MO, & MO ad CD.

Conſtructio. Datæ duæ rectæ AB, CD, conſtituantur parallelę, per prop. 31. lib.1. element. & puncta earum extrema B & C, verſus eaſdem partes exiſtentia, recta linea BC, connectantur; perficiaturque iuxta noſtrum lemma 1. ad libr.2. element. parallelogrammum ABCE, ſub duabus rectis AB, BC, ducaturque recta AD. Prætcrea per propoſ.9.lib.6.element. ex tota recta BC, ſumatur BF tertia eius pars: tùm ſumatur recta BG paulò maior qoàm BF; & per 3. propoſ. libri 1. element. de maiore AE, æquali ipſi BC iuxta propoſ. 34. lib. eioſdem 1. detrahator recta AH æqualis ipſi BG, & traijciatur recta HG quæ ſecabit in I, obuiam rectam AD: reſultabit parallelogrammum BH, quia rectæ AB, GH, nectunt æquales & parallelas rectas AH, BG, vnde erunt prædictę æquales & parallelæ per propoſ.33.lib. 1. element. Simili modo auferendo de recta AB, æqualem AK ipſi HI, ductaque recta KI, reſultabit parallelogrammum KH, & aliud parallelogrammum BI. Ergo quia latera KI, BG, ſunt parallela, erunt per propoſ. 29.lib.1.element. anguli AKI, ABG æquales; quibus ſi addamus angulum communem KAI, fient duo anguli AKI, KAI, æquales angulis ABC, BAD; ſed illi duo per prop. 17.lib.1.elem. ſunt minores duobus rectis in triangulo KAI; ergo iſti duo ABC, BAD, erunt etiam minores duobus rectis per 1.ax. lib.cit.1. igitur per axioma 13. lib. eiuſdem, concurrent duæ rectæ lineę BC, AD, productæ vltra D & C, in punctum commune R, reſultabitque triangulum ABR. Porro ducta recta AG ſecabitur in L ab recta KI. Inſuper ex rectis GC, HE, æqualibus & parallelis, (nam ex ęqualibus AE, BC, per propoſ.34. lib. 1. elem. detractæ ſunt æquales BG, AH; vnde relinquentur æquales HE, GC, per 3. axiom. lib.1. elem. ) ſumantur ipſi IL rectæ, ęquales HN, GM, relinquentur etiam ex modo dictis æquales NE, MC; (poterũt autem ſumi tales rectæ ex GC, HE, quia iſtæ continent pluſquam vnam tertiam partem totius BC; & ipſæ GM, HN, æqoales ipſi IL, ſunt ſingulæ ad ſummum vna tertia totius BC, nam IL eſt pars totius IK, quæ eſt æqualis ipſi BG per prop. 34. lib. 1. elem.) quæ cùm ſint parallelæ, rectæ aliæ quæ ipſas iungent HG, NM, erunt ex principijs citatis, æquales & parallelæ, & parallelogrammata GN, ME; ſecabitque recta NM, in O rectam AD obuiam. Et quia ſunt parallelæ oſtenſæ rectæ DC, OM, IG, erunt anguli DCR, OMR, IGR, æquales per propoſ.29. lib. 1. element. Et cùm triangula IGR, OMR, DCR, præter angulos dictos, obtineant angulum R communem, habebunt reliqoos tertios angulos æquales per coroll. noſtrum 3. ad propoſ. 32. lib.1. element. vnde ipſa triangula erunt æquiangula; ergo per 4. propoſ. lib.6. elem. erit RG ad GI, vt RM ad MO, prima verò RG maior eſt quàm tertia RM, ergo per propoſ.14.lib.5. element. ſecunda GI, vel BK ipſi æqualis per propoſ.34.lib.1. element. erit maior quàm quarta MO: Igitur per propoſ.

3.lib.1.

3.lib.1. de maiore BK poterimus detrahere rectam BP, æqualem minori MO, & ducere rectam PO, quæ ſecabit obuiam rectam IM ducendam in puncto Q. Iam verò vel recta QO, eſt æqualis ipſi rectæ MC, vel maior vel minor: ſi maior, ſignum eſt rectam BG fuiſſe ſumptam iuſto maiorem, quare ſumenda erit paulò minor; quod ſi fuerit minor QO, quàm MC, ſignum eſt rectam DG fuiſſe aſſumptam iuſtò minorem, vnde ſumenda erit paulò maior: & reliqua prædicta facienda, donec ſint æquales rectæ QO, MC. Cùm verò QO, MC ſint parallelæ & æquales, erunt per prop. 33. lib. 1. elem. rectę QM, OC, parallelæ & æquales: Simili ratione quia GM, IL, ſunt ęquales factæ, & parallelæ oſtenſæ, erunt rectæ LG, IM, æquales & parallelæ: & per prop. 30. lib. cit. 1. erunt parallelæ tres rectæ LG, IM, OC, quia extremæ ſunt probatæ parallelæ ipſi mediæ IM vel QM. Denique ex principiis citatis paulò ante, triangula AGR, IMR, OCR, erunt æquiangula. Dico autem duas rectas GI, MO, eſſe continuè proportionales inter duas rectas datas AB, CD.

Demonſtratio. Conſiderando iſta quatuor æquiangula triangula oſtenſa ABR, IGR, OMR, DCR; tùm etiam alia tria æquiangula AGR, IMR, OCR: Per prop. 4. lib. 6. elem. erit RA ad RB, vt RI ad RG; ergo permutãdo per prop. 16. lib. 5. elem. erit RA ad RI, vt RB ad RG; ſed etiã per cit. prop. 4. lib. 6. eſt vt RA ad RG, ſic RI ad RM; & permutando vt RA ad RI, ſic RG ad RM; ergo per prop. 11. lib. 5. elem. erit vt RB ad RG, ſic RG ad RM: Præterea per cit. prop. 4. erit vt RI ad RG, ſic RO ad RM; & permutando per cit. prop. 16. vt RI ad RO, ſic RG ad RM; ſed etiã per prop. 4. cit. eſt vt RI ad RM, ſic RO ad RC; & permutãdo vt RI ad RO, ſic RM, ad RC; ergo per cit. prop. 11. ſic RM ad RC: Igitur erunt cõtinuè proportionales iſtę quatuor rectæ lineæ RB, RG, RM, RC. Sed per 4. prop. cit. eſt RB ad BA, vt RG ad GI; & vt RG ad GI, ſic RM ad MO; & vt RM ad MO, ſic RC ad CD: demõſtrauimus ergo eſſe omnes antecedentes cõtinuè proportionales, & omnes conſequẽtes BA, GI, MO, CD, eſſe cõtinuè proportionales; extremę autem BA, CD, fuerunt datę rectę lineę, & duę intermediæ GI, MO, ſunt inuentæ: fecimus ergo imperatum ſecundùm hunc modum Eratoſthenis.

## COROLLARIVM NOSTRVM

***Si omnes antecedentes fuerint continuè proportionales; erunt eorum conſequentes etiam continuè proportionales.***

## QVINTVS MODVS

### *ex Philone Bizantio vſurpatus etiam ab Philopono.*

### Inueniẽdi duas rectas lineas continuè proportionales, inter duas rectas datas.

SVppoſitio. Inter duas datas rectas AB, BC, oporteat inuenire duas alias rectas AF, CG, continuè proportionales; ita vt ſit AB ad AF, vt AF ad CG, & CG ad CB. Fig. 391.

Conſtructio. Per noſtrum lemma 1. ad lib. 2. elem. ex duabus datis rectis AB, BC, fiat rectangulum ABCD, & in eo ducatur diameter AC, & producantur latera DA, DC, illud vltra A, iſtud vltra C: tùm per prop. 10 lib. 1. element. diuiſa diametro AC bifariàm in E, deſcribatur ex E puncto vti centro, ad interuallum rectæ EA, circulus qui tranſibit per axiom. 25. lib. 1. cit. per C extremum diametri AC; tùm etiam iuxta coroll. noſtrum ad prop. 33. lib. 3. elem. per angulos ABC, ADC, rectos dicti rectanguli. Deinde applicata regula recta ad punctum B, commoueatur circa illud punctum immobile tanquam polum, ita vt ipſa regula ſecet circumferentiam circuli in O, & iuxta prop. 11. Procli rectam DC productam in G, & rectam DA ſecet in F; & ſint æquales rectæ lineæ BG, OF: quod fiet attentando ſæpius. Tunc dico rectas AF, CG, eſſe duas rectas quæſitas continuè proportionales, inter duas datas AB, BC.

Demonſtratio. Si æqualibus rectis GB, FO, addatur communis recta OB, fient rectæ GO, FB, æquales per axiom. 2. lib. 1. element. quare rectangula ſub GB, GO, & ſub FB, FO, æqualibus reſpectiuè, erunt æqualia. Sed per 1. coroll. propoſ. 36. lib. 3. element. rectangulum ſub GB & GO, æquale eſt rectangulo ſub GD & GC, & rectangulum ſub FB, FO, æquale eſt rectangulo ſub FD, FA; ergo per 1. axiom. lib. 1. element. duo rectangula ſub GD, GC, & ſub FD, FA, erunt æqualia. Quare per propoſ. 16. lib. 6. element. erit GD ad FD, vt AF ad CG. Et quia in triangulo GDF, recta AB eſt parallela lateri DG, propter parallelogrammum ABCD factum, erit triangulum BAF, ſimile toti GDF, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. element. ideoque per def. 1. lib. eiuſdem, erit vt GD ad DF, ita AB ad AF; ergo per prop. 11. lib.

interſectiones dictarum linearum & circumferentiæ vnius circuli, incedat per punctum B, qualis eſt chorda GBE: aduertendo quod ſi chorda prædicta incedat ſupra punctum B, qualis eſſet LI, deſcribendus erit alter circulus infra punctum L: quod ſi dicta chorda, tranſeat infra punctum B, veluti chorda MN, decircinandus erit circulus ſupra punctum M. Sic etenim rectæ EG, EF, erunt æquales. Reliqua verò perficiantur, vt in conſtructione præcedentis modi ſexti. Et demonſtratio praxeos erit eadem quæ in præcedente modo.

## OCTAVVS MODVS

### *Nicomedis beneficio lineæ ſuæ conchoideos.*

### Inueniendi duas rectas lineas continuè proportionales inter duas datas rectas.

Fig.395. SVppoſitio. Inter duas datas rectas AB, BC, oporteat duas rectas continuè proportionales AK, LC, inuenire.

Fig.393. Conſtructio lineæ conchoideos ſeu conchylis, per puncta diuerſa inueniendo tranſmittendæ conſtanti manu. Ducatur alia quæuis recta AB diuerſa ab data, & ex aliquo eius puncto E, excitetur illi perpendicularis recta DEC, per propoſ.11.lib.1.element. In qua infra punctum E eligatur D punctum pro polo lineæ conchoideos deſcribendæ, & ſupra E, aſſumatur aliud punctum C. Porrò ex puncto D, tranſmittantur multæ lineæ hinc & inde reſpectu CED perpendicularis, ad puncta diuerſa rectæ AB; producendæ verò erunt iſtiuſmodi rectæ ſupra rectam AB, cuiuſmodi ſunt DF, DG, DH, DI, DK, DL,&c. tùm per propoſ.3.lib.1.element. ſumendæ ſupra rectam AB, ex dictis punctis F, G, H, I, K, L, & ex dictis rectis productis, rectæ FM, GN, HO, IP, KQ, LR, æquales ſingulæ, ipſi EC. Denique per puncta extrema S, Q, O, M, C, N, P, R, T, tranſmittenda linea curua ſine angulis quæ erit linea propoſita conchylis deſcripta per puncta.

Fig.393. Alia conſtructio eiuſdem lineæ conchoideos per inſtrumentum fabricandum hoc modo. In aliqua regula recta vocanda normalis excauatus ſit in medio canaliculus AB æqualis, cui ad perpendiculum ex medio pendeat alia regula ED prædictæ perpendicularis, & immobilis. Paretur etiam alia KD regula recta longa, excauando in eius medio alium canalem æqualem, præterquam in extremis, quorum vni Q affigatur graphium ad deſcribendam lineam. In regula ED immobili affigatur immobilis clauus D, qui in canalem dictæ regulæ ED commodè & adæquatè ingrediatur: & in alia regula KD infigatur alius immobilis K clauus qui adæquatè accomodetur canaliculæ regulæ AB. Verum D clauus regulæ ED, debebit iuxta neceſſitatem infigi ſuperius vel inferiùs, verſus E vel D: tùm etiam K clauus regulæ KD, debebit infigi pro neceſſitate vicinius puncto Q, vel remotius ab illo. Parato hoc inſtrumento, ſi commoueatur regula HD, curret eius clauus H intra canalem rectæ AB, & canalis HD cedet clauo immobili D rectæ ED, & ſic Q graphium deſcribet lineam curuam conchylem ſupra rectam AB.

### LEMMA NICOMEDIS.

*Dato quouis angulo rectilineo, & puncto extra lineas eum comprehendentes: ab illo puncto educere rectam ſecantem rectas datum illum angulum continentes, ita vt eius portio inter illas rectas intercepta ſit æqualis datæ rectæ.*

SVppoſitio. Aſſumendo figuram ſuperiorem. In rectæ EB puncto E fiat angulus BEZ æqualis dato angulo rectilineo KAI, per propoſ.23.lib.1.element. Datumque ſit punctum Y, in recta YA perpendiculari ad rectam AK ex quo emittenda ſit recta ſecans in B, & Z, rectas ZE, BE, dictum angulum BEZ continentes, ita vt portio BZ inter dictas rectas ZE, BE, poſita ſit æqualis rectæ datæ CE. Fig.393. & Fig.394.

Conſtructio. Sumatur per propoſ.3.lib.1. elem. recta E cc, æqualis datæ CE. Et per eandem propoſ.3.cit. ex puncto E rectæ ED ſumatur recta EY æqualis rectæ AY: & per propoſ.31. lib. 1. element. ex puncto Y per punctum G, tranſmittatur recta linea YG parallela ipſi EZ, producenda ſupra rectam EB; ſumaturque recta GD æqualis etiam rectæ CE datæ, & traijciatur linea curua conchylis cc D, iuxta alterutrum modorum prædictorum quæ ſecabit rectam EZ productam vltra Z, in puncto Z. Denique dico ducendæ rectæ YZ, ſecantis rectam EB in B, portionem BZ interiectam inter rectas EZ, EB, datum angulum continentes, eſſe æqualem datæ CE.

Quod ſi recta YA perpendicularis ad AK, non atti-

non ætigerit angulum A, ſed ad alterutrum latus illius; ſumenda erit vt antea ex recta ED, recta EY æqualis ipſi AY, & ex EC alia recta E cc æqualis ipſi CE datæ; tùm ex recta EA, vel EB, ſumenda erit recta EG vel vel EF ad idem latus quo recta AA diſtat ab angulo IAK; & ad punctum G vel F, rectæ EG vel EF, ſaciendus angulus æqualis dato IAK; ita vt ſupra rectam AEB ſit recta vltima GZ vel FZ efficiens angulum ſactum: tum linea conchoideos deſcribenda modo prædicto donec ſecet rectam vltimam ductam GZ vel FZ: tunc recta linea YZ ducenda ſecans ambas poſitas angulum ſactum conſtituentes æqualem dato IAK; ſimili modo rectæ portio ductæ exiſtens inter duas angulum ſactum prædictum continentes, erit æqualis datæ CE.

Demonſtratio. Cùm enim ex conſtructione conchylis lineæ, rectæ omnes ab polo Y ductæ ipſam ſecantes; & interpoſitæ inter rectam EB, & ipſam ſint æquales ipſi E cc, quam poſuimus æqualem datæ rectæ CE; erit ipſa BZ æqualis ipſi E cc, ideoque ipſi EC datæ per 1. axiom. lib. 1.

Fig. 395. Iam verò accedamus ad conſtructionem primi propoſiti. Fiat per lemma noſtrum I. ad lib. 2. rectangulum ABCD, ex duabus datis rectis AB, BC; eiuſque duo latera CD, AD, bifariàm diuidantur per propoſ. 10. lib. 1. element. illud in E, hoc verò in F. Productaque vtrimque recta DA, transmittatur recta BE producenda vltra E, donec occurrat recta AD, in G; (occurret enim illi per axiom. 13. lib. 1. element. eò quòd angulus in C ſit rectus angulus facti rectanguli, ideoque per propoſ. 17. lib. cit. debeat angulus CEB eſſe acutus, ideoque illi æqualis DEG per propoſ. 15. lib. cit. debeat etiam eſſe acutus; eſt autem angulus EDG rectus deinceps exiſtens ad angulum rectum D, ſacti rectanguli: cùm ergo recta ED. incidat in rectas DG, EG, faciatque ad eaſdem partes angulos GED, GDE, ſimul ſumptos minores duobus rectis, ipſæ rectæ DG, EG, concurrent in G.) Cumque in triangulis CEB, DEG, ſint oſtenſi duo anguli æquales relatiuè, erunt reliqui tertij anguli æquales per noſtrum 3. coroll. ad propoſ. 32. lib. 1. element. quare per 4. propoſ. lib. 6. element. erit EC ad CB, ſicut ED ad DG; Sed prima & tertia per conſtructionem ſunt æquales, videlicet rectæ EC, ED, ergo per propoſ. 14. lib. 5. element. erunt ſecunda CB, & quarta DG, æquales: Simili modo, erit vt EC ad EB, ſic ED ad EG, cùmque ſint EC, ED æquales, erunt etiàm rectæ EB, EG æquales. Sunt autem per propoſ. 34. lib. 1. element. rectæ BC, AD, æquales, & DG oſtenſa eſt æqualis ipſi BC, ergo per 1. axiom. lib. eiuſdem, erunt DA, DG, æquales rectæ. Præterea per propoſ. 11. lib. cit. 1. ex puncto F, excitetur perpendicularis FH ipſi DA, & interuallo CE, centroque A deſcribatur circulus ſecans in H, rectam FH, ducaturque recta AH, quæ erit æqualis ipſi CE, per naturam circuli. Quòd verò circulus ille factus ſecet rectam FH, ſic probatur, Cùm recta CD, æqualis rectæ AB maiori quàm BC, ſeu AD, per propoſ. 34. lib. 1. element. & ex datis, ſumptæque ſint ſemiſſes EC, AF, ipſarum CD, AD, erunt per propoſ. 15. lib. 5. element. vt CD ad AD, ſic CE ad AF; CD autem prima maior eſt quàm ſecunda AD, ergo ex natura proportionum CE maior erit quàm AF; ergo circulus factus interuallo CE maiore quàm CF, productam FH in infinitum occurrentem ipſi FH ſecabit in H. Porro traijciatur recta GH, cui per propoſ. 31. lib. 1. element. ponatur ex A, recta AI parallela. Tùm per lemma præcedens ducatur recta HK ſecans AI rectam in I, & FA productam in K, ita vt intercepta recta IK inter rectas AI, AK, ſit æqualis rectæ AH, vel CE æqualibus. Sine ope lemmatis & lineæ conchoideos tranſmitti poterit recta HIK, ita vt eius portio IK ſit æqualis rectæ AH: hac ratione. Accomodetur regula recta puncto H, & moueatur circa illud, tanquam circa polum; & circino capiatur interuallum rectæ AH, vnoque pede fixo in rectæ AI, & regulæ ſectione, alter pes perueniat in ſectionis communis rectæ AK, & dictæ regulæ: quod ſi non peruenerit ad hoc punctum ſectionis communis rectæ AK & regulæ; moueatur regula ſæpius donec contigerit prædictum: tunc ducenda recta HIK, erit eius portio IK æqualis ipſi AH per hanc conſtructionem. Poſtremò ex K; per B, tranſmittatur recta KB producenda donec occurrat in L rectæ DC productæ vltra C. Quod recta KBL occurſura ſit rectę DCL in L, ſic oſtenditur; In triangulo BAK, duó anguli BAK, BKA, ſunt minores duobus rectis per propoſ. 17. lib. 1. element. & angulus CDA æqualis angulo BAK per 29. propoſ. lib. eiuſdem; ergo duo anguli CDK, & K, erunt minores duobus rectis, igitur per 13. axiom. lib. cit. occurrent ſibi rectæ KB, DC, in L. Dico autem duas rectas AK, CL, eſſe medias continuè proportionales inter duas datas rectas AB, BC.

Demóſtratio. Quia parallelogrammum eſt rectan-

rectangulum factum ABCD, erit in triangulo LDK rectangulo, latus CB parallelum lateri DK; vnde per propoſ. 2. lib. 6. element. erit LC ad CD, vt LB ad BK: Et quia eſt etiam recta BA parallela ipſi LCD, erit etiam per cit. propoſ. 2. LB ad BK, vt DA ad AK; ergo per propoſ. 11. lib. 5. elem. erit LC ad CD, vt DA ad AK; ſed eſt CD ad CE, vt GA ad DA, eò quòd ſit proportio dupla in illis per constructionem; ergo per propoſ. 23. lib. 5. element. erit LC ad CE, vt GA ad AK; ſed eſt per 2. propoſ. lib. 6. cit. GA ad AK, vt HI ad IK, eò quòd recta AI, ſit poſita parallela ipſi GH rectæ; ergo per prop. 11. lib. 5. cit erit LC ad CE, vt HI ad IK: ſed ſecunda CE eſt æqualis quartæ IK, per constructionem; ergo per coroll. noſtrum 1. ad propoſ. 14. lib. 5. element. erit prima LC æqualis tertiæ HI; quare per 2. axiom. lib. 1. element. tota recta LE erit ęqualis toti rectæ HK. Iam verò quia per propoſ. 6. lib. 2. rectangulum ſub DK, KA, vnà cum quadrato ex AF, æquale eſt quadrato ex FK; ſi addatur commune quadratum rectæ FH, fiet rectangulum ſub DK, KA, vnà cum quadratis ex AF, FH, hoc eſt per 47. propoſ. lib. 1. element. vnà cum quadrato ex AH, vel CE, æqualibus poſitis in constructione, æquale quadratis rectarum FK, FH, hoc eſt quadrato rectæ HK, vel LE, iuxta prop. 47. lib. 1. elem. Verùm per propoſ. cit. 6. lib. 2. rectangulum ſub DL, LC, vnâ cum quadrato rectæ CE, æquale eſt quadrato eidem rectæ LE; igitur per 1. axiom. lib. 1. element. rectangulum ſub DK, AK, vnâ cum quadrato rectæ CE, erit æquale rectangulo ſub DL, LC, vnà cum quadrato rectę CE: Quod ſi commune quadratum rectæ CE detrahamus ex illis æqualibus, relinquetur per 3. axiom. lib. 1. elem. rectangulum ſub DL, LC, ęquale rectangulo ſub DK, AK. Quare iuxta propoſ. 16. lib. 6. element. erit DL ad DK, vt AK ad LC. Sed quia recta BA eſt parallela rectæ LD, erit per coroll. propoſ. 4. lib. 6. element. triangulum LDK ſimile triangulo BAK, ergo per 1. def. lib. eiuſdem erit LD ad DK vt BA ad AK; igitur per 11. prop. lib. 5. element. erit AB ad AK, vt AK ad LC. Sed CB recta cùm ſit parallela AK, erunt per propoſ. 29. lib. 1. elemen. tanguli CBL, AKB æquales; & ſunt anguli in A & C, recti, ergo in triangulis CLB, ABK, reliqui tertij anguli medijs litteris deſignati, erunt æquales per coroll. noſtrum 3. ad propoſ. 32. lib. 1. element. ideoq́ue per 4. propoſ. lib. 6. in dictis triangulis erit vt AB ad AK, ita LC & CB; denique vti oſtendimus erit AB ad AK, vt AK ad LC, & vt LC ad CB. Quare duæ rectæ lineæ inuentæ erunt AK, LC, continuè proportionales, inter duas datas rectas AB, BC.

## NONVS MODVS

### *Dioclis.*

## Inueniendi duas rectas continuè proportionales inter duas datas rectas.

AD hunc finem præmittit Author iſte duo lemmata ſequentia, quorum ſecundum eſt abſolutè neceſſarium, ad breuius ac tutius concludendum intentum.

### LEMMA I.

*Quatuor rectas lineas continuè proportionales inuenire, ad alias duas continuè proportionales inueniendas inter duas datas.*

COnſtructio. Circulus ABCD deſcribatur ex centro E, cum diametris ſuis AC, BD, ſe mutuò in E ad angulos rectos ſecantibus iuxta propoſ. 11. lib. 1. element. ſumãtur præterea duo arcus æquales DF, DG, ducaturq́ue recta CG; & per F agatur recta parallela FK, ipſi BD, ſecans rectam obuiam CG in H puncto. Dico rectas FK, KC, eſſe medias continuè proportionales inter rectas AK, KH. Denique per prop. 31. lib. 1. elem. agatur recta GL parallela ipſi BD; & ducantur rectæ EF, EG. Fig 396.

Demonſtratio. Per coroll. noſtrum ad propoſ. 27. lib. 3. element. anguli LEG, KEF, inſiſtentes arcubus DG, DF æqualibus, erunt æquales; ſuntq́ue anguli in L & K recti, eò quòd ſint rectis in E æquales per propoſ. 29. lib. 1. element. erunt iuxta coroll. noſtrum 3. ad propoſ. 32. lib. 1. cit. in triangulis ELG, EKF, reliqui anguli LGE, KFE, æquales; ideoq́ue triangula illa erunt ęquiangula: quare per 4. prop. lib. 6. element. erit vt EG ad EL, ſic FE ad EK; prima verò ac tertia ſunt æquales ex natura circuli, ergo ſecunda EL & quarta EK, erunt æquales per propoſ. 14. lib. 5. element. Simili modo quia eſt EG ad GL, vt EF, ad FK, erunt GL, FK ęquales rectæ. Quod ſi ex æqualibus EA, EC, tollantur æquales EL, EK, relinquentur per 3. axiom. lib. 1. element. reliquæ AL, CK, æquales: hiſq́ue æqualibus ſi adijciatur communis LK, erunt totæ AK, CL æquales per 2. axiom. lib. cit. Quia verò recta KH parallela fuit poſita ipſi ED, & etiam recta LG parallela

ipſimet ED, erunt per propoſ. 30. lib. 1. elem. parallelæ inter ſe, rectæ KH, LG: igitur per coroll. prop. 4. lib. 6. element. erit triangulum KCH, toti triangulo LCG ſimile; vnde per def. 1. lib. 6. cit. erit CL ad LG, vt CK ad KH: ſed eſt per noſtrum coroll. ad propoſ. 7. lib. 5. element. CL ad LG, vt AK ad KF, quia ſunt æquales reſpectiuè probatæ; ergo per prop. 11. lib. cit. 5. erit AK ad KF, vt CK ad KH. Iam verò ſi rectæ AF, FC, ducerentur, reſultaret angulus AFC rectus in ſemicirculo per prop. 31. lib. 3. elem. ergo per coroll. 1. lib. 6. element. propoſ. 8. recta FK, erit media proportionalis inter rectas AK, KC; ita vt ſit AK ad KF, vt KF ad KC. Ergo erit reſumendo prædicta AK ad KF, vt KF ad CK, & CK ad KH; hoc eſt KF & CK, erunt mediæ proportionales continuè, inter rectas AK, KH.

## LEMMA II.

*Lineam curuam Ciſſioeidcam ſeu hederaceam deſcribere; cuius beneficio duæ rectæ lineæ continuè proportionales inueniantur inter duas datas rectas.*

Fig. 397. Circulum diuidant ad angulos rectos in centro eius T, duæ diametri AB, CD, ductæ per propoſ. 11. lib. 1. element. Et ſemicircumferentiæ ACB, ADB, diuidantur ad libitum in arcus æquales quocumque numero: ab punctis D & C. Nos aſſumimus quatuor hinc & inde; & quidem verſus A, hos quatuor CE, EF, FG, GA; & DE, EF, FG, GA: at verò verſus B, arcus hos quatuor CH, HI, IK, KB; & DH, HI, IK, KB. Iunganturque aduerſa puncta eiſdem characteribus deſignata, rectis lineis, vt EE, FF, &c. Tùm ex B vel A, puncto, tranſmittantur rectæ lineæ ad puncta prædicta extrema dictarum linearum verſus vnam partem exiſtentia: has ducimus ex puncto B, quæ ſecabunt occurrentes ipſas dictas rectas; BG quidem vicinior diametro BA, primam obuiam KK, in puncto N; ſequens BF, ſecundam II, in puncto M; ſequens BE, tertiam HH, in puncto L; ſequens BD, quartam CTD in puncto D, vbi deſinit linea ciſſiocidea deſcribēda conſtanti manu, ſine angulis, BNMLD. Verùm vt certius tranſmittatur dicta curua linea, præſertim inter puncta remotiora, vti inter L & D; oportebit arcus intermedios CH, DH, CE, DE, bifariàm diuidere in R, & P, per propoſ. 30. lib. 3. element. ac ducere rectas PP, RR; rectaque alia ex B traducenda ad P extremum exiſtens in alio quadrante circuli diuerſo ab eo in quo exiſtit dicta curua linea, hæc linea BP, ſecabit rectam RR in puncto O, per quod ex D in L, certius delineabitur dicta linea ciſſiocidis. Quę animaduerſio etiam vſui erit ad alia puncta dictæ lineæ inuenienda intermedia.

Ex conſtructione huius lineæ curuæ BNMLOD, elicitur proprietas iſta, vt ſi ex aliquo puncto arcus quadrantis BD in quo eſt linea hederacea, recta linea ducatur parallela diametro DTC circuli continentis illum quadrantem, quæ ſecabit obuiam hederaceam lineam in aliquo puncto, per quod ſi ex B alia chorda tranſmittatur in eodem circulo, ſecabit alterum quadrantem AD eiuſdem circuli, tantuſque erit arcus ab puncto D ad extremum chordæ huius quantus erat arcus inter D & extremum lineæ rectæ ductæ parallelæ ipſi DTC.

His iactis lemmatibus veluti fundamentis veniamus ad inuentionem duarum rectarum linearum continuè proportionalium inter duas datas rectas, per primum lemma.

Suppoſitio. Inter duas datas rectas AB, BC, reperiendæ ſint duæ aliæ rectæ lineæ N, O, continuè proportionales. Fig. 398.

Conſtructio. Ad extremum B maioris rectæ, erigatur perpendicularis BC, æqualis ipſi minori BC datæ, per propoſ. 11. & 3. lib. 1. element. & centro B, interuallo BA maioris deſcribatur circulus AFDE, ad cuius circumferentiam producatur in D recta AB, & BC in F & E: tùm ex A, per C, tranſmittatur chorda ACG. Deinde aſſumatur punctum H in quadrante DE, ita vt ex H emiſſa recta HK parallela ipſi EB, ſecanſque in L rectam AG, & ex D per L traiecta recta DLM chorda, ſit arcus EM æqualis arcui EH. Quod fiet attentando, emittendoque ex diuerſis punctis quadrantis DE, multas occultas rectas parallelas ipſi BE ſecantes rectam AG, & per puncta harum ſectionum communium ipſius AG, & parallelarum dictarum ex D tranſmittendo rectas chordas ſecantes arcum AE quadrantis, donec arcus prædicti ęquales inueniantur, vt ſunt in figura arcus EH, EM. Dico tunc rectas KH, DK, eſſe medias continuè proportionales, inter rectas AK, KL, per lemma 1. Deinde per 12. prop. lib. 6. element. tribus datis rectis AK, KH, AB, quarta proportionalis N reperiatur; & iterum tribus datis rectis KH, DK, N, quarta O reperiatur proportionalis. Dico tunc duas rectas N, O, eſſe medias continuè proportionales, inter duas datas AB, BC.

Demōſtratio. Cùm rectæ LK, CB, ſint parallelæ poſitæ, & angulus in B ſit rectus, erit angulus in K rectus per 29. prop. lib. 1. elem. Cùm ergo iſta duo triangula rectangula

BAC,

BAC, KAL, habeant communem angulum in A, reliqui tertij anguli BCA, KLA, erunt. æquales per coroll. noſtrum 3. ad propoſ. 32. lib. 1. elem. quare ipſa triangula dicta erunt æquiangula: ergo per propoſ. 4. lib. 6. elem. erit vt AK ad KL, ita AB ad BC. Cumque ſit AK ad KH, vt KH ad KD, & vt KD ad KL per conſtructionem; & iuxta definit. 10. lib. 5. element. AK ad KL habeat proportionem triplicatam, quam habet AK ad KH; ſitque per conſtructionem AB ad N vt AK ad KH; erit etiam iuxta propoſ. 11. lib. 5. element. proportio triplicata AK ad KL, eius quam habet AB ad N: Sit verò probatum eſſe AK ad KL, vt AB ad BC; erit etiam per cit. propoſ. 11. lib. 5. element. proportio triplicata AB ad BC, eius quam habet AK ad KH, vel AB ad N. Sed per conſtructionem eſt AK ad KH, vt AB ad N; tùm KH ad DK vt N ad O; tum DK ad KL, vt KH ad DK, vel vt AK ad KH; ſitque proportio AK ad KL triplicata rationis AB ad N, oſtenſa; ſitque AB ad BC etiam triplicata rationis AB ad N; erit O ad BC, vt DK ad KL. Cumque ſint continuè proportionales AK, KH, DK, KL, erunt iſtæ aliæ continuè proportionales AB, N, O, BC, quæ cum illis eandem planè rationem habere oſtenſæ ſunt continuam.

Breuius ſic demonſtrabitur. Cùm ſit oſtenſum eſſe vt AK ad KL ita AB ad BC, & ſit per def. 10. lib. 5. element. proportio triplicata AK ad KL, proportionis AK primæ ad ſecundam KH; erit etiam per propoſ. 11. lib. cit. proportio AB ad BC triplicata proportionis AK ad KH: ſed eſt per conſtructionem vt AK ad KH, ita AB ad N; ergo etiam erit proportio AB ad BC triplicata proportionis AB ad N, primæ ad ſecundam, vel ſecundæ N ad O tertiam; cùm ſit etiam vt KH ad KD, ita N ad O. Igitur iuxta conuerſionem definitionis 10. cit. lib. 5. erit BC quarta continuè proportionalium AB, N, O, BC.

Age verò proferamus inuentionem earundem duarum rectarum inter duas datas per ſecundum lemma, hoc eſt per lineam ciſſoideam, quandoquidem difficile eſt punctum H inuenire in arcu DE, ex quo ducenda ſit recta HK parallela ipſi EB, cum alijs adiunctis circumſtantijs.

*Fig. 397.* Suppoſitio. Inter duas rectas AB, BC, inueniendæ ſint duæ rectæ aliæ lineæ continuè proportionales per ſecundum lemma.

Conſtructio. Ex diametro circuli AB, detrahatur per 3. propoſ. lib. 1. element. recta AB æqualis datæ maiori è duabus AB, BC datis, producendo illam vltra B ſi opus ſit: tùm per propoſ. 11. lib. eiuſdem ad extremum B rectæ AB ſumptæ, excitetur recta linea BC perpendicularis ipſi AB, æqualiſque datæ minori BC: & ex puncto A ad C punctum huius perpendicularis traijciatur recta AC, quæ ſecabit obuiam ciſſoideam in puncto Q; ex quo agatur recta SQV, parallela ipſi DT, ſecanſque in S ſemidiametrum TB circuli, & quadrantem BD in V: Tùm per cit. prop. 3. lib. 1. element. detrahatur ex recta SV, recta SX æqualis ipſi rectæ SB, & per punctum X ex puncto A, emittatur recta AX, quæ ſecet in Y rectam BC, producendam vltra C, Denique ex A per V punctum, tranſeat recta alia AV &, quæ ſecet in &, rectam eandem BC perpendicularem. Dico autem rectas B &, BY, eſſe duas rectas continuè proportionales inter duas datas AB, BC.

Demonſtratio. Quia per conſtructionem lemmatis ſecundi ſeu lineæ ciſſoideæ punctum Q illius inuentum eſt per quod ducendo rectam SQV parallelam ipſi DT, & ſecantem quadrantem BD, in V, & ſemidiametrum TB in S, tùm ducendo rectam chordam ex B, per ipſum Q puncto in linea hederacea, BQ ſecantem alterum quadrantem DA in puncto D, quod tanto interuallo diſtat ab puncto D, quanto punctum V diſtat ab eodem; erunt per lemma 1. quatuor rectæ iſtæ AS, SV, SB vel SX æquales poſitæ, SQ, continuè proportionales. Et quia duæ rectæ SV, B&, fuerunt poſitæ parallelæ ipſi rectæ DT, erunt per prop. 30. lib. 1. element. inter ſe parallelæ: ergo per coroll. prop. 4. lib. 6. element. erunt triangula ASV, AB&, & quæ in eis comprehenduntur triangula, æquiangula. Quare per def. 1. lib. cit. 6. erit vt AS ad SV, ita AB ad B&; & per coroll. noſt. ad propoſ. 4. cit vt SV ad SX, ita B& ad BY; & vt SX ad SQ, ita BY ad BC: ſed illæ primæ quatuor AS, SV, SX, SQ, ſunt oſtenſæ continuè proportionales, ergo per noſt. coroll. ad modum 4. Eratoſthenis, etiã poſtremæ quatuor oſtenſæ referri eodem modo quo illæ quatuor, erũt cõtinuè proportionales AB, B&, BY, BC. Igitur inter duas datas rectas AB, BC, inuenimus duas alias B&, BY, continuè proportionales.

## DECIMVS MODVS

### *Spori.* 1

### Inueniendi duas rectas lineas continuè proportionales, inter duas datas rectas.

SVppoſitio. Oporteat inuenire duas rectas lineas BH, X, inter duas rectas AB, BC, continuè proportionales. *Fig. 399*

ob angulos in B & D rectos: igitur per propoſ. 29. lib. eiuſdem, anguli in K erunt recti. Triangulum igitur reſultans AKC, habebit angulos AKC, & KAC, minores duobus rectis per propoſ. 17. lib. cit. 1. ergo etiam anguli duo BAC, & ABE, erunt ſimul ſumpti minores duobus rectis, cùm ſint æquales prædictis duobus AKC, KAC; ergo per axiom. 13. lib. 1. element. concurrent AC, BD, productæ ad partes C, D, in puncto E, quod erat oſtendendum. Inſuper ex puncto A ad rectam BD, traijciatur quæuis recta AF, quæ non incidat in punctum D, imo ſatis remotè ab illo; tùm ex puncto F, per propoſ. 31. lib. 1. element. ponatur recta FG parallela ipſi BA, ſecans in G rectam AE; & ex puncto G, alia recta GH, parallela ipſi AF, ſecans in H rectam AD; & ex puncto H alia recta HI parallela ipſi FG, ſecans in I rectam AE; tùm tranſmittatur recta ID, quæ ſi fuerit parallela ipſi GH, vel AF, hactenus bene proceſſit operatio: Quod ſi recta ID non fuerit parallela dictis rectis AF, GH, parallelis; erunt aliæ rectæ ducendæ AF, FG, GH, HI, ID, modo prædicto donec ſint parallelæ rectę AF, GH, ID, inuicem. Sed eſto ſint parallelæ iſtæ tres poſtremæ, tunc dico duas rectas FG, HI, eſſe continuè proportionales, inter duas datas AB, DC.

Demonſtratio. Imprimis in triangulo ABE, ob parallelas rectas AB, GF, HI, DC, poſitas, erunt triangula ſimilia ABE, GFE, IHE, CDE, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. element. tùm in triangulo AFE, ob parallelas rectas poſitas AF, GH, ID, erunt triangula ſimilia AFE, GHE, IDE. Iam verò per ſecundam propoſ. lib. 6. cit. erit vt AE ad EG, ſic BE ad EF; tùm vt AE ad EG, ſic FE ad EH; quare per propoſ. 11. lib. 5. element. erit vt BE ad EF, ſic EF ad EH. Præterea erit vt GE ad EI, ſic FE ad EH; tùm vt GE ad EI, ſic EH ad ED; ergo per cit. 11. propoſ. lib. 5. erit vt FE ad EH, ſic EH ad ED: Continuè igitur erunt proportionales iſtæ quatuor rectæ oſtenſæ BE, EF, EH, ED. Et quia eſt per def. 1. lib. 6. element. vt EB ad BA, ſic EF ad FG; & permutando iuxta propoſ. 16. lib. 5. element. vt EB ad EF, ſic AB ad FG: tùm vt EF ad FG, ſic EH ad HI; & permutando vt EF ad EH, ſic FG ad HI; tùm vt EH ad HI, ſic ED ad DC, & permutando vt EH ad ED, ſic HI, ad DC. Cumq; illæ quatuor EB, EF, EH, ED, ſint continuę proportionales, erunt iſtæ quatuor AB, GF, IH, CD, quæ eodem modo referuntur quo illæ, etiam continuè proportionales. Reperimus ergo inter duas datas AB, CD, alias duas GF, IH, continuè proportionales, ſicut fuit imperatum.

Verùm quia hic Author aduertit difficultatem deſcribendi dictas intermedias parallelas rectas AF, GH, ID, ſuadet vti inſtrumento ex tabellis diuerſis rectangulis conſtante, quæ in angulis inferioribus duas volubiles regulas rectas habeant, ex quarum reuolutione & compoſitione aduerti poſſit an ſint parallelæ dictæ rectæ; tunc enim ducendo dictas parallelas per has regulas volubiles compoſitas, & alias FG, HI, perpendiculares ipſi BE toti iuxta latera tabellarum recta ipſimet BE rectæ, inuentum erit imperatum. In figura noſtra, rectangulum HO, refert tabellam primam, & rectæ FA, HG, præſeferunt rectas regulas compoſitas parallelas, rectangulum verò HC, deſignat ſecundam tabellam, & recta DI, regulam poſitam parallelam alijs FA, HG, alterius tabellæ HO.

## XII. AC XIII. MODVS

## *Ioannis Baptiſtæ Villalpandi è Societate noſtra.*

### Inueniendi duas rectas lineas continuè proportionales, inter datas duas rectas.

ANtequam ad praxim veniamus propoſiti, neceſſariò cogimur præmittere hæc ſequentia lemmata quę docebunt modum deſcribendi duas diuerſas lineas proportionatrices vocatas ab hoc Authore, quarum beneficio inueniemus propoſitum; & alia conſerentia ad demonſtrationem.

LEMMA I.

***Si plures ſemicirculi ſe mutuò interiùs contingant, & à puncto contactus ducantur quotuis rectæ lineæ; ea omnes præter vnam quæ d[illegible] ſemicirculos poteſt tangere, ſecabuntur ab eiſdem ſemicirculis in ratione diametrorum.***

SVppoſitio. Quatuor ſemicirculi ABD, FLD, KTD, PhD, ſe interius in D puncto Fig. 401
communi contingant, (non enim in pluribus punctis ſe mutuò contingere poſſunt duo circuli, per prop. 13. lib. 3. element.) ſitque circuli maximi diameter DA, & paulò minoris diameter AF, & tertij paulò minoris ſecundo, diameter DK, denique minimi diameter DP;

certum eſt per propoſ.11.lib.3.elem. Diametrum AD circuli maximi incedere per centra reliquorum circulorum; & ſic de reliquis diametris maiorum circulorum dictorum; ideoque diametri dictæ omnes, erunt in vna eademque recta linea. Tùm ex puncto D contactus dati, & extremo diametri AD maximi circulorum datorum, erigatur recta linea DQ perpendicularis ipſi AD, hæc per prop. 16. lib.3. element. tota extra circulos dictos cadet, vel illos tanget per coroll. cit. propoſ. Denique ſi ex eodem puncto D, educantur quotuis rectæ lineæ, exempli gratia DB, DC, DM, diuerſæ ab DQ: Dico eas ſecare dictos ſemicirculos per cit. propoſ.16. & ipſas ſecari ab illis ſemicirculis in ratione diametrorum DA, DF, DK, DP; hoc eſt rectam DB, ad rectam DL, DT, Dh; rectamque DC, ad DN, Dg, Dm; rectamque DM, ad Df, Dl, Dp, eandem habere rationem, quam recta DA ad DF, DK, DP. Tranſmittantur denique rectæ AB, FL, KT, Ph.

Demonſtratio. Imprimis iuxta propoſ 31. lib.3. elem. anguli ABD, FLD, KTD, PhD, erunt recti in dictis ſemicirculis; ideoque per prop.28. lib.1. elem. rectæ lineę AB, FL, KT, Ph, erunt parallelæ. Quare per 2. prop. lib.6. elem. latera DA, DB, trianguli ADB, erunt ſecta proportionaliter. Simili modo ſecta erunt proportionaliter latera DA, DC; tùm DA, DM, ſi concipiantur ductæ rectæ AC, FN, &c. itemque rectæ AM, Ff &c. probauimus ergo intentum.

### COROLLARIVM I.

Fig.401 *Si diametri DA, DF, DK, DP, eſſent continuè proportionales; etiam ſegmenta rectarum DB, DC, DM, intercepta inter D & inter eaſdem circumferentias ſemicirculorum, erunt continuè proportionalia.*

### COROLLARIVM II.

Fig.401 *Si recta applicata DF, DL, DN, eſſent continuè proportionales, etiam DA, DB, DC, itemq; DK, D[illegible]D g, erunt continuè proportionales.*

CVm enim ſit vt DA ad DF, ita DB ad DL, & DC ad DN; erit per prop.16. lib. 5. elem. permutando vt DA ad DB, & DB ad DC, ſic DF ad DL, & DL ad DN.

### LEMMA II.

*Si duo ſemicirculi ſe mutuò interius tangant in extremitate diametri, ſitq; diameter interioris ſemiſſis diametri exterioris, & ex puncto contactus ducatur linea recta ſecans vtriuſque ſemicirculi peripheriam, atque ex puncto interſectionis cum ſemicirculo interiori demittatur linea recta perpendicularis in diametrum, & denique ex puncto diametri, in quod cadit ducta perpendicularis, applicetur ad rectam priùs ductam, linea æqualis ſegmento diametri intercepto inter punctum contactus & perpendicularem: tota recta priùs ducta ex puncto contactus vſque ad peripheriam exterioris circuli; & dupla eius quæ ad eandem fuit applicata, conſtituunt duas medias continuè proportionales, inter diametrum exterioris ſemicirculi, & inter illud ſegmentum lineæ primò ductæ, quod intercipitur inter punctum contactus, & inter punctum, ad quod poſtremò altera linea applicata fuit.*

SVppoſitio. Deſcriptus ſit centro C, ſemicirculus ADB, circa diametrum AB; & circa eius ſemiſſem BC, ſemicirculus BEC, qui priorem contingat in puncto B; ex quo emiſſa recta BD, ſecet vtriuſque ſemicirculi peripheriam, in D, & E: tùm per propoſ.12. lib.1. elem. ex puncto E ſemicirculi minoris ſeu interioris, demittatur recta EF ad diametrum BC perpendicularis: & ipſi BD applicetur ex puncto F, recta FG, æqualis ipſi BF. Dico rectas DB, & duplam ipſius BF, eſſe duas medias rectas continuè proportionales inter rectas duas AB & BG. Hoc eſt ſi ipſi FB, vel FG, accipiatur æqualis FH per prop. 3 lib.1. elem. rectas AB, BD, BH, BG, eſſe continue proportionales. Fig.402.

Conſtructio. Tranſmittantur rectæ HD, HG, HE, AD.

Demonſtratio. In triangulis EFB, EFH, quandoquidem per conſtructionem duo latera FB, FH, ſunt æqualia, & latus EF commune, ſunt anguli per conſtructionem circa F recti æquales comprehenſi ab dictis lateribus; erunt baſes per propoſ.4. lib.1. elem. EB, EH, æquales: ſed per lemma præcedens recta BD ſecatur ab ſemicirculis ADB, CEB, in ratione diametrorum BCA, BC; & diameter BC ex datis eſt ſemiſſis totius alterius diametri BCA, ergo recta BE, erit ſemiſſis totius rectæ BED; æquales ergo erunt rectæ BE, ED; igitur per 1. axiom. lib.1. element. tres rectæ lineæ EB, EH, ED, æquales erunt: quare ſi centro E, interuallo EB, vel ED, vel EH, circulus deſcribatur, circumferentia eius incedet per extrema dictarum aliarum rectarum

rum æqualium iuxta 25. axiom. lib. 1. elem. & ſic angulus BHD, trianguli BHD, exiſtens in ſemicirculo illo deſcribendo, erit per 31. prop. lib. 3. element. rectus. Ex eiſdem principijs allatis, centro F ſi circulus deſcriberetur interuallo FB, incederet eius circumferentia per G, & H, extrema aliarum duarum rectarum FG, GH, æqualium ipſi FB; & angulus HGB, trianguli HGB, erit rectus. Habemus ergo in triangulo BHD, ex angulo eius recto in H, demiſſam rectam HG perpendicularem ad BD latus oppoſitum dicto angulo recto; igitur per coroll. propoſ. 8. lib. 6. element. erit recta BH media proportionalis inter BD & BG: Eſt autem etiam & BD media proportionalis in triangulo rectangulo ADB, (ob angulum rectum in D per propoſ. 31. lib. 3. element. & demiſſam ex eo rectam perpendicularem ad latus AB ei oppoſitum) inter rectas AB, BH, per cit. coroll. propoſ. 8. lib. 6. element. Quatuor igitur erunt rectæ lineæ continuè proportionales AB, BD, BH, BG. Demonſtrauimus ergo intentum.

## COROLLARIVM NOSTRVM

*Si duo ſemicirculi maior & minor deſcribantur ſupra eandem rectam lineam ad eaſdem partes; maioriſq; diameter ſit dupla diametri minoris, & communem habeant terminum vnum iſta diametri: recta linea ſiu chorda ab hoc communi termino ducta in maiore ſemicirculo, ſecabunt minorem ſemicirculum; & biſariàm ſecabuntur in puncto ſemicirculi minoris.*

Fig. 402 IN constructione lẽmatis ſuperioris oſtendimus rectam BD ſecare circulum minorem CEB, & punctum E oſtendimus in hoc lemmate, diuidere totam DB, biſariàm. Et ſic de alijs demonſtrabitur.

## LEMMA III.

*Erectâ in ſemicirculo à quolibet puncto diametri ad ipſam diametrum perpendiculari, & ab vno terminorum eiuſdem diametri ductis pluribus lineis, quæ ſecent circumferentiam & perpendicularem ſiue intra ſiue extra ſemicirculum: illa linea quæ tranſit per interſectionem perpendicularis cum circumferentia, eſt media proportionalis inter illam cuiuſuis alterius lineæ partem, quæ continetur inter terminum diametri, & circumferentiam, & illam quæ intercipitur inter eundem terminum & perpendicularem.*

SVppoſitio. In ſemicirculi ABCD diametro AD, ſumpto quolibet puncto F, erecta ſit perpendicularis FB ſecans ipſum circulum in B, & producta vltra B ſeu vltra circulum: tùm ab extremo D diametri traductæ ſint plures rectæ lineæ, vna ad punctum B, aliæ vtrumque, quales ſunt DH, DE, ſecantes circumferentiam in H & C, & rectam FB in I & L: Dico rectam BD eſſe mediam proportionalem tùm inter rectas HD, DI, tùm inter rectas DL, DC. Fig. 403.

Conſtructio. H & B, puncta circumferentiæ ſemicirculi, nectantur chorda HB, tùm etiam puncta B & C, reuinciantur chorda BC. Sic & puncta AB, chordâ AB.

Demonſtratio. Quandoquidem duo anguli DHB, DAB, inſiſtunt eidem arcui BD, erunt per coroll. noſtrum ad propoſ. 27. lib. 3. element. inter ſe æquales. Et quia in triangulo ABD angulus ABD eſt rectus per propoſ. 31. lib. cit. & ab hoc angulo demiſſa eſt perpendicularis BF ad baſim AD, erit per propoſ. 8. lib. 6. element, triangulum DBF ſimile triangulo DAB, & angulus DBF æqualis angulo DAB; ergo per 1. axiom. lib. 1. element. anguli DHB, DBF, vel DBI in triangulis DHB, DBI, erunt æquales: ſed hæc triangula communem habent angulum in D; ergo per coroll. noſtrum 3. ad propoſ. 32. lib. 1. element. reliquos tertios angulos habebunt æquales. Cùm ergo hæc triangula ſint æquiangula, erit per propoſ. 4. lib. 6. element. vt HD ad DB, ita DB ad DI. Ex eiſdem principijs, ſi ex puncto C demittatur perpendicularis CK ad diametrum AD per propoſ. 12. lib. 1. element. ſecans rectam BD in L; probabuntur triangula DBC, DCL æquiangula; tùm æquiangula triangulo DBE; ideoque eſſe ED ad DB, vt DB ad DC. Et ſic de cæteris. quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM.

*Si in ſemicirculo ex eius diametro erigatur perpendicularis, & ab vno terminorum diametri ducantur quotcumque rectæ ſecantes illam perpendicularem & circumferentiam: Rectangula comprehenſa ſub ſegmentis illarum quæ intercipiuntur inter circumferentiam & terminum diametri, & inter eundem terminum & perpendicularem, omnia eſſe æqualia.*

CVm enim ſit oſtenſum eſſe HD ad DB, vt DB ad DI, erit per propoſ. 17. lib. 6. element. rectangulum ſub HD & DI, æquale quadrato rectæ DB, Et quia etiam probatum eſſe ED ad DB, vt DB ad DC; erit etiam per Fig. 403.

cit. propoſ. 17. rectangulum ſub ED & BC, æquale quadrato rectæ DB. Ergo per 1. ax. lib. 1. element. erit rectangulum ſub HD & DI, æquale rectangulo ſub ED & DC. quod erat explicandum.

## LEMMA IV.

*Si in ſemicirculo intelligatur ex quouis puncto diametri eius erecta perpendicularis recta ſecans circumferentiam; & ab extremo vno diametri dicta ducta ſit chorda dicti ſemicirculi ſecans dictam perpendicularem cum hac conditione, vt ſumpta ex diametro recta ab eodem extremo dicto æquali ſemiſſi prædictæ chordæ, recta linea ducta ab extremo huius rectæ modo ſumptæ diuerſo ab extremo communi illi & diametro, ad prædictæ ſectionis commune punctum, perpendicularis rectæ, & chordæ prædictarum, ſit æqualis ſemiſſi dictæ chordæ: erunt tota iſta chorda, & portio eius inter dictum extremum diametri, & ſectionis prædictæ punctum, duæ rectæ lineæ continuè proportionales inter diametrum ſemicirculi, & portionem eius aſſumptam inter extremum aſſumptam dictæ diametri, & punctum è quo ipſi educta eſt perpendicularis.*

Fig.405. SVppoſitio. In ſemicirculi AMB, diametro AB ſumptum ſit punctum P; ex quo per propoſ. 11. lib. 1. element. erecta ſit recta PM perpendicularis ad ipſam AB diametrum, ſecanſque in M circumferentiam ſemicirculi dati: tùm ab B extremo diametri ducta ſit chorda BC ſecans in N, prædictam perpendicularem PM, cum hac conditione, vt ex diametro BA, ex eodem eius extremo dicto B, ſumpta recta BR æquali ſemiſſi prædictæ BC ductaque recta RN ſit æqualis prædictæ ſemiſſi rectæ BC vel ipſi BR. Dico quod recta chorda BC prædicta, eiuſque portio BN quæ eſt inter extremum B, & N punctum interſectionis mutuæ dictarum rectarum BC chordæ, & PM perpendicularis, ſint duæ rectæ lineæ continuè proportionales inter duas rectas BA, BP, diametrum videlicet ſemicirculi, & portionem eius aſſumptam BP, ab cuius extremo P, erecta eſt perpendicularis PM.

Conſtructio. Centro R, interuallo RB deſcribatur ſemicirculus BNF, is tranſibit per N punctum iuxta axioma 25. lib. 1. elem. tùm rectæ AC, FN, emittantur.

Demonſtratio. Reſultabunt triangula ACB, FNB, rectangula, ob angulos in C & N, rectos in ſemicirculis per propoſ. 31. lib. 3. element. eruntque rectæ AC, FN, parallelæ per propoſ. 28. lib. 1. element. ideoque etiam anguli CAB, NFB, æquales erunt per propoſ. 29. lib. 1. cit. ſed & angulum communem obtinent in B, dicta triangula ACB, FNB, quæ ideo æquiangula erunt. Quare per 4. propoſ. lib. 6. element, erit vt AB ad BC, ita FB ad BN; ſed FB eſt æqualis ipſi BC, eò quòd ſint ſingulæ duplæ ipſius BR; ergo erit vt AB ad BC, ita BC ad BN, iuxta propoſ. 7. lib. 5. element. Quoniam autem in triangulo rectangulo FNB, perpendicularis recta NP demiſſa eſt ab angulo recto ad baſim FB; erit per coroll. propoſ. 8. lib. 6. element. recta BN media proportionalis inter rectas FB, BP, hoc eſt inter BC, BP, nam BC, BF, ſunt æquales oſtenſæ. Igitur quatuor erunt lineæ rectæ continuè proportionales oſtenſæ, AB, BC, BN, BP, ſicuti fuit propoſitum.

## LEMMA V.

*Lineam quandam curuam deſcribere, cuius beneficio inter quaſcumque duas rectas datas, duæ mediæ inueniantur. Vocetur autem proportionatrix prima.*

SEmicirculi ADB, diameter AB, biſariàm ſecetur in O per propoſ. 10. lib. 1. element. Fig.404.
& ſemidiameter CB iterum biſariàm diuidatur in P, quo vt centro deſcribatur ſemicirculus interuallo PB, vel PC, qui tangat alium dictum ſemicirculum; ſi enim ſecaret in duobus punctis eum ſecaret, vtpote in Q & B; per propoſ. 10. lib. 3. element. Iam verò ductis rectis AQ, CQ, QB, angulus AQB in ſemicirculo maiore erit rectus per propoſ. 31. lib. 3. element. tùm etiam angulus CQB in ſemicirculo minore erit rectus, æqualiſque prędicto recto iuxta 12. axiom. lib. 1. elem. pars & totum, contra 8. axiom. lib. cit. abſurdum hoc condemnat falſitatis prædictam poſitionem, ſtabilitque hoc vt ſi duo circuli habeāt communem terminum B pro diametris ſuis in eadem recta ACB exiſtentibus ſe mutuò non ſecent, cumque habeant commune punctum B in eo ſe tangant. Tùm ex puncto B ducantur plurimæ chordæ in ſemicirculo maiore quæ ſemicirculum minorem etiam ſecabunt vti oſtendimus in conſtructione lemmatis primi. Aſſumatur autem vna BED, ambos ſemicirculos ſecans, maiorem in D, minorem in E, in qua recta punctum G reperiemus per quod linea curua proportionatrix incedet: quod verò dicimus de iſta recta, ita erit dicendum de reliquis dictis chordis. De tota BA, reſcindatur recta BF æqualis ipſi BE per propoſ. 3. lib. 1. element. & centro F, interuallo BE vel BF æqualibus, deſcribatur arcus circuli ſecans chor-

chordam BED in G, punctum G erit inuentum per quod proportionatrix linea tranſibit. Quod ſi eadem præſtemus in reliquis chordis ductis, puncta in eis reperiemus per quæ tranſmittenda erit curua linea AGB proportionatrix iſta prima, ſine vllis angulis, deſinens in duobus A & B extremis diametri AB ſemicirculi maioris. Porrò conſtat ex coroll. noſtro ad 2. lemma, rectam BED chordã, & ſic de alijs, ſecari bifariàm in E, ab circumferentia ſemicirculi minoris. Igitur ſi ex diametro BA, ex puncto B abſcindantur rectæ lineæ æquales chordis minoris circuli, & ab earum extremis propriis ad puncta interſectionum proportionatricis huius lineæ primæ & dictarum chordarum totalium, rectæ lineæ ducantur, ipſæ erunt æquales ipſis proprijs chordis minoris ſemicirculi, quæ ſunt ſemiſſes totalium propriarum chordarum maioris ſemicirculi, vt patet ex conſtructione facta, in qua FG & BE rectæ ſunt æquales. Hoc poſito veniamus ad praxim reperiendi propoſitum.

Suppoſitio. Sint duæ datæ rectæ lineæ BI, BK, & inter eas oporteat reperire duas alias rectas continuè proportionales BN, BO.

Conſtructio. Per propoſ. 12. lib. 6. element. tribus datis rectis BI, BK, & AB, ita vt tertia AB ſit diameter circuli in quo eſt deſcripta proportionatrix, reperiatur quarta proportionalis BH: & per propoſ. 3. lib. 1. elem. de maiore BA detrahatur recta BH æqualis inuentæ minori BH. Et per propoſ. 11. lib. eiuſdem ex puncto H in recta BA, erigatur perpendicularis HG, ipſi AB, donec ſecet in G proportionatricem deſcriptam; tùm ex B per G punctum emittatur chorda BGD maioris ſemicirculi: Dico rectas BD, BG, eſſe medias continuè proportionales quæſitas inter AB & BH.

Demonſtratio. In ſemicirculo ADB, ex puncto H ereximus rectam HG perpendicularem ipſi AB diametro, & ex puncto B duximus rectam BD ſecantem perpendicularem in G, ſic vt ſumpta BF æqualis ſemiſſi applicatæ BD, hoc eſt BE, æqualis ſit ipſi FG per conſtructionem proportionatricis: erunt per præcedens 4. lemma, duæ rectæ BD, BG, mediæ proportionales continuè inter duas AB, BH. Præterea ad punctum B rectæ AB applicetur recta BI æqualis datæ maiori è duabus, quæ cum AB, angulum quemuis efficiat, tum de recta BI iſta detrahatur alia BK ex puncto B, æqualis datæ BK; rectáque tranſmittatur AI, triangulum ABI concludens; & per propoſ. 31. lib. 1. element. ex puncto K agatur recta KH parallela ipſi AI, ſecanſque in H rectam AB; erit per coroll. propoſ. 4. lib. 6. element. triangulum HBK ſimile triangulo ABI; & per 2. propoſ. eiuſdem libri, erit AB ad BH, vt IB ad BK. Inſuper ex puncto H excitetur ad rectam AB, per propoſ. 11. lib. 1. element. recta HG perpendicularis, ſecanſque in G, proportionatricem AGB lineam; tùm tranſmittatur ex B per G punctum recta BGD ſecans ſemicirculum maiorem in D. Ad hæc per propoſ. 3. lib. 1. element. de recta BA ex puncto A, ſecentur rectæ BL, BM, æquales ipſis BD, BG; erunt iſtæ duæ BL, BM, æquales dictis BD, BG, duæ mediæ continuæ proportionales continuè inter duas AB & BH, ſicut fuerunt oſtenſæ duæ BD, BG, mediæ proportionales continuè inter illas AB, BH. Denique ex punctis L & M, agantur etiam rectæ LN, MO, parallelæ ipſi AI, per cit. propoſ. 31. lib. 1. element. erunt omnes AI, LN, MO, HK, parallelæ inuicem per 30. propoſ. lib. eiuſdem cit. 1 element. ideoque iuxta 10. propoſ. lib. 6. element. recta BI erit ſecta in N, O, K, ſicuti recta AB ſecta eſt in L, M, H: ſed recta BH ſecta eſt in quatuor rectas continuè proportionales oſtenſas BA, BL, BM, BA; ergo etiam recta BI, ſecta erit in quatuor rectas continuè proportionales BI, BN, BO, BK; Reperimus igitur beneficio lineæ proportionatricis primæ duas rectas lineas BN, BO, continuè proportionales, inter duas datas rectas BI, BK. quod erat imperatum

## COROLLARIVM NOSTRVM

*Si duo ſemicirculi habeant duas diametros in vna recta, & extremum commune vnum, ſintq́ ad eaſdem partes deſcripti: ipſi ſe mutuò non ſecabunt, ſed contingent in illo puncto communi.*

HOc demonſtrauimus in deſcriptione proportionatricis, in ſemicirculis ADB, CEB, qui obtinent ſuas diametros in eadem recta ACB, & commune B extremum habent. Fig. 404

## LEMMA VI.

*Aliam lineam curuam, nempe ſecundam proportionatricem deſcribere; eiuſq́ beneficio inter quaſcumque duas rectas datas duas medias interponere.*

DEſcriptus ſit ſemicirculus ADB, ſuper diametro AB; & circa eius CB ſemiſſem deſcriptus alius CEB, ſemicirculus ad eaſdem partes maioris: hi duo ſemicirculi ſe mutuò contingent in B iuxta coroll. noſtrum ad lemma præcedens 5. Deinde ex puncto B Fig. 406

accomo-

accomodentur plurimæ chordæ in maiore ſemicirculo, quæ ſecabunt minorem per coroll. noſtrum ad lemma 2, & bifariàm ſecabuntur ab circumferentia huius ſemicirculi minoris: Porrò in omnibus his chordis reperiemus puncta lineæ curuæ ſecundæ proportionatricis huius, ſicuti præcipiemus exempli gratia in vna ex illis BED. Ex puncto E ſectionis communis circumferentiæ circuli minoris,& chordæ BED, demittatur recta linea EF perpendicularis diametro AB, per propoſ.12. lib.1. element. tùm centro F, interuallo FB deſcribatur arcus circuli ſecans in G, ipſam rectam BD; punctum G, erit vnum per quod proportionatrix iſta linea curua incedet. Quod ſi hac arte reperiantur in alijs chordis puncta huiuſmodi propria, per illa erit traijcienda linea curua ſine angulis conſtanti ac firma manu. Huius proprietas erit ex ipſa conſtructione,vt tranſmiſſa quacumque recta ex puncto B, verbi gratia BD, ſecans proportionatricem in G, ſi ex puncto E in quo recta BD ſecta fuerit bifariàm, demittatur perpendicularis EF ad AB diametrum; rectæ FB, FG, ſint æquales inter ſe. Ex his inter duas quaſcumque datas rectas reperiemus duas alias rectas continuè proportionales.

Fig.406 Suppoſitio. Inter duas datas BI,BK,reperiendæ ſint duæ aliæ rectæ continuè proportionales BN,BO.

Conſtructio, Datis duabus BI,BK,& tertia aſſumpta BA diametro proportionatricis huius vel ſemicirculi maioris eam continentis, reperiatur per propoſ. 12. lib. 6. element. quarta proportionalis BL; cui per propoſ. 3. lib. 1. element. detrahenda erit de BA maiore, recta BL æqualis ipſi inuentæ BL: tùm centro B, interuallo BL deſcribendus arcus circuli ſecans proportionatricem in puncto aliquo puta G; ad quod per B emittenda erit recta BGD ſecans minorem circulum in E, & maiorem in D. Inſuper ex puncto D quod eſt in circumferentia maioris ſemicirculi demittatur per 12. propoſ. lib. 1. element. recta linea DH perpendicularis diametro AB. Denique per vltimam cit. propoſ. demittatur etiam ex E puncto ſectionis communis ſemicircumferentiæ circuli minoris, & prædictæ BGD, recta linea EF perpendicularis eidem diametro AB. Dico duas rectas BD, BH, eſſe medias continuè proportionales inter duas AB & BG vel BL æquales. Imprimis enim ducenda recta FG erit æqualis ipſi BF, ex proprietate aſſignata conſtructæ huius lineæ proportionatricis. Et quia rectæ DH, EF, efficiunt angulos rectos cum AB, per conſtructionem; erunt ipſæ DH,EF, parallelæ per propoſ.28. lib.1.element. ideoque trianguli DBH, latera DB, HB, ſecta erunt proportionaliter, per 2.propoſ.lib.6.element. quare erit vt DE ad EB, ſic HF ad FB; prima & ſecunda ſunt æquales oſtenſæ per coroll. noſtrum ad lem. 2. ergo per coroll. noſtrum 2.ad propoſ.14. lib. 5.element.tertia HF, & quarta FB, erunt æquales,ideoque tota HB diuiſa bifariàm in F, duplaque BH, ipſius BF. Ergo per lemma 2. duę rectę BD,BH,erunt proportionales continuè inter duas AB, BG. Iam verò ad punctum B rectæ AB accomodetur recta BI æqualis datæ BI, & de illa BI detrahatur recta BK æqualis minori datæ BK, per propoſ.3. lib. 1. elem. angulumque faciant quemcumque rectæ AB, IB: ducaturque rectæ AI, KL, quæ erunt parallelæ per propoſ.2.lib.6. element. eò quòd ſit vt AB ad BH, ita IB ad KB, per conſtructionem. Denique ex centro B, interuallo BD minore quàm BA, iuxta propoſ.15. lib.3. element.decircinetur circulus, ſecabit rectam maiorem BA in M punctò, eritque ex natura circuli BM æqualis ipſi BD; tùm ex puncto M,agatur parallela recta MN, ipſi AI, per propoſ.31. lib.1.element. tùm ex puncto H, alia parallela recta HO, ipſi AI, erunt per propoſ.30.lib.cit.quatuor rectæ lineæ AI, MN, HO, LK, parallelæ inter ſe; ſimiliterque ſecta erit recta BI, in N, O, K, ſicuti recta BA,in M, H, L, iuxta propoſ.lib.6.element.Dico autem duas rectas lineas BN, BO, eſſe duas continuè proportionales inter duas datas BI, BK.

Demonſtratio. Oſtenſæ ſunt quatuor rectæ lineæ AB,BM ſeu BD æquales, BH, BL, continuè proportionales; ergo quia tota AI, ſecta eſt proportionaliter in N, O, K, ſicuti BA in M, H, L, etiam quatuor iſtæ rectæ lineæ BI, BN, BO, BK, erunt continuè proportionales. Reperimus ergo propoſitum beneficio huius proportionatricis ſecundæ lineæ.

## DECIMVS QVARTVS MODVS

### *Qui eſt noſter.*

### Inueniendi duas rectas lineas continuè proportionales inter duas datas rectas.

Fig.407 SVppoſitio. Inter duas rectas datas AB, BC,ſint inueniendæ duę rectę lineæ continuè proportionales BD, BE.

Maior AB,producatur in rectum vltra B;&

per

per propoſ. 11. lib. 1. element. ad punctum B, rectæ AB, excitetur recta BC, producenda vtrimque vltra B; & per 3. propoſ. lib. cit. ſumenda recta BC infra AB, æqualis ipſi BC datæ. Tùm ex puncto A tranſmittenda vtrũque recta linea AD ſecans rectam CB productam ſupra B, in puncto D: & per cit. propoſ. 11. ex puncto D educenda recta DE perpendicularis ipſi AD, ſecans rectam AB productam vltra B, in puncto E: Tùm etiam per eandem cit. propoſ. 11. ex puncto E erigenda alia recta EC perpendicularis ipſi rectæ DE, ſecanſque rectam BC productam infra B. (Quod autem rectæ DE, EC, ſecturæ ſint ſuas proprias rectas BE, BC, patet per 13. ax. lib. 1. cit. cùm enim anguli in B, ſint recti, & anguli in D & E etiam, diuiſique ab perpendicularibus EB, DB, erunt anguli, BDE, BEC, ſinguli rectis minores, ideoque cum rectis in B proprijs, minores duobus rectis.) Quod ſi vltima recta perpendicularis EC, ad rectam DE, non ſecet rectam BC in puncto C extremo rectæ BC ſumptę ęqualis ipſi BC datæ, ſed ſupra; ſignum eſt primam eductam rectam AD, fuiſſe nimis prope punctum B, quare iterũ erit alia emittenda ex A ad punctum D remotius ab B: Quod ſi ipſa EC vltima ſecuerit ipſam BC, in puncto infra B & C, ſignum eſt ipſam primam AB, fuiſſe eductam ad punctum ſuperius nimis remotum ab B; quare erit alia emittenda AB ad punctum vicinius ipſi B puncto. Et ita per attentationem ſæpius agenda donec vltima EC perpendicularis ad prædictam tranſeat per punctum C terminans rectam BC prædictam æqualem ipſi BC datæ. Et ſic dico rectas BD, BE, eſſe quæſitas duas rectas proportionales continuè inter duas datas rectas AB, BC.

Demonſtratio. Cùm enim per cõſtructionem ſint triãgula rectangula ADE, DEC, & ab angulis rectis illorum, demiſſæ perpendiculares DB, EB, ad ſuas proprias baſes ABE, DBC, oppoſitas dictis angulis rectis propriis ABE, DEC; erunt iuxta coroll. prop. 8. lib. 6. elem. mediæ proportionales DB, EB, continuè inter AB & BC: nam erit vt AB ad BD, ita BD ad EB; & vt BD ad EB, ita EB ad BC. quod erat demonſtrandum. Fecimus ergo imperatum.

## *Idem beneficio duarum normarum concludere.*

DVæ datæ rectæ lineæ AB, BC, componantur ad angulos rectos in puncto B communi: productiſque ipſis vltra B longiſſimè, applicetur vna normarum ſecundũ partes interiores extremo A puncto, & angulus eius rectus puncto D, rectæ CB productę vltra B, inſiſtat, ſecetque eadem norma rectam AB in E, productam vltra B: tum alia norma applicetur, ſecundùm partes eius exteriores, ita vt eius angulus rectus inſiſtat puncto E, & latera huius & illius vna adæquentur; ſi latus aliud huius ſecundæ normę incedat per punctum C rectæ BC, notanda erunt puncta D & E in rectis BD, BE, ſuppoſita angulis rectis ADE, DEC proprijs normarũ. Dico autem duas rectas BD, BE, eſſe continuè proportionales inter duas datas BA, BC. Quod ſi ſecunda norma applicata modo prædicto non inceſſerit vno ſuo latere per C extremum rectæ BC: componendæ erunt ambæ iterum, ſeruando præcepta modò data, & cautiones praxis ſuperioris. *Fig. 408.*

Demonſtratio autem eadem erit quæ tradita in præcedente praxi.

Omnia ad maiorem DEI Opt. Max. Gloriam.

FINIS.

# LECTORI
## TYPOGRAPHVS

HAbes hic deſideratum in elementorum Geometricorum EVCLIDIS commentarium, ſchematis,ſeu figuris,ſummâ curâ & diligentia delineatis,inque laminas æneas accuratiſsimè inciſis exornatum: quarum ope figuræ & textus, facillimè ſimul viſui obijciuntur: figura enim in margine textus citata, inter tabulas ante vel poſt finem libri affixas, & complicatas quærenda eſt, atque diſplicanda, vt vnà textus & figura de qua agitur, pateant. Vbi nota, textus maiuſculas v.g. A, B, C, D, &c. figurarum minuſculas *a*, *b*, *c*, *d*, *&c.* deſignare: vti viciſſim minuſculæ textus, A, B, C, D, &c. maiuſculas figurarum A,B,C,D, &c. denotant.

## *AD COMPACTOREM.*

OMnes figurarum tabulæ folijs à ſiniſtris impreſſæ, ordine numerorum figuris appoſitorum,ante titulum libri affigantur: ita vt ſingulæ folio albo affixæ, & prout opus eſt diſplicatæ, totæ extra librum in conſpectum veniant: replicatæ autem ſemel, præciſè intra libri margines recipiantur;omnes verò reliquæ tabulæ,poſt finem libri,ordine figurarum, vt de præcedentibus dictum eſt,compingantur.

## *AV RELIEVR.*

*LEs planches ornées des figures & imprimées ſur la moitie gauche de la fueille, ſeront reliées deuant le tiltre du liure: en ſorte que la fueille eſtant depliée, le blancq demeure dedans le liure,& l'imprimé ſe monſtre hors, & repliée ſoit iuſtement reçeu dans le liure: le reſte des planches ſe relie ont ſelon l'ordre des figures, a la fin du liure, a la meſme maniere que deſſus.*

## ERRATA SIC CORRIGE.

Pagina 422. columna 2. *linea* 31. & 32. *dele* E.
pag. 423. Col.1. *lin.* 6. & 8, pro AC *ſcribe* AG.
pag. 427. col.2. *lin.*23. pro BV *ſcribe* VR.
ibidem *lin.*29. pro CP *ſcribe* SP.
pag. 428. col. 1. *lin.* 12. pro BOR *ſcribe* VOR.
pag. 506.col. 2. *lin.* 6.pro HK *ſcribe* HA
pag. 441. col. 1. *lin. penult.* pro CD *ſcribe* CB
ibid. col. 2. *lin.* 4. pro HE,HF,HF, *ſcribe* HF, HG
pag.477.col.1.*lin.*9.dele C,& lin.19.*dele*(in G)
pag.479.col.2. *lin.*8. & 9.pro DFG *ſcribe* DIF.
pag.483. col.2. *lin.*14& 16. pro E *ſcribe* F
pag. 503. col.1. *lin.*17, 18, & 19. pro D *ſcribe* T
pag. 506. col.1. *lin.* 25 pro TVR *ſcribe* TVK

Reliqua(ſi quæ ſuperſint)facile per te, ipſe corriges.

Ao 1 1461765

Digitized by Google

Digitized by Google

G 8s.

Digitized by Google